Орбиты унипотентных групп

$\mathbb{F}_q$ — конечное поле, $p = \operatorname{char}\mathbb{F}_q >> 0$

U — унипотентная алг. группа над $\mathbb{F}_q$

Пример. 1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, * \in \mathbb{F}_q \right\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad SL_n \quad O_{2n+1} \quad Sp_{2n} \quad O_{2n}$

2) G — группа Шевалле $/\mathbb{F}_q$ (A_{n-1}, B_n, C_n, D_n)

U — макс. унипотентная подгруппа

$$G = O(J) = \{ x \mid x^t J x = J \}$$

B_n, D_n $\quad J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 \, \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$$C_n: \quad J = \begin{array}{cc} n & n \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & 0 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} n \\ n \end{array}$$

U — верхнетреугольные матрицы у G

метод орбит 1962 г. А А Кириллов

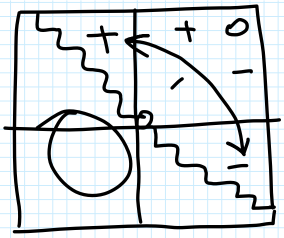
1977 D. Kazhdan

$$\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}\, U$$

Пример 1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \right\}$

2) $G = B_n, C_n, D_n$

$2n$

$\mathfrak{n} =$  $\mathfrak{z}_n$

tr $\approx$ форма Киллинга

$\mathfrak{n}^*$ = двойственное пр-во $\quad \mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}^t$

$U \curvearrowright \mathfrak{n} \quad g, x \longmapsto gxg^{-1}$

$\Rightarrow U \curvearrowright \mathfrak{n}^* \quad (g.\lambda)(x) = \lambda(g^{-1}xg)$ коприсоединённое

$\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}^t \quad g.\lambda = (g\lambda g^{-1})_{low}$

<u>Теорема</u> $\exists \ \mathrm{Irr}\, U \xleftrightarrow{1-1} \mathfrak{n}^*/U$

неприв. конечномерные $\mathbb{C}$ представления

$\Omega \subset \mathfrak{n}^*$ — орбита $\rightsquigarrow f \in \Omega$ — $\forall$ форма $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \mathfrak{p}$ — поляризующая для f $\left[\begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ — подалгебра в } \mathfrak{n} \\ f|_{[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]} \equiv 0 \text{ — макс} \end{array} \right]$

(она $\exists$ M Vergne)

$x, y \in \mathfrak{n} \longmapsto f([x,y])$

макс изотропное подпр-во

$\Downarrow$

<u>Пример</u>

$\mathfrak{p}^t =$  $= f$

$P = \exp \mathfrak{p} \subset U$

$\exp: \mathfrak{n} \longrightarrow U: \quad x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{x^n}{n!}$

$\dim W = 1$

$P \to \mathbb{C}^\times = GL(W) \quad a \longmapsto e(f(\ln a))$

$\dim W = 1$

$$P \longrightarrow \mathbb{C}^\times = GL(W) \qquad g \mapsto \Theta(f(\ln g))$$

фиксируем гомоморфизм $\Theta : \mathbb{F}_q \xrightarrow{\text{нетрив}} \mathbb{C}^\times$

$$f|_{[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]} \equiv 0$$

$$\Omega \ni f \rightsquigarrow \mathfrak{p} \rightsquigarrow P \rightsquigarrow W \rightsquigarrow V = \mathrm{Ind}_P^U W$$

Теорема
- V неприводимо
- V зависит только от Ω $(V = V_\Omega)$
- все неприв представления группы U имеют такой вид
- $V_{\Omega_1} \cong V_{\Omega_2} \Leftrightarrow \Omega_1 = \Omega_2$

$$\chi_\Omega = \chi_{V_\Omega} = \chi$$

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu \in \Omega} \Theta(\mu(\ln g))$$

$$\Omega \cong \mathbb{A}^{2d} \Rightarrow |\Omega| = q^{2d} \qquad \sqrt{|\Omega|} = q^d$$

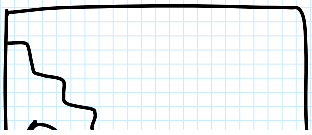
$$\dim_{\mathbb{C}} V_\Omega = \chi(e) = \frac{|\Omega|}{\sqrt{|\Omega|}} = \sqrt{|\Omega|} = q^d$$

$d = \dim \Omega$.

