

Аффинные однородные многообразия и подстроики (по совм. работе с И.В. Аржанцевым, arXiv: 2309.06170)

I Введение

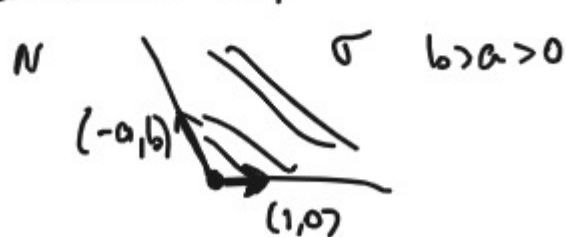
Однор. пр-во $\exists G \curvearrowright X$ транзит.
афф. гр. афф. мн.

Однор. мн-зие $\text{Aut}(X) \curvearrowright X$ транзит. ? A^2
афф. мн-зие

Цель: привести примеры афф. одн. мн-зий, не явл. однор. пр-вами

Замеч.: Есть примеры ториз. квазиафф. однор. мн-зий, не однор. пр-ва
афф. $A^k = (K^*)^k$

• [Arkusz '2012]



$$X_{a,b} \cong A^2 / \langle \zeta \rangle_b \quad \zeta \in \sqrt{1}$$

$$\zeta \cdot (x, y) = (\zeta^a x, \zeta y)$$

$X = X_{a,b} \setminus \text{особые точки}$
квазиафф. однор. мн-зие (Arkusz '22)

Однор. пр-во $\Leftrightarrow a=1$ Fl. Zm '2005 $\mathbb{C}^*$

II Гибкость и подстроики

$G_a = (K, +)$ $G_a \times X \rightarrow X \leadsto G_a$ -погр. в $\text{Aut}(X)$
 $\bar{K} = K, \text{char } K = 0$

$$S\text{Aut}(X) = \langle G_a\text{-погр.} \rangle \subseteq \text{Aut}(X)$$

$X^{\text{reg}} =$ мн-во гладких точек в X

Опр. $x \in X^{\text{reg}}$ — гибкая, если $T_x X = \langle \text{кас. к } G_a\text{-орб.} \rangle_{\text{через } x}$

X гибкая, если все точки из X^{reg} гибкие

Теорема (AFKKZ '13) Для афф. непр. мн-зие X счж:

а) X гибкая

б) $S\text{Aut}(X) \curvearrowright X^{\text{reg}}$ транзитивно

Если $\dim X \geq 2$, то

в) $S\text{Aut}(X) \curvearrowright X^{\text{reg}}$ беск. транзитивно

гибкость + гладкость $\Rightarrow$ однородность

Опр. Y — афф. мн-зие, $f \in K[Y] \setminus K$.

Надстройка $S_{\text{usp}}(Y, f) = \{u, v = f(y)\} \subseteq A^2 \times Y$
u, v y

Теорема (AKZ '12) Y неприв., афф., $\dim Y > 0$, гибкая $\Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{\text{usp}}(Y, f)$ гибкая

III) Гладкость конструкций

Теорема 1 $X = \text{Susp}(Y, f)$ огиба в т. $x = (u, v, y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \text{ огиба в т. } y \\ u=v=0 \end{cases} \text{ и } Z = \text{Spec } K[Y]/(f) \text{ огиба в т. } y \in Z$$

Сл-е 1 $X = \text{Susp}(Y, f)$ гладкое $\Leftrightarrow Y$ гладкое и $\text{Spec } K[Y]/(f)$ гладкое.

$$Y_1 = Y, \quad Y_2 = \text{Susp}(Y_1, f_1), \quad \dots, \quad Y_k = \text{Susp}(Y_{k-1}, f_{k-1})$$

итерированные конструкции

Сл-е 2 Y_k гладкое $\Leftrightarrow Y$ и все $Z_i = \text{Spec } K[Y_i]/(f_i)$ гладкие

Сл-е 3 Пусть Y - гладкое, ндвое, $\dim Y > 0$. Тогда Y_k оогор. мн-же $\Leftrightarrow$ все Z_i гладкие.

