Косые произведения и геометрически интегрируемые отображения: результаты, проблемы и перспективы

Общеинститутский семинар "Математика и ее приложения" МИАН, 19 октября 2023

Л.С. Ефремова (ННГУ, МФТИ)

Содержание

1. Используемые методы изучения косых произведений.

2. Теорема о разложении пространства C^1-гладких косых произведений с фазовым пространством размерности 2.

3. C^1-гладкие Ω-устойчивые косые произведения: критерий C^1-Ω-устойчивости в размерности два и 3. Аппроксимационные свойства Ω-устойчивых косых произведений (в размерности два).

4. Вполне геометрически интегрируемые отображения. Геометрический и аналитический критерии полной геометрической интегрируемости.

Краткий исторический комментарий, I

В мемуаре "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями" Пуанкаре рассмотрел систему д. у.

$$\dot{x}_1 = \alpha, \;\; \dot{x}_2 = 1, \;\; \dot{y} = \varphi(x_1, x_2)$$

с фазовым пространтвом $S^1 \times S^1 \times R^1$, где S^1 – окружность, R^1 – вещественная прямая, α – иррациональное число, а φ – функция на торе $S^1 \times S^1$. Отображение Пуанкаре на цилиндре $x_2 = 0$ есть цилиндрический каскад, то есть косое произведение над иррациональным поворотом окружности с отображениями в слоях $\overline{y}_{x_1} = y + \widetilde{\varphi}(x_1)$, где y – точка на прямой R^1, x_1 – точка на окружности S^1, а $\widetilde{\varphi}(x_1) = \varphi(x_1, 0)$.

Проблемы описания структуры ω-предельных множеств цилиндрических каскадов были сформулированы Пуанкаре и сформировали базу для дальнейших исследований.

Взаимосвязь с 5-й проблемой Гильберта

Д.В. Аносов ("Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности", Изв. АН СССР. Сер.матем., 37:6 (1973), 1259–1274) был первым математиком, обратившим внимание на взаимосвязь результатов изучения цилиндрических каскадов с решением второй части 5-й проблемы Гильберта о существовании аналитических функциональных уравнений, допускающих недифференцируемые решения.

W.H.Gottshalk and G.A.Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1955).

Исторический комментарий, II

Решение проблем Пуанкаре о структуре ω-предельных множеств цилиндрических каскадов было дано А.Б. Крыгиным (1975). А.Б. Крыгин изучает сечения ω-предельных множеств траекторий образующей цилиндра.

В конце 1980-х одномерная динамика сформировалась в самостоятельный раздел теории динамических систем. Начался переход к изучению динамических систем с фазовым пространством размерности, большей 1, к рассмотрению которых можно эффективно применять результаты одномерной динамики. Косые произведения на простейших многообразиях являются наиболее естественными объектами, удовлетворяющими этому условию (J.Smital, Why it is important to understand dynamics of triangular maps?, J. Difference Equ. Appl. 14:6 (2008), 597–606).

Определение косого произведения

Пусть $\Psi : M^n \to M^n$ $(M^n = \prod\limits_{i=1}^{n} M_i)$, где

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\psi_1(x_1), \ldots, \psi_{n, x_1, \ldots, x_{n-1}}(x_n)); \qquad (1)$$

$$\psi_{j, x_1, \ldots, x_{j-1}}(x_j) = \psi_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j) \ \ (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Отображение (1) – *косое произведение* на M^n. Положим

$$\widehat{\psi}_j = (\psi_1, \psi_{2, x_1}, \ldots, \psi_{j, x_1, \ldots, x_{j-1}});$$

$\widehat{\psi}_j$ – косое произведение с фазовым пространством $\widehat{M}^j$; $\widehat{\psi}_{n-1} : \widehat{M}^{n-1} \to \widehat{M}^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$ – *фактороотображение (фактор)* (1), а для любого $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{M}^{n-1}$ отображение $\psi_{n, \widehat{x}_{n-1}} : M_n \to M_n$ – *отображение в слое* над $\widehat{x}_{n-1} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Пусть $pr_{\widehat{x}_{j-1}} : \widehat{M}^j \to \widehat{M}^{j-1}$ – проекция (здесь $\widehat{M}^n = M^n$). Тогда $pr_{\widehat{x}_{n-1}} \circ \Psi = \widehat{\psi}_{n-1} \circ pr_{\widehat{x}_{n-1}}$.

Итерации косого произведения

В силу (1) для любого $k \geqslant 2$ выполнено:

$$\Psi^k(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\widehat{\psi}^k_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}), \; \psi_{n,\widehat{x}_{n-1},k}(x_n)), \tag{2}$$

где

$$\psi_{n,\widehat{x}_{n-1},k}(x_n) = \psi_{n,\widehat{\psi}^{k-1}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1})} \circ \ldots \circ \psi_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n).$$

Формула (2) означает, что в координатном представлении дискретной динамической системы, заданной косым произведением (1), только первая координатная функция $\psi_1 : M_1 \to M_1$ задает автономную динамическую систему, а остальные $(n-1)$ функция (от второй до n-ной: $\psi_{2,x_1} : M_2 \to M_2$,..., $\psi_{n,\widehat{x}_{n-1}} : M_n \to M_n$) задают неавтономные дискретные динамические системы.

Подготовка к определению Ω-функции

Пусть $SP^0(M^n)$ $(SP^1(M^n))$ – множество всех непрерывных (C^1-гладких) отображений (1).

