О связи между броуновской экскурсией, броуновской извилиной и броуновским мостом.

Никита Алексеев

В докладе рассмотрены некоторые преобразования на пространстве $C[0,1]$, которые связывают броуновскую экскурсию, броуновскую извилину (меандр) и броуновский мост.

Напомним определения броуновского моста $B^{br}(t)$, броуновской извилины $B^{me}(t)$ и броуновской экскурсии $B^{ex}(t)$:

$$B^{br}(t) \overset{d}{=} \{W(t)|W(1)=0\},$$

$$B^{me}(t) \overset{d}{=} \{W(t)|W(t)\geq 0\},$$

$$B^{ex}(t) \overset{d}{=} \{W(t)|W(t)\geq 0 \text{ и } W(1)=0\},$$

где $W(t)$ – винеровский процесс.

Chung [2] и Kennedy [3] заметили, что распределение максимума экскурсии

$$\max_{0\leq t\leq 1} B^{ex}(t)$$

совпадает с распределением амплитуды броуновского моста

$$\max_{0\leq t\leq 1} B^{br}(t) - \min_{0\leq t\leq 1} B^{br}(t).$$

Это было объяснено с помощью преобразования путей (см. теоремы 1, 2), найденного Vervaat'ом [4]. Другие преобразования, описанные ниже, предложили Bertoin и Pitman в [1].

В докладе приведены преобразования, переводящие мост в экскурсию, меандр в экскурсию и мост в меандр, и доказаны соответствующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $B^{br}(t)$ – броуновский мост и $U = argmin(B^{br}(t))$ – момент достижения мостом минимума на отрезке $[0,1]$ (такой момент единственный с вероятностью 1). Тогда U есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$, и процесс*

$$X(t) := \begin{cases} B^{br}(U+t) - B^{br}(U), t\in[0,1-U], \\ B^{br}(U+t-1) - B^{br}(U), t\in[1-U,1], \end{cases}$$

является экскурсией, причем $X(t)$ и U – независимы.

Кроме того, существует „обратное преобразование“.

Теорема 2. *Пусть* $B^{ex}(t)$ *– броуновская экскурсия и* $\bar{U}$ *– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке* $[0,1]$ *и не зависящая от* $B^{ex}(t)$*. Тогда процесс*

$$X(t) := \begin{cases} B^{ex}(\bar{U}+t) - B^{ex}(\bar{U}), t \in [0, 1-\bar{U}], \\ B^{ex}(\bar{U}+t-1) - B^{ex}(\bar{U}), t \in [1-\bar{U}, 1], \end{cases}$$

является броуновским мостом, причем этот процесс достигает минимума в точке $U = 1 - \bar{U}$*.*

Данные теоремы могут быть проиллюстрированы. Рассмотрим мост (Рис. 1, слева), и разобъем его на участки до точки минимума U (на рисунке этот участок изображен зеленым) и после этой точки (на рисунке изображен черным). Переставим эти участки, и получим броуновскую экскурсию (Рис. 1, справа).

Теорема 3. *Пусть* $B^{br}(t)$ *– броуновский мост и* $U = argmin(B^{br}(t))$ *– момент достижения мостом минимума на отрезке* $[0,1]$*. Тогда* U *есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке* $[0,1]$ *и процесс*

$$X(t) := \begin{cases} B^{br}(U-t) - B^{br}(U), \quad 0 \le t \le U, \\ B^{br}(t) - 2B^{br}(U), \quad U \le t \le 1, \end{cases}$$

является броуновской извилиной $X(t) \stackrel{d}{=} B^{me}$*, причем*

$$U = \sup\{t \le 1 : B^{me}(t) = \frac{1}{2}B^{me}(1)\}.$$

Таким образом, данное преобразование обратимо.

Иллюстрация этого преобразования приведена на Рис. 2. Зеленый участок моста (Рис.2, слева) проходится в обратном направлении, после чего проходится черный участок. В результате получаем извилину (Рис. 2, справа).

Наконец, рассмотрим преобразование, связывающее извилину и экскурсию.

