

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 5. Многовременные корреляционные функции. Унитарная динамика 2-уровневой системы

Теретёнков Александр Евгеньевич

10 октября 2023 г.

В прошлой серии...

Классическая марковская цепь задаётся

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t = k | \xi_s = m) &= (P_{t-s})_{km}, & t \geq s \\ \mathbb{P}(\xi_0 = m) &= (p_0)_m\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$p_t = P_t p_0$$

(где $\mathbb{P}(\xi_t = m) = (p_t)_m$) и полугрупповое свойство

$$P_t P_s = P_{t+s}, \forall t \geq s \geq 0 \quad P_0 = I$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} &= \\ &= \sum_{k_N, \dots, k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0}\end{aligned}$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} &= \\ &= \sum_{k_N, \dots, k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_1)} x_{\xi(0)} &= \sum_{k_1, k_0} x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1} (x \circ p_0) = \\ &= (x(t_1) \circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1) \circ x(0))_{\xi_0}\end{aligned}$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} &= \\ &= \sum_{k_N, \dots, k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}x_{\xi(0)} &= \sum_{k_1, k_0} x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1} (x \circ p_0) = \\ &= (x(t_1) \circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1) \circ x(0))_{\xi_0}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}y_{\xi(0)} = \mathbb{E}(x(t_1) \circ y(0))_{\xi_0}$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} &= \\ &= \sum_{k_N, \dots, k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}x_{\xi(0)} &= \sum_{k_1, k_0} x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0}(p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1}(x \circ p_0) = \\ &= (x(t_1) \circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1) \circ x(0))_{\xi_0}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}y_{\xi(0)} = \mathbb{E}(x(t_1) \circ y(0))_{\xi_0}$$

$$\frac{d}{dt_1}x(t_1) \circ y(0) = (Lx(t_1)) \circ y(0)$$

Двухвременные корреляционные функции в случае унитарной динамики

Пусть $U(t) = e^{-iHt}$, тогда

$$\begin{aligned}\langle X(t)Y(s) \rangle &= \text{Tr } X(t)Y(s)\rho = \text{Tr } U^\dagger(t)XU(t)U^\dagger(s)YU(s)\rho = \\ &= \text{Tr } XU(t-s)YU(s)\rho U^\dagger(s)U^\dagger(t-s) = \\ &= \text{Tr } YU(s-t)U(t)\rho U^\dagger(t)XU^\dagger(s-t)\end{aligned}$$

Двухвременные корреляционные функции в случае унитарной динамики

Пусть $U(t) = e^{-iHt}$, тогда

$$\begin{aligned}\langle X(t)Y(s) \rangle &= \text{Tr } X(t)Y(s)\rho = \text{Tr } U^\dagger(t)XU(t)U^\dagger(s)YU(s)\rho = \\ &= \text{Tr } XU(t-s)YU(s)\rho U^\dagger(s)U^\dagger(t-s) = \\ &= \text{Tr } YU(s-t)U(t)\rho U^\dagger(t)XU^\dagger(s-t)\end{aligned}$$

$$\Phi_t = U(t) \cdot U^\dagger(t)$$

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$$

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } X\Phi_{t-s}(Y\Phi_s(\rho))$$

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } Y\Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho)X)$$

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Вообще говоря, $\langle X(t)Y(t) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)\rho \neq \langle (XY)(t) \rangle$.

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Вообще говоря, $\langle X(t)Y(t) \rangle = \text{Tr } \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)\rho \neq \langle (XY)(t) \rangle$.

Более того, в классическом случае, при $t \geq s$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t)}y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k(P_{t-s})_{kl}y_l(P_s)_{lm}p_m$$

Двухвременные корреляционные функции

Чтобы согласовать с классической динамикой при $t \geq s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k(P_{t-s})_{kl} y_l(P_s)_{lm} p_m$$

нужно выбрать

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } X \Phi_{t-s}(Y \Phi_s(\rho)), \quad t \geq s$$

Двухвременные корреляционные функции

Чтобы согласовать с классической динамикой при $t \geq s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k(P_{t-s})_{kl} y_l(P_s)_{lm} p_m$$

нужно выбрать

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } X \Phi_{t-s}(Y \Phi_s(\rho)), \quad t \geq s$$

Аналогично, при $t \leq s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} y_k(P_{s-t})_{kl} x_l(P_t)_{lm} p_m$$

поэтому

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \text{Tr } Y \Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho)X), \quad t \leq s$$

Двухвременные корреляционные функции

Регрессионная формула

$$\langle X(t)Y(s) \rangle = \begin{cases} \text{Tr } X\Phi_{t-s}(Y\Phi_s(\rho)), & t \geq s \\ \text{Tr } Y\Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho)X), & t \leq s \end{cases}$$

Многовременные корреляционные функции

Упорядоченная корреляционная функция: $t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$

$$\langle X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \text{Tr } X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho))$$

Многовременные корреляционные функции

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \dots Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \dots X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr } X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)} \end{aligned}$$

Многовременные корреляционные функции

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \dots Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \dots X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr } X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)} \end{aligned}$$

Вообще говоря обобщённая регрессионная формула определяет не все корреляционные функции.