Определение 1. Точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей для отображения* $\Psi \in SP^0(M^n)$ если для любой ее окрестности U, $x \in U$, существует натуральное число k такое, что

$$U \bigcap \Psi^k(U) \neq \emptyset.$$

Множество $\Omega(\Psi)$ всех неблуждающих точек Ψ называется неблуждающим.

Предложение 1. *Пусть* $\Psi \in SP^0(M^n)$ $(n \geqslant 2)$. *Тогда*

$$\Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) = pr_{\widehat{x}_{n-1}}(\Omega(\Psi)).$$

Пусть 2^{M_n} – пространство всех замкнутых подмножеств M_n, наделенное экспоненциальной топологией.

Определение Ω-функции

Определение 2. *Ω-функцией косого произведения* $\Psi \in SP^0(M^n)$ *$(n \geqslant 2)$* называется функция $\Omega^{\Psi} : \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \to 2^{M_n}$ такая, что для любого $\widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{\psi}_{n-1})$ справедливо равенство:

$$\Omega^{\Psi}(\widehat{x}_{n-1}) = (\Omega(\Psi))(\widehat{x}_{n-1}),$$

где $(\Omega(\Psi))(\widehat{x}_{n-1})$ есть срез $\Omega(\Psi)$ слоем над точкой $\widehat{x}_{n-1}$, то есть

$$(\Omega(\Psi))(\widehat{x}_{n-1}) = \{x_n \in M_n : (\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in \Omega(\Psi)\}.$$

Из определения 2 и предложения 1 следует, что Ω-функция имеет естественный динамический смысл: ее график в фазовом пространстве M^n совпадает с множеством $\Omega(\Psi)$ косого произведения $\Psi \in SP^0(M^n)$.

Ω-функция полунепрерывна сверху на $\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})$.

Специальное представление итераций отображений

Для любого $k \geqslant 1$ введем косое произведение $\Psi_k : M^n \to M^n$, более простое, чем Ψ, и "останавливающее движение в базе":

$$\Psi_k(\widehat{x}_{n-1},\ x_n) = (id_{\widehat{M}^{n-1}}(\widehat{x}_{n-1}),\ \psi_{n,\widehat{x}_{n-1},\,k}(x_n)),$$

и прямое произведение $\Psi_{k,\,1} : M^n \to M^n$, "останавливающее движение в слоях над точками фактор-пространства $\widehat{M}^{n-1}$":

$$\Psi_{k,\,1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\widehat{\psi}^k_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}),\ id_{M_n}(x_n)).$$

Здесь $id_{\widehat{M}^{n-1}}$ и id_{M_n} – тождественные отображения $\widehat{M}^{n-1}$ and M_n соответственно. Тогда имеем:

$$\Psi^k = \Psi_{k,\,1} \circ \Psi_k.$$

С использованием Ψ_k и $\Psi_{k,\,1}$ вводятся другие многозначные функции.

Вспомогательные и подходящие функции для Ω-функции

Пусть $\Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) = \Omega(\widehat{\psi}^k_{n-1}), \ \ k \geqslant 1$.

Определение 3. *Вспомогательными функциями для Ω-функции косого произведения* $\Psi \in SP^0(M^n)$ мы называем многозначные функции $\Omega^\Psi_k : \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \to 2^{M_n}$ такие, что

$$\Omega^\Psi_k(\widehat{x}_{n-1}) = \Omega(\psi_{n,\widehat{x}_{n-1},k}) \text{ для любых } \widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \text{ и } k \geqslant 1,$$

где $\Omega(\psi_{n,\widehat{x}_{n-1},k})$ – неблуждающее множество отображения $\widehat{\psi}_{n,\widehat{x}_{n-1},k} : M_n \to M_n$.

Определение 4. Функции $\overline{\Omega}^\Psi_k : \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \to 2^{M_n}$, графики которых в M^n есть замыкания графиков вспомогательных функций Ω^Ψ_k, называются *подходящими для Ω-функции* $\Psi \in SP^0(M^n)$, причем $\overline{\Omega}^\Psi_k(\widehat{x}_{n-1}) = (\overline{\Omega}^\Psi_k)(\widehat{x}_{n-1})$ для любого $\widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{\psi}_{n-1})$, где $(\overline{\Omega}^\Psi_k)(\widehat{x}_{n-1})$ есть срез замыкания графика Ω^Ψ_k слоем над $\widehat{x}_{n-1}$.

Динамический смысл подходящих функций и другое

1. Пусть $\Psi \in SP^0(M^n)$. Тогда для любого $k \geqslant 1$ график подходящей функции $\overline{\Omega}_k^{\Psi}$ совпадает с графиком Ω-функции отображения $\Psi_{k|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})\times M_n}$, то есть с неблуждающим множеством $\Omega(\Psi_{k|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})\times M_n})$.
2. После того, как мы определили вспомогательные функции Ω_k^{Ψ} (и подходящие функции $\overline{\Omega}_k^{\Psi}$) для всех $k \geqslant 1$, мы должны перенести каждую точку $(\widehat{x}_{n-1}, x_n)$ на графике Ω_k^{Ψ} $(\overline{\Omega}_k^{\Psi})$ в точку $(\widehat{\psi}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}), x_n)$ с помощью прямого произведения $\Psi_{k,1}$.
3. Здесь мы получаем аппроксимирующие функции $\Omega_{k,1}^{\Psi} : \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \to 2^{M_n}$ (функции $\overline{\Omega}_{k,1}^{\Psi} : \Omega(\widehat{\psi}_{n-1}) \to 2^{M_n}$), определенные для $k \geqslant 1$ равенствами

$$\Omega_{k,1}^{\Psi}(\widehat{x}_{n-1}) = (\Psi_{k,1}(\Omega_k^{\Psi}))(\widehat{x}_{n-1}) \quad (\overline{\Omega}_{k,1}(\widehat{x}_{n-1}) = (\Psi_{k,1}(\overline{\Omega}_k^{\Psi}))(\widehat{x}_{n-1}))$$

для любых $\widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{\psi}_{n-1})$.