Теорема 4. *Пусть* $B^{ex}(t)$ *– броуновская экскурсия,* U *– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке* $[0,1]$ *и не зависящая от* B^{ex}*. Тогда процесс*

$$X(t) := \begin{cases} B^{ex}(t), \ t \le U, \\ B^{ex}(1-(t-U)), \ t > U, \end{cases}$$

является броуновской извилиной $X(t) \stackrel{d}{=} B^{me}$*, причем*

$$U = \sup\{t \le 1 : B^{me}(t) = \frac{1}{2}B^{me}(1)\}.$$

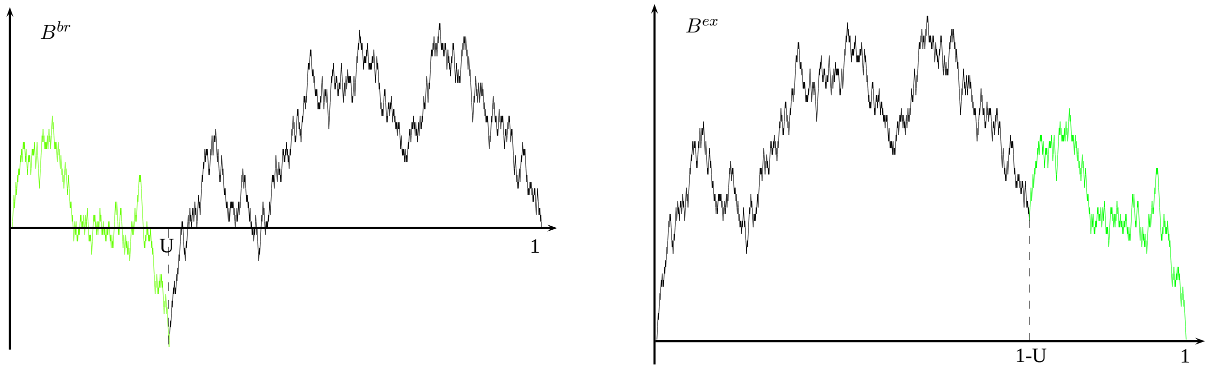

Рис. 1: Броуновский мост (слева) и броуновская экскурсия(справа)

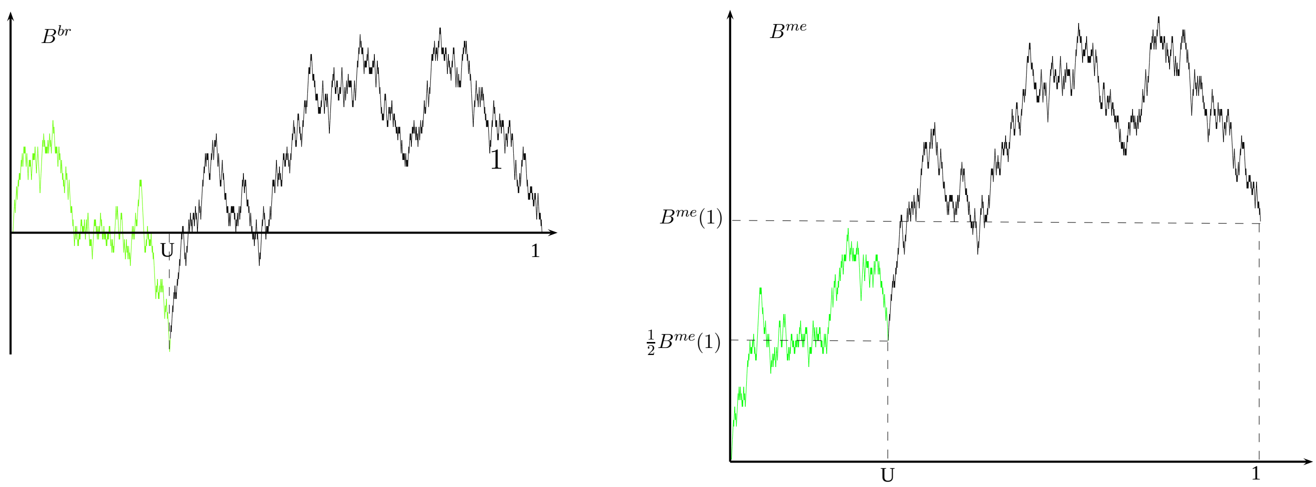

Рис. 2: Броуновский мост (слева) и броуновскй меандр(справа)

Список литературы

[1] J. Bertoin and J. Pitman,
Path Transformations Connecting Brownian Bridge, Excursion and Meander, , Bull. Sci. Math., 118 (1994), 147–166

[2] Chung, K.L., Excursions in Brownian motion, Ark. f6r Math. 14 (1976), 155-177

[3] Kennedy, D., The distribution of the maximum of the Brownian excursion, J. Appl. Prob. 13 (1976), 371-376.

[4] Vervaat, W., *A relation between Brownian bridge and Brownian excursion*, Ann. Probab. 7 (1979), 141-149.