Упражнение. Для каких $t \geq 0, s \geq 0, r \geq 0$ обобщённая регрессионная формула не позволяет определить $\langle X(t)Y(s)Z(r) \rangle$? (В ответе предполагается неравенство или набор неравенств для t, s, r .)

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Матрицы Паули

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} I + i \varepsilon_{klm} \sigma_m$$

$$\text{Tr } \sigma_k = 0, \quad \text{Tr } \sigma_k \sigma_l = 2 \delta_{kl}$$

Матрицы Паули вместе с единичной матрицей образуют ортогональный базис относительно следового скалярного произведения.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{\sigma})(\vec{b}, \vec{\sigma}) &= (\vec{a}, \vec{b})I + i([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{\sigma}) \\ [(\vec{a}, \vec{\sigma}), (\vec{b}, \vec{\sigma})] &= 2i([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{\sigma})\end{aligned}$$

Упражнение.

$$(\vec{a}, \vec{\sigma})(\vec{b}, \vec{\sigma})(\vec{c}, \vec{\sigma}) = (\vec{d}, \vec{\sigma}) + id_0 I \quad \vec{d}-? \quad d_0-?$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \quad |\vec{v}| \leq 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \quad |\vec{v}| \leq 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.

Упражнение. Докажите

$$\vec{v} = \text{Tr } \rho \vec{\sigma}$$

Унитарная динамика TLS

Гамильтониан общего вида $H = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma})$ (в частности $H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$).

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})) \right) = -i \left[\frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma}), \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \vec{v}, \vec{\sigma} \right) = -i \frac{1}{4} \cdot 2i([\vec{\omega} \times \vec{v}], \vec{\sigma})$$

Унитарная динамика TLS

Уравнение Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{\text{Re}} \\ \Omega_{\text{Im}} \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \Omega_{\text{Im}} \\ \omega_0 & 0 & -\Omega_{\text{Re}} \\ -\Omega_{\text{Im}} & \Omega_{\text{Re}} & 0 \end{pmatrix} \vec{v}$$

Упражнение.

$$[\vec{\omega} \times \cdot]^{2k+1} = (-1)^k |\vec{\omega}|^{2k} [\vec{\omega} \times \cdot], \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$[\vec{\omega} \times \cdot]^{2k} = (-1)^k |\vec{\omega}|^{2k} \left(I - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \cdot) \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Упражнение.

$$e^{t[\vec{\omega} \times \cdot]} = \frac{\sin(|\vec{\omega}|t)}{|\vec{\omega}|} [\vec{\omega} \times \cdot] + \cos(|\vec{\omega}|t) \left(I - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \cdot) \right) + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \cdot)$$

Унитарная динамика TLS

Решение уравнения Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

имеет вид

$$\vec{v}(t) = \frac{\sin(|\vec{\omega}|t)}{|\vec{\omega}|} [\vec{\omega} \times \vec{v}_0] + \cos(|\vec{\omega}|t) \left(\vec{v}_0 - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_0) \right) + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_0).$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^* \sigma_+ + \vec{d}_{12} \sigma_- = \text{Re } \vec{d}_{12} \sigma_x + \text{Im } \vec{d}_{12} \sigma_y$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^* \sigma_+ + \vec{d}_{12} \sigma_- = \operatorname{Re} \vec{d}_{12} \sigma_x + \operatorname{Im} \vec{d}_{12} \sigma_y$$

Дипольное взаимодействие

$$H_d(t) = -(\vec{d}, \vec{E}(t))$$

$$\begin{aligned} H_d(t) &= -(\operatorname{Re} \vec{d}_{12} \sigma_x - \operatorname{Im} \vec{d}_{12} \sigma_y, \vec{E}(t)) = \\ &= -\operatorname{Re} (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) \sigma_x - \operatorname{Im} (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) \sigma_y \end{aligned}$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + H_d(t), \rho],$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z, \quad H_d(t) = -\text{Re}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_x - \text{Im}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_y$$

$$\Omega_{\text{Re}}(t) = -2\text{Re}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)), \quad \Omega_{\text{Im}}(t) = -2\text{Im}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))$$