Эффект памяти в косых пр. с необратимым фактором

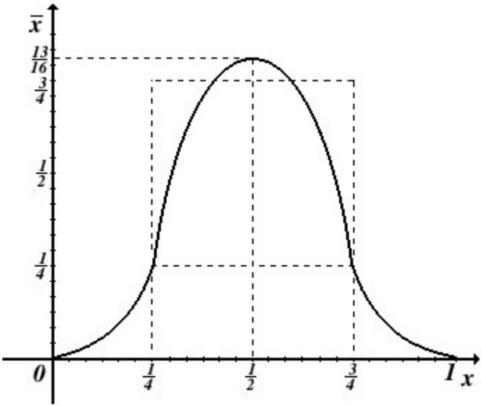
Так как, используя $\Psi_{k,1}$, мы можем переместиться в любую точку $(\widehat{x}_{n-1}, x_n)$ на графике $\Omega^{\Psi}_{k,1}$ $(\overline{\Omega}^{\Psi}_{k,1})$ из точек $(\widehat{x}'_{n-1}, x_n)$, где $\widehat{x}'_{n-1}$ – произвольная точка k-го полного прообраза $\widehat{x}_{n-1}$ относительно $\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})}$, то верны равенства

$$\Omega^{\Psi}_{k,1}(\widehat{x}_{n-1}) = \bigcup_{\widehat{x}'_{n-1} \in \{(\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})})^{-k}(\widehat{x}_{n-1})\}} \Omega^{\Psi}_{k}(\widehat{x}'_{n-1})$$

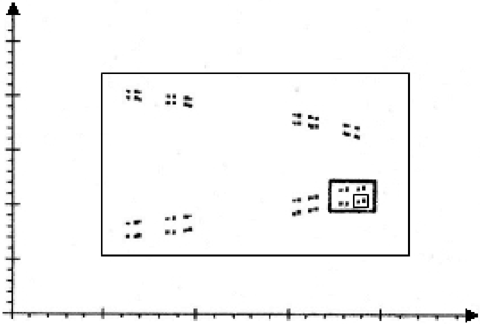
$$(\overline{\Omega}^{\Psi}_{k,1}(\widehat{x}_{n-1}) = \bigcup_{\widehat{x}'_{n-1} \in \{(\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})})^{-k}(\widehat{x}_{n-1})\}} \overline{\Omega}^{\Psi}_{k}(\widehat{x}'_{n-1})).$$

Здесь $(\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})})^{-k}(\widehat{x}_{n-1})$ – k-тый полный прообраз $\widehat{x}_{n-1}$ относительно $\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})}$.
Следующий рисунок показывает влияние "памяти" на примере $\Psi(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1), 0,5x_1 + 0,1x_2)$, $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$.

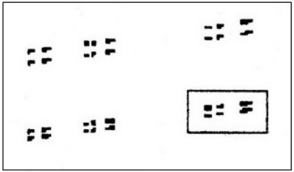
График функции ψ_1



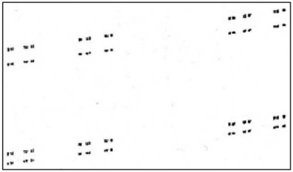
Пример: $\Psi(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1), 0,5x_1 + 0,1x_2)$



а)



б)



в)

Фактор C^1-гладкого косого произведения на M^2

Определение 5. Отображение $\psi \in C^1(S^1)$ называется *Ω-устойчивым* (в C^1-норме), если для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного $\varphi \in B^1_{1,\varepsilon}(\psi)$ можно найти δ-близкий в C^0-норме к тождественному отображению гомеоморфизм $h : \Omega(\psi) \to \Omega(\varphi)$, для которого выполнено

$$h \circ \psi_{|\Omega(\psi)} = \varphi_{|\Omega(\varphi)} \circ h.$$

Если $h : S^1 \to S^1$, и $h \circ \psi = \varphi \circ h$ верно на всей окружности S^1, то отображение ψ называется *C^1-структурно устойчивым*.

Теорема 1 [М.В. Якобсон, 1971]. *В $C^1(S^1)$ существует открытое всюду плотное множество $\mathbf{L} = \mathbf{L_1} \bigcup \mathbf{L_2}$, где $\mathbf{L_1}$ – множество Ω-устойчивых отображений с вполне несвязным неблуждающим множеством, а $\mathbf{L_2}$ – множество структурно устойчивых отображений таких, что каждое $\psi \in \mathbf{L_2}$ сопряжено с растягивающим отображением той же самой степени $deg\, \psi$, где $|deg\, \psi| > 1$.*

Неблуждающее множество фактора из **L**, I

Пусть $\tau(\psi)$ – множество (наименьших) периодов периодических точек отображения $\psi \in C^1(S^1)$. Положим $q = \inf \tau(\psi)$.

