Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 8. Вполне положительные отображения

Теретёнков Александр Евгеньевич

31 октября 2023 г.

Вполне положительные отображения

Вполне положительность в более явном виде:

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{\forall \geqslant 0} = \begin{pmatrix} \Phi(A_{11}) & \cdots & \Phi(A_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(A_{n1}) & \cdots & \Phi(A_{nn}) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Вполне положительные отображения

Иногда также вводят k-положительное отображения:

Отображение называется k-**положительным**, если отображение

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2} : \mathbb{C}^{nk \times nk} \to \mathbb{C}^{nk \times nk}$$

положительно.

Вполне положительные отображения

Отображение сохраняет след, если

$$\operatorname{Tr} \Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Сохраняющее след вполне положительное отображение называется **квантовым каналом** (в представлении Шредингера). Отметим, что если Φ сохраняет след, то и $\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ сохраняет след.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.
Условие нормировки выделяющее стохастической матрицы $e^T Pp = e^T p$ аналогично условию сохранению следа. Поэтому квантовые каналы являются аналогами стохастических матриц (классических каналов).

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Доказательство:

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} I^\dagger \Phi(X) = \operatorname{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$
Доказательство:

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} I^\dagger \Phi(X) = \operatorname{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$
Поэтому можно говорить, что унитальное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$
Доказательство:

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} I^\dagger \Phi(X) = \operatorname{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$
Поэтому можно говорить, что унитальное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.
В классике, аналогом этого утверждения была возможность переписать условие нормировки как $P^T e = e$.

Вполне положительные отображения

Вполне положительное отображение, которое одновременно сохраняет след и унитально, часто называют **бистохастическим** каналом (иногда унитальным), так как оно аналогично бистохастическим матрицам $Pe = e, P^T e = e$.

Соответствие Чоя-Ямилковского

Максимально сцепленное состояние в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |j\rangle \otimes |j\rangle$$

$$|\Omega\rangle\langle\Omega| = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Соответствие (иногда говорят изоморфизм) Чоя-Ямилковского:
Каждому линейному отображению $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$
сопоставим $n^2 \times n^2$-матрицу

$$\rho_\Phi = \Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(|\Omega\rangle\langle\Omega|).$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Упражнение. Соответствие Чоя-Ямилковского является обратимым. Обратное соответствие задаётся формулой

$$\Phi(X) = n \operatorname{Tr}_R \rho_\Phi (I_n \otimes X^T)$$

X^T — транспонирование в базисе $|j\rangle$.

Соответствие Чоя-Ямилковского

Если Φ — квантовый канал, то ρ_Φ является матрицей плотности.

Доказательство: В силу вполне положительности

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(|\Omega\rangle\langle\Omega|) \geqslant 0.$$

В силу сохранения нормировки ρ_Φ — матрица плотности. $\square$

Представление Крауса

Утверждение. Φ — канал тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger, \qquad \sum_{l=1}^{n'} W_l^\dagger W_l = I_n.$$

(минимальное число членов будем называть крауссовским рангом $W - \mathrm{rank}\Phi$).

Представление Крауса

Доказательство: Произвольную матрицу плотности можно представить в виде

$$\rho_\Phi = \sum_{l=1}^{n'} |w_l\rangle\langle w_l|, \qquad n' \leqslant n^2, \qquad |w_l\rangle \in \mathbb{C}^{n^2},$$

где $\min n' = \operatorname{rank} \rho_\Phi$. В частности всегда можно выбрать $\langle w_l | w_k \rangle = ||w_l||^2 \delta_{lk}$.
Введём матрицы $W_l \in \mathbb{C}^{n \times n}$ по формуле

$$\langle k | W_l | i \rangle = \sqrt{n} \langle k \otimes i | w_l \rangle$$

Представление Крауса

Так как $\langle k \otimes i|\rho_\Phi|m \otimes j\rangle = \frac{1}{n}\langle k|\Phi(|i\rangle\langle j|)|m\rangle$, то

$$\sum_{l=1}^{n'} \langle k \otimes i|w_l\rangle\langle w_l|m \otimes j\rangle = \frac{1}{n}\langle k|\Phi(|i\rangle\langle j|)|m\rangle$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n'} \langle k|W_l|i\rangle\langle j|W_l^\dagger|m\rangle = \frac{1}{n}\langle k|\Phi(|i\rangle\langle j|)|m\rangle$$

$$\sum_{l=1}^{n'}\sum_{i,j} \langle k|W_l|i\rangle\langle i|\rho|j\rangle\langle j|W_l^\dagger|m\rangle = \langle k|\Phi(\rho)|m\rangle$$