Пример: $Y_1 = A^2$ $Y_2 = SL_2 = \{ \det \begin{pmatrix} x & z \\ t & y \end{pmatrix} = 1 \}$
 $= \text{Susp}(A^2, xy - 1)$

$$Y_3 = \text{Susp}(Y_2, x^3z + yt^2) - \text{оогор. мн-же}$$

Сл-е 4 $X = \text{Susp}(A^n, f)$ $f = p_1 \dots p_k$
незав.

$$X \text{ оогор. мн-же} \Leftrightarrow \begin{cases} p_i \neq p_j & \forall i \neq j \\ \{p_i = 0\} \subseteq A^n \text{ гладкие и} \\ & \text{попарно не пересекаются.} \end{cases}$$

Пример: $\{x^2y + x + uv = 0\} \subseteq A^4$ - оогорное мн-же
 $\text{Susp}(A^2, -x(xy+1))$

Теорема 1 $X = \text{Susp}(Y, f)$ огиба в т. $x = (u, v, y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y \text{ огиба в т. } y \\ u=v=0 \end{cases} \text{ и } Z = \text{Spec } K[Y]/(f) \text{ огиба в т. } y \in Z$$

□ Лемма 1 $Y \subseteq A^d$, $I(Y) = (f_1, \dots, f_m) \subseteq K[A^d]$.
 $\hat{f} \in K[A^d]$ т.т.о $\hat{f}|_Y = f$, то
 $I(X) = (uv - \hat{f}, f_1, \dots, f_m) \subseteq K[A^{d+2}]$

▷ Како g -то, то $I \nparallel$ радикальный. Пусть $g^k \in I$, $g \in K[u, v, y_1, \dots, y_d]$.

$$u > v > y_1 > \dots > y_d \rightsquigarrow \boxed{g = (uv - \hat{f}) \cdot h + r} \quad (*)$$

Погт. $y \in Y$ $g(y) = (uv - \hat{f}(y)) \cdot h(y) + r(y)$ в $K[u, v]$
нет оогор. : uv

$$g^k(y) \in (uv - \hat{f}(y)) \text{ в } K[u, v]$$

$$g(y) \in \text{дод. степеней} \quad r(y) \Rightarrow r(y) = 0$$

$$\text{то } \forall y \in Y \Rightarrow r \in (f_1, \dots, f_m) \Rightarrow (*)$$

$$\mathcal{I}(Y) = (f_1, \dots, f_m)$$

$$\mathcal{I}(X) = (uv - f(y), f_1(y), \dots, f_m(y))$$

$$J_X(x) = \begin{pmatrix} v & u & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial f}{\partial y_d} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_d} \end{pmatrix} \begin{matrix} J_Z(y) \\ J_Y(y) \end{matrix}$$

$$\dim T_x X = d+2 - \text{rk } J_X(x) \quad \text{rk } J_X(x) \leq \text{rk } J_Y(y) + 1$$

$$\dim T_y Y = d - \text{rk } J_Y(y) \quad \rightarrow \quad \dim T_x X - 1 \geq \dim T_y Y$$

$$X \text{ regular} \Leftrightarrow u = v =$$

$$X \text{ особая} \Leftrightarrow u \neq v =$$

$$Y \text{ особая в } \tau \cdot y$$

$$u = v = 0$$

$$\dim T_y X = \dim T_y Y$$

$$Z \text{ особая в } \tau \cdot y. \quad \dim Y = \dim Z + 1$$

IV Поверхности

Теорема 2 $X = \{xz = f(y)\} \subseteq \mathbb{A}^3$ пов.-то данное уравнение

$$1) X \text{ остр. мн-ге} \Leftrightarrow \begin{cases} \deg f = 1 \\ n=1 \text{ и } f \text{ без кратных корней} \end{cases}$$

$$2) X \text{ остр. нр-во} \Leftrightarrow \begin{cases} \deg f = 1 \\ n=1, f \text{ без кратных корней,} \\ \deg f = 2 \end{cases}$$