Предложение 2. *Если* $\psi \in \mathbf{L_1}$, *то либо*
(2.1) *для любого* $p' \in \tau(\psi)$ *существует* i, *где* $0 \leqslant i \leqslant \nu$, *для некоторого* $\nu < +\infty$, *такое, что* $p' = 2^i q$, *неблуждающее множество* $\Omega(\psi)$ *конечно и состоит из гиперболических периодических точек, либо*
(2.2) *существует* $p' \in \tau(\psi)$ *такое, что* $p'/q \notin \{2^i\}_{i \geqslant 0}$, *при этом*

$$\Omega(\psi) = \Omega_r(\psi) \bigcup \Omega_p(\psi),$$

где $\Omega_r(\psi)$ *– непустая часть* $\Omega(\psi)$, *состоящая из конечного числа гиперболических периодических точек;* $\Omega_p(\psi)$ *– непустая совершенная часть* $\Omega(\psi)$, *состоящая из конечного числа локально максимальных квазиминимальных гиперболических совершенных нигде не плотных множеств.*

Неблуждающее множество фактора из $\mathbf{L}$, II

(2.3) *для* $\psi \in \mathbf{L_2}$ *верны равенства* $\Omega(\psi) = \Omega_p(\psi) = S^1$.
Если $\psi \in \mathbf{L_1}$, *и существует* $p' \in \tau(\psi)$ *такое, что* $p'/q \notin \{2^i\}_{i \geqslant 0}$; *или* $\psi \in \mathbf{L_2}$, *то*
(2.4) $\Omega(\psi) = \overline{Per(\psi)}$, *где* $Per(\cdot)$ – *множество периодических точек отображения;*
(2.5) *для любого* $\theta > 0$ *и любого локально максимального квазиминимального множества* $K(\psi)$ *существует периодическая орбита, которая аппроксимирует* $K(\psi)$ *с точностью до* θ, *это означает, что для произвольного конечного покрытия* $K(\psi)$ *интервалами длины* $\leqslant \theta$ *существует периодическая орбита, которая пересекает каждый интервал этого покрытия, по крайней мере, в одной точке;*
(2.6) *существуют числа* $\alpha = \alpha(\psi) > 0$ *и* $c = c(\psi) > 1$ *такие, что неравенство*

$$|(\psi^n(x))'| > \alpha c^n$$

верно для всех $x \in \Omega_p(\psi)$ *и* $n \geqslant 1$.

Подготовка к фундаментальной теореме о разложении

Пусть $\Psi \in SP^1(M^2)$ – таково, что $\psi_1 \in \mathbf{L}$, и существует $p' \in \tau(\psi_1)$ при $p'/q \notin \{2^i\}_{i\geqslant 0}$. Обозначим $SP^1_L(M^2)$ множество косых произведений, удовлетворяющих указанным условиям.

Фундаментальная теорема о разложении основана на рассмотрении всех логически возможных сочетаний свойств непрерывности/разрывности вспомогательных и подходящих функций косого произведения.

Мы используем времена возвращения окрестностей точек из $\Omega(\psi_1)$. В силу предложения 2 эти времена определяются периодами периодических траекторий. Для любого $\Psi \in SP^1_L(M^2)$ существуют натуральные числа m_* и i_* такие, что

$$\{m_* i\}_{i\geqslant i_*} \subseteq \tau(\psi_{1|\Omega_p(\psi_1)}).$$

Положим $l_i = m_* i$ для всех $i \geqslant i_*$. Множество ψ_1-периодических точек с периодами l_i, $i \geqslant i_*$, всюду плотно в $\Omega_p(\psi_1)$.

Теорема о разложении: основные подпространства

Если $\Psi \in SP^1_L(M^2)$, то возможны следующие случаи:
1. последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^{\Psi}_{l_i}\}_{i \geqslant i_*}$ (и последовательность аппроксимирующих функций $\{\Omega^{\Psi}_{l_i,1}\}_{i \geqslant i_*}$) содержит не более конечного множества разрывных функций;
2. последовательность вспомогательных функций $\{\Omega^{\Psi}_{l_i}\}_{i \geqslant i_*}$ (и, следовательно, последовательность функций $\{\Omega^{\Psi}_{l_i,1}\}_{i \geqslant i_*}$) содержит счетное множество разрывных функций, но последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i}\}_{i \geqslant i_*}$ (и, следовательно, последовательность функций $\{\overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i,1}\}_{i \geqslant i_*}$) содержит не более конечного множества разрывных функций;
3. последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i}\}_{i \geqslant i_*}$ содержит счетное множество разрывных функций, а Ω-функция отображения Ψ непрерывна;
4. последовательность подходящих функций $\{\overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i}\}_{i \geqslant i_*}$ содержит счетное множество разрывных функций, а Ω-функция отображения Ψ разрывна.

Формулировка теоремы о разложении

В соответствии с указанными логическими возможностями в пространстве $SP^1_L(M^2)$ можно выделить подпространства $SP^1_{L,j}(M^2)$, $j = 1, 2, 3, 4$, отображений, удовлетворяющих условию j.

Теорема 2. *Каждое подпространство $SP^1_{L,j}(M^2)$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ не пусто, и их объединение $\bigcup\limits_{j=1}^{4} SP^1_{L,j}(M^2)$ совпадает с $SP^1_L(M^2)$.*

Проблема 1. Структура подпространств $SP^1_{L,j}(M^2)$, $j = 2, 3, 4$, в натоящее время не известна. Необходимо выделить открытые всюду плотные подмножества в этих подпространствах и описать динамику отображений из выделенных подмножеств.

Что касается подпространства $SP^1_{L,1}(M^2)$, в настоящее время есть результаты об Ω-устойчивых отображениях.

Если M^2 – прямоугольник или цилиндр, то при изучении Ω-устойчивости рассматриваются отображения, относительно которых край M^2 инвариантен.

