**Свойство Шура для “скачковой части” градиентных мер**

Антон Целищев, 16.10.2023.

Определение вариации функции $f$, заданной на прямой, хорошо известно. Нетрудно видеть, что ограниченность вариации эквивалентна условию “$f' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$” — то есть обобщённая производная функции $f$ должна быть (знакопеременной) мерой. Верно и обратное: (почти) любой мере на прямой соответствует некоторая функция ограниченной вариации.

В старших размерностях ситуация оказывается куда интереснее: говорят, что у функции $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ограниченная вариация, если её обобщённый градиент $Df$ — (векторнозначная) мера. Пространство таких функций обозначается $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d)$, а мера $Df$ называется градиентной. Благодаря специальной структуре градиентных мер, банахово пространство BV и его элементы обладают некоторыми нетривиальными свойствами.

Любую градиентную меру можно разложить в сумму абсолютно непрерывной, “скачковой” (абсолютно непрерывной относительно меры Хаусдорфа размерности $d-1$) и канторовой части:

$$Df = D^a f + D^j f + D^c f.$$

Мы докажем следующую теорему, которую (не вполне точно), ввиду её схожести с известной теоремой Шура об эквивалентности слабой и сильной сходимости в пространстве $\ell^1$, назвали свойством Шура для “скачковых частей” градиентых мер.

**Теорема.** Если последовательность $f_n$ слабо сходится к $f$ в пространстве BV, то $\|D^j f_n - D^j f\| \to 0$.

Под нормой здесь подразумевается полная вариация соответствующих мер.

Доклад основан на совместной работе с К. Казанецким и М. Войчеховским.