Пример: $\{xz = y(y+1)(y+a)\} \subseteq \mathbb{A}^3$ - остр. мн-ге, $a \neq 0, 1$ не остр. нр-во

$$\square \deg f = 1 \quad \mathbb{A}^2$$

$$\deg f \geq 2, n \geq 1$$

Makar-Limanov'2001
отсутствие $\text{Aut}(X)$

$$\{z=0\} \subseteq X \text{ необр.} \Rightarrow X \text{ не остр.}$$

$$\boxed{n=1} \quad \{xz = f(y)\} = \text{Surp}(\mathbb{A}^1, f)$$

$$\text{Остр} \Leftrightarrow f \text{ без кр. корней}$$

$$\deg f = 2$$

$$X \cong \{xz = (y-1)(y+1)\} \cong \text{SL}_2 / T$$

$$\deg f \geq 3$$

$$\text{остр. мн-ге, но не остр. нр-во}$$

М.Х. Гизатуллин'71 - классиф. крив. квазиогнорок

отн. афф. группы

главн. афф. поверхности

В.А. Попов'73
не регуляр

отпр. орбита, гомог. констр.

$$\bullet \mathbb{A}^2$$

$$\deg f = 1$$

$$\bullet \mathbb{A}^1 \times \mathbb{K}^*$$

$$\bullet (\mathbb{K}^*)^2$$

Гизатуллин $\Rightarrow$ не факт. остр.

$$\bullet \text{SL}_2 / T$$

$$\deg f = 2$$

$$\bullet \text{SL}_2 / N$$

N - норм. Т в SL_2

$$\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^d$$

$$\text{Pic}(\text{SL}_2 / N) = \mathbb{Z}(N) = \mathbb{Z}_2$$

⑦ dim > 2

Теорема 3

$$X = \{ uv = \underbrace{p_0(y)}_{\text{переменное в } K[y]} \underbrace{p_1(y)}_{\text{незав.}} \dots p_d(y) \} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$$

$uv = \frac{y_1 \dots y_{n-1}}{y}$

1) $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}^d$

2) если $d > n$, то X — оград. мн-же, но не оград. нр-во

Пример

$$X = \{ uv = (x+y^2)(xy+y^3+1)(xy+y^3+2) \cdot (xy+y^3+3)(xy+y^3+4) \} \subseteq \mathbb{A}^4$$

разное

$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}^4$ $4 > 3 \Rightarrow$ оград. мн-же, но не оград. нр-во

□ 2) $\Leftarrow$ 1) + лемма

Лемма 2 X оград. нр-во $\Rightarrow \text{rk Pic}(X) \leq \dim X$

□ $X = G/H$
нр. об.

Б.А. Нохвицкий • М.О. $\text{Pic}(G) = 0$
 $G \cap X \subset \text{кон. эффом}$

• $\text{Pic}(X) = \mathcal{Z}(H)$

$H^0 = (T.S) \times H^4$
тор н/н

$\mathcal{Z}(H^0) \hookrightarrow \mathcal{Z}(T)$

$\mathcal{Z}(H) \xrightarrow{\text{кон. эфф.}} \Rightarrow \text{rk } \mathcal{Z}(H) \leq \dim T$

1) $X = \{ uv = y_1 p_1(y) \dots p_d(y) \} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

$h = \frac{u}{p_1(y) \dots p_d(y)} = \frac{y_1}{v} \in K(X)$

Рассм. $D = \{v = p_1 = 0\} \cup \dots \cup \{v = p_d = 0\}$

$U = X \setminus D$ $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ афф.} \\ \bullet K[u] \text{ порожд. } \underbrace{h, v, y_2, \dots, y_{n-1}}_{n \text{ нр.}} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$u = h p_1 \dots p_d$
 $y_1 = hv$

$\Rightarrow U = \mathbb{A}^n$

$\text{Pic}(X)$ свобод. порожд. идеалами $\{v = p_i = 0\}$
 $\cong \mathbb{Z}^d$
 $\cong \{p_i = 0\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ ■

Nagata

Lemma 3.3. If V is a non-singular affine variety and if W is a divisorial closed set of V , then $V - W$ is an affine variety.

For the proof, we refer to [1] and [2].

References

- [1] O. Zariski: *Interprétations algébriques-géométriques du quatorzième problème de Hilbert*, Bull. Sci. Math. 78 (1954), 155-168.
- [2] M. Nagata: *A treatise on the 14-th problem of Hilbert*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math. 30 (1956-57), 57-70; Addition and corrections, ibid. 197-200.