Определение 6. Косое произведение $\Psi \in SP^1(M^n)$ $(n \geqslant 2)$ называется Ω-устойчивым в $SP^1(M^n)$, если для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B^1_\varepsilon(\Psi)$ отображения Ψ в пространстве $SP^1(M^n)$ такая, что для каждого $\Phi \in B^1_\varepsilon(\Psi)$ найдется δ-близкий в C^0-норме (равномерной сходимости) к тождественному отображению гомеоморфизм - косое произведение $H : \Omega(\Psi) \to \Omega(\Phi)$, где $H(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\widehat{h}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}), h_{n, \widehat{x}_{n-1}}(x_n))$, удовлетворяющий соотношению

$$H \circ \Psi_{|\Omega(\Psi)} = \Phi_{|\Omega(\Phi)} \circ H. \qquad (3)$$

В силу предыдущего фактор $\widehat{\psi}_{n-1} : \widehat{M}^{n-1} \to \widehat{M}^{n-1}$ – C^1-Ω-устойчив в пространстве $C^1(M_1)$ при $n = 2$ (в пространстве $SP^1(\widehat{M}^{n-1})$ при $n \geqslant 3$), если Ψ – Ω-устойчиво в $SP^1(M^n)$.

C^1-устойчивость в целом семейства отображений в слоях

Определение 7. Говорим, что семейство отображений в слоях косого произведения $\Psi \in SP^1_L(M^n)$ *устойчиво в целом* в $SP^1(M^n)$, если для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B^1_\varepsilon(\Psi)$ отображения Ψ в $SP^1(M^n)$ такая, что для любого отображения $\Phi \in B^1_\varepsilon(\Psi)$ и любого времени возвращения l_i $(i \geqslant i_*)$ существует гомеоморфизм - косое произведение $H^{<l_i>} : \overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i} \to \overline{\Omega}^{\Phi}_{l_i}$ (здесь $\overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i}$ и $\overline{\Omega}^{\Phi}_{l_i}$ – графики подходящих функций отображений Ψ и Φ соответственно), δ-близкий к тождественному отображению в $SP^0(M^n)$ и такой, что вспомогательные отображения $\Psi_{l_i|\Omega(\widehat{\psi}_{n-1})\times M_n}$ и $\Phi_{l_i|\Omega(\widehat{\varphi}_{n-1})\times M_n}$ (здесь $\widehat{\varphi}_{n-1} : \widehat{M}^{n-1} \to \widehat{M}^{n-1}$ факторотображение для Φ) – Ω-сопряжены посредством $H^{<l_i>}$.

Свойство устойчивости в целом семейства отображений в слоях косого произведения $\Psi \in SP^1(M^n)$ влечет C^1- Ω-устойчивость каждого отображения в слое в пространстве $C^1(M_n)$.

Критерий C^1- Ω-устойчивости и его следствия

Теорема 3. *Косое произведение $\Psi \in SP^1_L(M^2)$ – Ω-устойчиво в пространстве $SP^1(M^2)$, если и только если его семейство отображений в слоях устойчиво в целом в $SP^1(M^2)$.*

Теорема 4. *Пусть косое произведение $\Psi \in SP^1_L(M^2)$ – Ω-устойчиво в $SP^1(M^2)$. Тогда $\Psi \in SP^1_{L,1}(M^2)$ и имеет непрерывную Ω-функцию.*

Предожение 3. *Если косое произведение $\Psi \in SP^1_L(M^2)$ – Ω-устойчиво, то для любых двух различных периодических точек x'_1 и x''_1 в произвольном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(\psi_1)$ фактора ψ_1 отображения ψ_{2,x'_1,m^*} и ψ_{2,x''_1,m^*} – Ω-сопряжены, где m^* – наименьшее общее кратное (наименьших) периодов точек x'_1 и x''_1.*

Теорема 5. *Существует отображение $\Psi \in\in SP^1_{L,1}(M^2)$ такое, что некоторая его окрестность $B^1_\varepsilon(\Psi)$ в $SP^1_{L,1}(M^2)$ не содержит Ω-устойчивых отображений.*

C^1-плотная устойчивость в целом семейства отображений в слоях

Проблема 2. Описать всюду плотное подмножество в дополнении Ω-устойчивых отображений до всего $SP^1_{L,1}(M^2)$.

Определение 8. Семейство отображений в слоях косого произведения $\Psi \in SP^1_{L,j}(M^2)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ называется плотно устойчивым в целом в $SP^1(M^2)$, если существует открытое множество $A(\psi_1) \subset M_1$ такое, что $A^*(\psi_1) = A(\psi_1) \cap \Omega(\psi_1)$ есть собственнное инвариантное всюду плотное подмножество $\Omega(\psi_1)$, для которого выполнено свойство: для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B^1_\varepsilon(\Psi)$ в $SP^1(M^2)$ такая, что для любого $\Phi \in B^1_\varepsilon(\Psi)$ и любого времени возвращения l_i $(i \geqslant i_*)$ найдется гомеоморфизм - косое произведение $H^{<l_i>} : \overline{\Omega}^{\Psi}_{l_i}{}_{|A^*(\psi_1)} \to \overline{\Omega}^{\Phi}_{l_i}{}_{|A^*(\varphi_1)}$, δ-близкий к тождественному отображению в $SP^0(M^2)$ и такой, что вспомогательные отображения $\Psi_{l_i|A^*(\psi_1)\times M_2}$ и $\Phi_{l_i|A^*(\varphi_1)\times M_2}$ – Ω-сопряжены посредством $H^{<l_i>}$.

