

Семинар лаборатории Чебышева "Сингулярные интегралы"
(Четверг, 11-00)

Псевдодифференциальные операторы
Д.М.Столяров

Рассмотрим оператор T_a , действие которого определяется формулой

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi,$$

где функция $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ — символ оператора T . Если функция a имеет вид $\sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, то T_a есть дифференциальный оператор. Оказывается, что достаточно наложить на функцию a некоторые условия роста, чтобы оператор T вел себя как дифференциальный оператор. В частности, определим класс S^m как множество операторов T_a , чьи символы удовлетворяют неравенствам

$$|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

Это просто обобщение понятия дифференциального оператора m -го порядка. В частности, композиция двух операторов T_a и T_b из классов S^m и S^n будет лежать в S^{m+n} , сопряженный к оператору класса S^m тоже лежит в классе S^m , оператор класса S^m действует из W_p^r в W_p^{r-m} , если $1 < p < \infty$, классы S^m также в некотором смысле инвариантны относительно гладких замен переменных. В частности, последнее свойство позволяет определять псевдодифференциальные операторы на гладких многообразиях. Однако, нас будут больше интересовать первые три свойства. В частности, третье является следствием того, что оператор класса S^0 является сингулярным интегральным оператором (с несимметричным ядром), стало быть, действует из L^p в L^p при $p \in (1, 2]$.