Классификация орбит — дикая задача

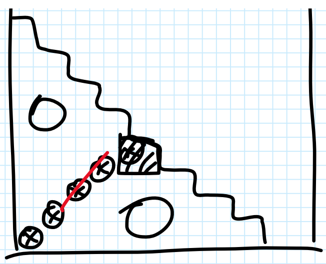
Известно:
- A_{n-1} $\quad n \leq 7$
- A_{n-1}, $\underbrace{B_n, C_n, D_n}$ — max dim

Пример.



max dim

Пример.



max dim

- A_{n-1}, max dim − 2

  B_n, C_n, D_n,

- A_{n-1}, B_n, C_n, D_n $\dim \leq 6$.

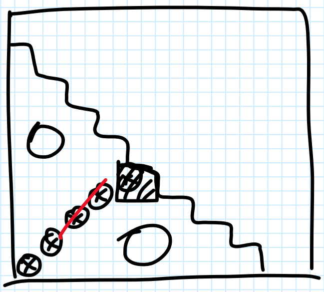
  .... Φ

Гипотеза

Isaacs 2001 ...

- число орбит — многочлен от q
- число орбит данной размерности — это многочлен от q $N_d(\Phi)$
- $N_d(\Phi)$ = многочлен от $q-1$ с $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ коэфф-тами

Пример 1)

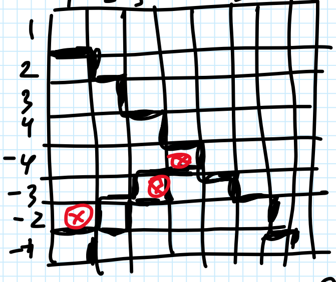


n нечётно $n_0 = \left[\frac{n}{2}\right]$

$(q-1)^{n_0}$

n чётно: $(q-1)^{n_0}((q-1)+1)$

2) $\Phi = C_n$ $\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, \varepsilon_i + \varepsilon_j, 2\varepsilon_i\}$, $i<j$



$(q-1)^n$ $\{2\varepsilon_i, \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}\}$

$(q-1)^{n-1}$

B_n, D_n — иначе

3) Φ — классическая $\quad \dim \leq 6$

14–15–16

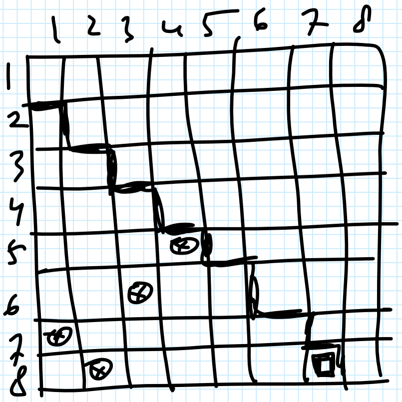
Goodwin, - - - $\quad \cancel{E_8}$

4) Φ — исключительная

гипотеза Isaacs'a верна $\quad$ Айзекс

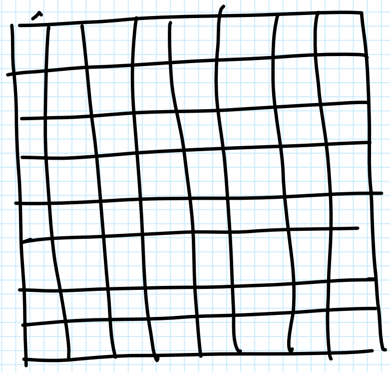
$n \leq 13$

5)



A_{n-1}

А.Н. Панов
2008



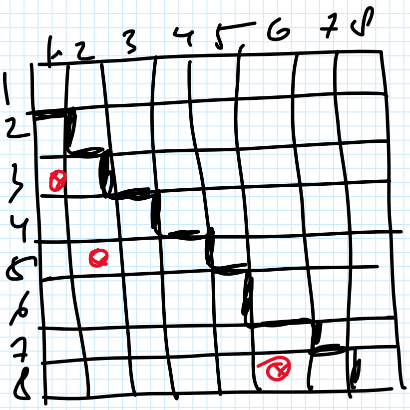
$(q-1)^4 \cdot q$

B_n, C_n, D_n

6) орбиты, ассоц. с расстановками ладей

Опр. Расстановка ладей — это подмн-во

$D \subset \Phi^+ : \ (\alpha,\beta) \leq 0, \ \forall \alpha,\beta \in D$



$D = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \ \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \ \varepsilon_6 - \varepsilon_8\}$

$\mathfrak{n} = \langle e_\alpha, \ \alpha \in \Phi^+ \rangle_{\mathbb{F}_q}$

$\mathfrak{n}^* = \langle e_\alpha^*, \ \alpha \in \Phi^+ \rangle_{\mathbb{F}_q}$