Аппроксимации Ω-устойчивыми отображениями

Теорема 6. *Пусть* $\Psi \in SP^1_{L,j}(M^2)$ ($j = 1$, 3 *или* 4) *– косое произведение с плотно устойчивым в целом в* $SP^1_L(M^2)$ *семейством отображений в слоях. Тогда* Ψ *можно аппроксимировать с любой степенью точности* C^1*-гладкими* Ω*-устойчивыми косыми произведениями в том и только том случае, если для любого локально максимального квазиминимального множества* $K(\psi_1)$ *фактора* ψ_1 *и любого* $i \geqslant i_*$ *существует связная компонента* $C_{K(\psi_1),\, i}$ *пространства* C^1*-гладких* Ω*-устойчивых отображений* M_2 *в себя такая, что*

$$\{\psi_{2,\, x_1,\, l_i}\}_{x_1 \in K(\psi_1)} \subset \overline{C}_{K(\psi_1),\, i}.$$

Проблема 3. Существует ли отображение $\Psi \in SP^1_{L,\,2}(M^2)$ с плотно устойчивым в целом в $SP^1_L(M^2)$ семейством отображений в слоях, удовлетворяющее условиям теоремы 17?

Многомерное обобщение теоремы 12

Теорема 7. *Косое произведение* $\Psi \in SP^1(T^3)$ – Ω*- устойчиво в пространстве* $SP^1(T^3)$ *в том и только том случае, если* ψ_1 – Ω*-устойчиво в* $C^1(S^1)$, *и семейство отображений в слоях как косого произведения* $\widehat{\psi}_2$, *так и* Ψ, *устойчиво в целом в пространстве* $SP^1(T^2)$ *и* $SP^1(T^3)$ *соответственно.*

Как следствие теоремы 18 и теоремы 15 мы получаем следующее утверждение.

Предложение 4. *Открытое множество* Ω*-устойчивых косых произведений в пространстве* $SP^1(T^3)$ *не является всюду плотным в* $SP^1(T^3)$.

Определение вполне геометрически интегрируемых отображений, I

Определение 9. Отображение $F : M^n \to M^n$ $(n \geqslant 2)$, где

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (4)$$

называется *геометрически интегрируемым на непустом F-инвариантном множестве* $A^n(F) \subseteq M^n$, если существуют отображение $\widehat{\psi}_{n-1} : \widehat{M}^{n-1} \to \widehat{M}^{n-1}$ и $\widehat{\psi}_{n-1}$-инвариантное множество $A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1}) \subseteq \widehat{M}^{n-1}$ такие, что $F_{|A^n(F)}$ полусопряжено с $\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})}$ посредством непрерывной сюръекции $H_n : A^n(F) \to A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})$, то есть справедливо:

$$H_n \circ F_{|A^n(F)} = \widehat{\psi}_{n-1}{}_{|A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})} \circ H_n. \qquad (5)$$

Отображение $\widehat{\psi}_{n-1}{}_{|A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})}$ называется *(первым) фактором* $F_{|A^n(F)}$.

Определение вполне геометрически интегрируемых отображений, II

Пусть, более того, каждый j-тый фактор $\widehat{\psi}_{n-j|A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2,\ n \geqslant 3)$ отображения $F_{|A^n(F)}$ – геометрически интегрируем на непустом $\widehat{\psi}_{n-j}$-инвариантном множестве $A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})$ посредством непрерывной сюръекции $H_{n-j} : A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j}) \to A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})$ с (первым) фактором $\widehat{\psi}_{n-j-1|A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})}$, который называется $(j+1)$-*м фактором* $F_{|A^n(F)}$. Здесь $\widehat{\psi}_{n-j-1} : \widehat{M}^{n-j-1} \to \widehat{M}^{n-j-1}$, а множество $A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1}) \subseteq \widehat{M}^{n-j-1}$ – $\widehat{\psi}_{n-j-1}$-инвариантно и не пусто. Тогда отображение $F_{|A^n(F)}$ называется вполне геометрически интегрируемым на множестве $A^n(F)$.

Как следует из определения 9, топологическая сопряженность сохраняет свойство полной геометрической интегрируемости отображения.

Далее под C^0-диффеоморфизмом мы понимаем гомеоморфизм.

Определение 10. Пусть A – подмножество M^n такое, что $A = \bigcup\limits_{\alpha} L_\alpha$, где α принадлежит индексному множеству; C^r-подмногообразия $\{L_\alpha\}_\alpha$ размерности d попарно не пересекаются. Семейство подмногообразий $\{L_\alpha\}_\alpha$ называется *d-мерной C^r-локальной ламинацией без особенностей*, если для каждой точки $x \in A$ существуют окрестность $U(x) \subset M^n$ и C^r-диффеоморфизм $\chi : U(x) \to \mathbf{R^n}$ ($\mathbf{R^n}$ – n-мерное евклидово пространство) такие, что каждая связная компонента пересечения $U(x) \bigcap L_\alpha$ (если пересечение не пусто) отображается C^r-диффеоморфизмом χ в прямую так, что

$$\chi_{|U(x)\bigcap L_\alpha} : U(x) \bigcap L_\alpha \to \chi(U(x) \bigcap L_\alpha)$$

есть C^r-диффеоморфизм на образ.