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger = \Phi(\rho)$$

Представление Крауса

Сохранение следа

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l^\dagger W_l = I_n$$

Представление Крауса

Наоборот, если

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^{\dagger},$$

то для $X \geqslant 0$

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(X) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \otimes I_n X (W_l \otimes I_n)^{\dagger} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n'} \sum_{x} W_l \otimes I_n |x\rangle\langle x| (W_l \otimes I_n)^{\dagger} \geqslant 0 \quad \square$$

Представление Крауса

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{n'} \end{pmatrix}$$

— матрица из n ортонормированных векторов (репер) в $k = n \times n'$-мерном пространстве. Множество таких ортонормированных наборов называется (комплексным) многообразием Штифеля при фиксированных n и k.

$$\begin{pmatrix} W_1^\dagger & \cdots & W_{n'}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{n'} \end{pmatrix} = I_n$$

Представление Крауса

Унитальность

$$\sum_{l=1}^{n'} W_l W_l^\dagger = I_n$$

Представление Крауса

Разложение Краусса в ортонормированном базисе

$$W_l = \sum_{i=1}^{n^2} F_i \operatorname{Tr}(F_i^+ W_l), \qquad \operatorname{Tr} F_i^+ F_j = \delta_{ij}$$

$$\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{n'} W_l \rho W_l^\dagger = \sum_{i,j=1}^{n^2} \underbrace{\sum_{l=1}^{n'} \operatorname{Tr}(F_i^+ W_l) \overline{\operatorname{Tr}(F_j^+ W_l)}}_{C_{ij}} F_i \rho F_j^\dagger$$

$$C \geqslant 0$$

Сводная таблица для представления Чоя-Ямилковского

$\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$	$\rho_\Phi : \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
$\Phi(X^\dagger) = \Phi(X)^\dagger$	$\rho_\Phi^\dagger = \rho_\Phi$
$\operatorname{tr}\Phi(\rho) = \operatorname{tr}\rho$	$\operatorname{Tr}_R \rho_\Phi = \frac{I_n}{n}$
$\Phi(I) = I$	$\operatorname{Tr}_S \rho_\Phi = \frac{I_n}{n}$
$(\Phi \otimes I_n)(X) \geqslant 0, \forall X \geqslant 0$	$\rho_\Phi \geqslant 0$
$(\Phi \otimes I_k)(X) \geqslant 0, \forall X \geqslant 0, k \leqslant n$	$\langle\psi\|\rho_\Phi\|\psi\rangle \geqslant 0, S-\operatorname{rank}(\|\psi\rangle) = k$
$\Phi(\rho) = \sum_l W_l \rho W_l^\dagger$	$\rho_\Phi = \sum_l \|w_l\rangle\langle w_l\|$
$W-\operatorname{rank}\Phi$	$\operatorname{rank}\rho_\Phi$
$\operatorname{tr} F_l^\dagger F_k = \delta_{lk}$	$\langle\varphi_l\|\varphi_k\rangle = \delta_{lk}$
$\Phi(\rho) = \sum_{lk} C_{lk} F_l \rho F_k^\dagger$	$\rho_\Phi = \sum_{lk} C_{lk}\|\varphi_l\rangle\langle\varphi_k\|$

$S-\operatorname{rank}(|\psi\rangle) \equiv \operatorname{rank}\operatorname{Tr}_R |\psi\rangle\langle\psi|$ — ранк Шмидта.

Представление Стайнспринга

Резервуар $R' = \mathbb{C}^{n'}$

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_{R'}\, U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger$$

$$(U|i \otimes 1\rangle = \sum_{l=1}^{n'} W_l |i \otimes l\rangle)$$

Достроим набор ортонормированных векторов до ортонормированного базиса

$$U = \begin{pmatrix} W_1 & \ldots \\ \vdots & \\ W_{n'} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \begin{pmatrix} W_1 \rho W_1^\dagger & \ldots & \\ \vdots & & \\ W_{n'} \rho W_1^\dagger & \ldots & W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger \end{pmatrix}$$