двойственный базис

Отображение $\xi : D \to \mathbb{F}_q^*$

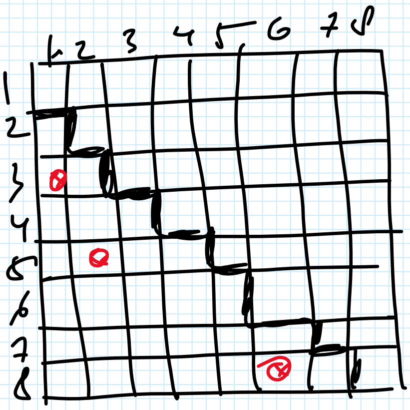
$f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi(\beta) e_\beta^* \rightsquigarrow \Omega_{D,\xi}$ — ассоц. орбита

$|D, \xi| \quad \beta\in D$

D — ортогональная расстановка $\Leftrightarrow \alpha \perp \beta$
$\forall\, \alpha, \beta \in D$

2011–2013 А. Н. Панов. D — орт

$(q-1)^{|D|}$ $\qquad w_D = \prod\limits_{\beta\in D} s_\beta$ — инволюция



$w = (13)(25)(68)$

$\dim \Omega_{D,\xi} =$

$= \ell(w_D) - |D|$

7) $B_n,\ C_n,\ D_n$ $\quad D$ — орт. расстановка

$\dim \Omega_{D,\xi} = \ell(w_D) - |D| - \delta_D$

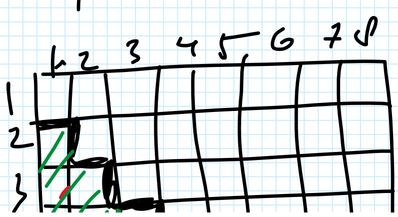
исключение. $\quad \dim \Omega_{D,\xi} \leq \ell(w_D) - |D|$

теория Андре $\quad A_{n-1} \qquad B_n, C_n, D_n$

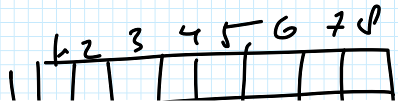
$\Phi = A_{n-1}$ $\quad D$ — расстановка ладей

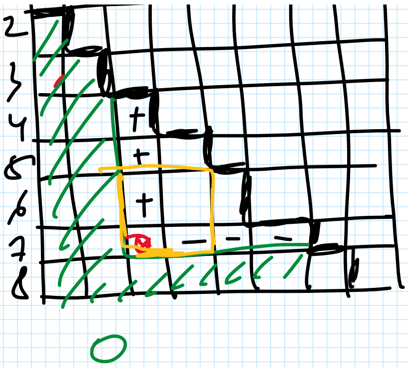
$\beta \in D \qquad \xi : D \to \mathbb{F}_q^{\times}$

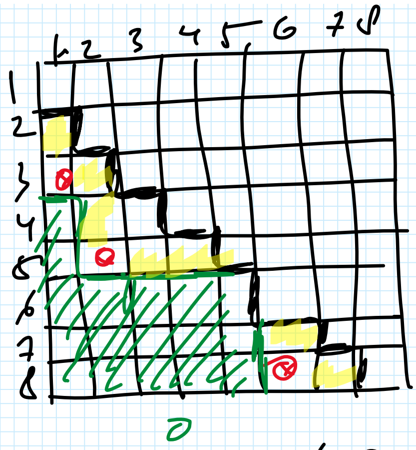
$$\sum_{\beta\in D} \Omega_{\xi(\beta)e_\beta^*} = O_{D,\xi}$$ — аффинное подмногообразие



$\square = O$







U-инв

<u>Теорема</u> (C. André '01) $\mathfrak{u}^* = \bigsqcup\limits_{D,\xi} \Theta_{D,\xi}$

A_{n-1} стратификация

B_n, D_n, C_n ✓

G_2 – да

F_4 – <u>да</u>!

$E_6, E_7, \cancel{E_8} = ?$

max dim – !

dim ≤ 6 классические

$f \in \mathfrak{u}^* \rightsquigarrow \mathrm{Supp}\, f = \{\alpha \in \Phi^+ \mid f(e_\alpha) \neq 0\}$

$\mathrm{rk}\,\Phi \leq 8$, $\cancel{E_8}$ $N_\alpha(\Phi)$

$\mathfrak{u}_1 \hookrightarrow \mathfrak{u}_2 \hookrightarrow \mathfrak{u}_3 \hookrightarrow \dots$

$\mathfrak{u} = \varinjlim \mathfrak{u}_k$ – локально нильпотентная

$\mathfrak{sl}_\infty, \mathfrak{o}_\infty, \mathfrak{sp}_\infty$

$N_1 \hookrightarrow N_2 \hookrightarrow N_3 \hookrightarrow \dots$

$N_k = \exp \mathfrak{u}_k$

$N = \varinjlim N_k$