Определение d-мерной локальной ламинации, II

Множество A называется *носителем локальной ламинации* $L(A)$, подмногообразия L_α называются *слоями*. Если A – замкнутое множество, $A \neq M^n$, то мы говорим о *d-мерной C^r-ламинации*; если $A = M^n$, то мы говорим о *d-мерном C^r-слоении*.
Далее мы используем проекции $pr_j : \widehat{M}^j \to M_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

Теорема 8. *Пусть $F : M^n \to M^n$ $(n \geqslant 2)$, $A^n(F)$ – непустое замкнутое F-инвариантное подмножество M^n такое, что*

$$pr_n(A^n(F)) = M_n. \tag{6}$$

Пусть $\widehat{\psi}_{n-j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2,\ n \geqslant 3)$ – отображение $\widehat{M}^{n-j}$ в себя, $A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})$ – замкнутое $\widehat{\psi}_{n-j}$-инвариантное подмножество $\widehat{M}^{n-j}$ такое, что

$$pr_{n-j}(A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})) = M_{n-j}. \tag{7}$$

Геометрический критерий полной интегрируемости

Тогда $F_{|A^n(F)}$ – *вполне геометрически интегрируемо с последовательными факторами* $\widehat{\psi}_{n-j}{}_{|A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})}$ *посредством непрерырвных сюръекций* $H_n : A^n(F) \to A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})$ *для* $n \geqslant 2$ *и* $H_{n-j} : A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j}) \to A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})$ *для* $n \geqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$, *такими, что:*
H_n *взаимно однозначно по* $\widehat{x}_{n-1}$ *для каждого* $x_n \in M_n$, *и* H_{n-j} *взаимно однозначно по* $\widehat{x}_{n-j-1}$ *для каждого* $x_{n-j} \in M_{n-j}$,
если и только если $A^n(F)$ *and* $A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})$ *при указанных* j *есть носитель непрерывной инвариантной локальной ламинации со слоями* $\{\gamma_{\widehat{x}'_{n-1}} : \widehat{x}'_{n-1} \in A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})\}$ *и* $\{\gamma_{\widehat{x}'_{n-j-1}} : \widehat{x}'_{n-j-1} \in A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})\}$ *соответственно, которые являются попарно не пересекающимися графиками непрерывных функций* $\widehat{x}_{n-1} = \widehat{x}_{\widehat{x}'_{n-1}}(x_n)$ *любого* $x_n \in M_n$ *и* $\widehat{x}_{n-j-1} = \widehat{x}_{\widehat{x}'_{n-j-1}}(x_{n-j})$ *для любого* $x_{n-j} \in M_{n-j}$ *соответственно.*

Аналитический критерий полной интегрируемости, I

Теорема 9. *Пусть* $F : M^n \to M^n$ $(n \geqslant 2)$, $A^n(F)$ *– непустое замкнутое* F*-инвариантное подмножество* M^n*, удовлетворяющее (6). Пусть* $\widehat{\psi}_{n-j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2,\ n \geqslant 3)$ *– отображение* $\widehat{M}^{n-j}$ *в себя,* $A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})$ *– замкнутое* $\widehat{\psi}_{n-j}$*-инвариантное подмножество* $\widehat{M}^{n-j}$ *удовлетворяющее (7). Тогда* $F_{|A^n(F)}$ *– вполне геометрически интегрируемое отображение с последовательными факторами* $\widehat{\psi}_{n-j}{}_{|A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})}$ *посредством непрерывных сюръекций* $H_n : A^n(F) \to A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})$ *для* $n \geqslant 2$ *и* $H_{n-j} : A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j}) \to A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})$ *для* $n \geqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$*, такими, что:*
H_n *взаимно однозначно по* $\widehat{x}_{n-1}$ *для любого* $x_n \in M_n$*, и* H_{n-j} *взаимно однозначно по* $\widehat{x}_{n-j-1}$ *для любого* $x_{n-j} \in M_{n-j}$*,*
в том и только том случае, если найдутся гомеоморфизмы
$\widetilde{H}_n : A^n(F) \to A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1}) \times M_n$ *для* $n \geqslant 2$ *и*
$\widetilde{H}_{n-j} : A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j}) \to A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1}) \times M_{n-j}$ *для*
$n \geqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$,

которые сводят сужения $F_{|A^n(F)}$ *и* $\widehat{\psi}_{n-j|A^{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})}$ *соответственно к косым произведениям:*

$$\Psi_{n|A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})\times M_n}(\widehat{u}_{n-1},\, u_n) = (\widehat{\psi}_{n-1|A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1})}(\widehat{u}_{n-1}),\ \psi_{n,\widehat{x}'_{n-1}}(u_n)),$$

где $\widehat{x}'_{n-1} = pr_{\widehat{x}_{n-1}} \circ \widetilde{H}_n^{-1}(\widehat{u}_{n-1},\, u_n)$,
$\widetilde{H}_n^{-1} : A^{n-1}(\widehat{\psi}_{n-1}) \times M_n \to A^n(F)$ *– обратный гомеоморфизм для* $\widetilde{H}_n$;

$$\Psi_{n-j|A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})\times M_{n-j}}(\widehat{u}_{n-j-1},\, u_{n-j}) =$$
$$(\widehat{\psi}_{n-j-1|A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1})}(\widehat{u}_{n-j-1}),\ \psi_{n-j,\widehat{x}'_{n-j-1}}(u_{n-j})),$$

где $\widehat{x}'_{n-j-1} = pr_{\widehat{x}_{n-j-1}} \circ \widetilde{H}_{n-j}^{-1}(\widehat{u}_{n-j-1},\, u_{n-j})$,
$\widetilde{H}_{n-j}^{-1} : A^{n-j-1}(\widehat{\psi}_{n-j-1}) \times M_{n-j} \to A_{n-j}(\widehat{\psi}_{n-j})$ *– обратный гомеоморфизм для* $\widetilde{H}_{n-j}$.

Некоторые нерешенные проблемы

Проблема 4. Получить критерий C^1- Ω-устойчивости C^1-гладких косых произведений в размерностях $\geqslant 2$ по отношению к малым возмущениям, не являющимся косыми произведениями.

Проблема 5. Получить достаточные условия полной геометрической интегрируемости отображений

$$F(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\psi_1(x_1) + \mu_1(\widehat{x}_{n-1}, x_n);\ \psi_{2,x_1}(x_2) + \mu_2(\widehat{x}_{n-1}, x_n);\\ \ldots, \psi_{n-1,\widehat{x}_{n-2}}(x_{n-1}) + \mu_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n); \psi_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n))$$

с фазовым пространством M^n для $n > 2$, где функции $\mu_j(\widehat{x}_{n-1}, x_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ малы в C^1-норме и удовлетворяют нулевым граничным условиям.

Пример, I

$$F_k(x,\, y) = (\varphi_k(x) + \mu(x,\, y),\, \psi_x(y)), \;\; \varphi_k(x) = kx\,(mod\, 1), \;\; k > 1.$$

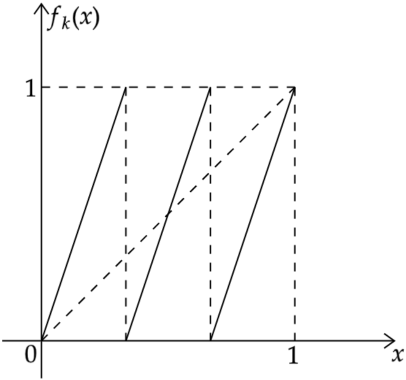


Рис.: Графикφ_k для $k = 3$.

Пример, II

Чтобы определить $\psi_x(y)$ на $S^1 \times [0, 1]$ ($S^1 = [0, 1]^*$) для F_k, мы используем C^1-глакую функцию Урысона $y = h_k(x)$, $x \in [0, 1]^*$, такую, что

$$h_k(0) = h_k(1) = \tfrac{3}{4}, \quad h_k\left(\tfrac{1}{k}\left[\tfrac{k}{2}\right]\right) = 0;$$
$$h_k'(0) = h_k'(1) = h_k'\left(\tfrac{1}{k}\left[\tfrac{k}{2}\right]\right) = 0.$$

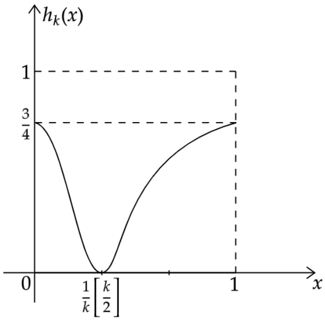


Рис.: График функции Урысона h_k для $k = 3$.

Пример, III

Для достаточно малых δ график $y = h_k(x)$ пересекает каждый слой $\gamma_{x'}$ в единственной точке без касания так, что равенство $y = h_k(x_{x'}(y))$ эквивалентно $y = y(x')$, где $x' \in S^1$, а $y = y(x')$ – C^1-гладкая функция на S^1.
Используем два связных множества

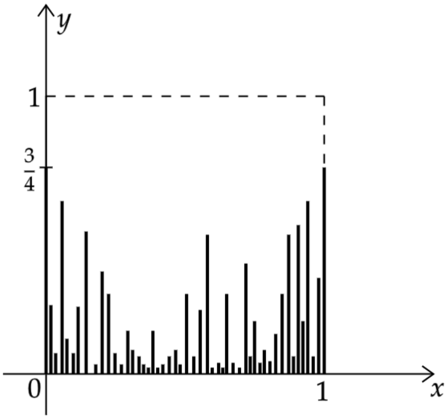
$$D' = \{(x,\, y) \in \bigcup_{x' \in [0,1]^*} \gamma_{x'} :\, 0 \leqslant y \leqslant y(x')\};$$
$$D'' = \{(x,\, y) \in \bigcup_{x' \in [0,1]^*} \gamma_{x'} : y(x') < y \leqslant 1\}.$$

Полагаем

$$\psi_x(y) = \begin{cases} y, & \text{если} \quad (x,\, y) \in \gamma_{x'} \bigcap D', \\ h_k(x) + \sin(y - h_k(x)), & \text{если} \quad (x,\, y) \in \gamma_{x'} \bigcap D''. \end{cases}$$

Неблуждающее множество

График Ω-функции Ω^{Ψ_k} соответствующего косого произведения Ψ_k на цилиндре $S^1 \times [0, 1]$ есть глобальный хаотический аттрактор Ψ_k, который совпадает с замыканием множества $Per(\Psi_k)$ и с замкнутым множеством $\bigcup\limits_{(x', y) \in S^1 \times [0,1]} \omega_{\Psi_k}((x', y))$.



Литература

1. Ефремова Л.С., Динамика косых произведений отображений интервала, УМН 2017, т. 72, №1, сс. 107-192.
2. Efremova L. S., Small C^1-smooth perturbations of skew products and the partial integrability property, *AMNS*, 2020, vol. 5, pp. 317-328.
3. Efremova L. S., Geometrically integrable maps in the plane and their periodic orbits *LoJM*, 2021, vol. 42, pp. 2315-2324.
4. Efremova L. S., Simplest skew products on n-dimensional ($n \geqslant 2$) cells, cylinders and tori, *LoJM*, 2022, vol. 43, pp. 1598-1618.
5. Efremova L.S., Introduction to completely geometrically integrable maps in high dimensions, Mathematics, 2023, 11, 926.
6. Efremova L.S., Ramified continua as global attractors of C^1-smooth self-maps of a cylinder close to skew products *J. Difference Eq. and Appliq*, 2023, https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2204144.