Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 9. Примеры вполне положительных отображений. Матричная полугруппа

Теретёнков Александр Евгеньевич

22 ноября 2022 г.

В прошлой серии...

Представление Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_{R'}\, U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger$$

$$(U|i \otimes 1\rangle = \sum_{l=1}^{n'} W_l|i \otimes l\rangle)$$

Достроим набор ортонормированных векторов до ортонормированного базиса

$$U = \begin{pmatrix} W_1 & \dots \\ \vdots & \\ W_{n'} & \dots \end{pmatrix}$$

$$U(\rho \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \begin{pmatrix} W_1 \rho W_1^\dagger & \dots & \\ \vdots & & \\ W_{n'} \rho W_1^\dagger & \dots & W_{n'} \rho W_{n'}^\dagger \end{pmatrix}$$

Примеры вполне положительных отображений

Унитарное отображение U_i с вероятностью p_i, тогда

$$\Phi(\rho) = \mathbb{E} U \rho U^\dagger = \sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger$$

Φ — унитальный канал. $(W_i = \sqrt{p_i} U_i)$

Примеры вполне положительных отображений

Упражнение. Пусть

$$\Phi(\rho) = \sum_{ij} P_{ij} |i\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle i|,$$

тогда вполне-положительное, если P матрица с неотрицательными коэффициентами, квантовый канал, если P — стохастическая, унитальный канал, если P — бистохастическая.

Условные математические ожидания

Вполне положительный идемпотент $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ называется условным математическим ожиданием.

Примеры:

1. $$\mathcal{P}\rho = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$
   Π_x — ортогональное разложение единицы.
2. $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$
   $$\mathcal{P}\rho = \mathrm{Tr}_R\, \rho \otimes \rho_\beta$$

Наблюдаемые

Чёткие наблюдаемые:
Пусть $X^\dagger = X$ — чёткая наблюдаемая

$$X = \sum_x x\Pi_x, \qquad \Pi_x\Pi_y = \delta_{xy}\Pi_x$$

Заметим, что отображения

$$\Phi_x(\rho) = \Pi_x\rho\Pi_x$$

являются вполне положительными и $\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho) \leqslant \operatorname{Tr}\rho$, а

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Pi_x\rho\Pi_x$$

является каналом.
(В частности, $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{-iXt}\rho e^{iXt}dt = \sum_x \Pi_x\rho\Pi_x$.)

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:

В общем случае такое семейство ($\mathrm{Tr}\,\Phi_x(\rho) \leqslant \mathrm{Tr}\,\rho$) вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\mathrm{Tr}\,\Phi_x(\rho)$$

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:
В общем случае такое семейство $(\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho) \leqslant \operatorname{Tr} \rho)$ вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)}$$

Наблюдаемые

Нечётные наблюдаемые:
В общем случае такое семейство $(\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho) \leqslant \operatorname{Tr} \rho)$ вполне положительных отображений Φ_x называется (неидеальным) инструментом. Который получает значение x нечёткой наблюдаемой с вероятностью

$$\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)$$

В результате селективного измерения мы получаем систему в состоянии

$$\frac{\Phi_x(\rho)}{\operatorname{Tr} \Phi_x(\rho)}$$

В результате неселективного в состояинии

$$\Phi(\rho) = \sum_x \Phi_x(\rho)$$

Наблюдаемые

Отметим, что вероятности $\operatorname{Tr}\Phi_x(\rho) = \operatorname{Tr}\Phi_x^*(I_n)\rho$ зависят от величины $M_x = \Phi_x^*(I_n)$, поэтому обычно говорят, что M_x задают (нечёткую) наблюдаемую (разложение единицы $\sum_x M_x = I$, $M_x = M_x^\dagger \geqslant 0$).
Одна и та же наблюдаемая может быть измерена различными инструментами, приводящими к различным апостериорным состояниям.

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geqslant \cdots \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_S\, X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}}(\ldots X^{(1)} \Phi_{t_1}(X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \ldots) Y^{(N)}$$

Переобозначим

$$\mathcal{C}^{(k)}(\rho) = X^{(k)} \rho Y^{(k)}$$

Тогда можно переписать в виде

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_S\, \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

С другой стороны, если бы мы считали соответствующее среднее мы считали в случае унитарной динамики $\mathcal{U}_t$ системы и резервуара:

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R$$

$$\mathrm{Tr}_S\, \mathcal{C}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{C}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{C}^{(0)} \rho =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{C}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{C}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} (\mathcal{C}^{(0)} \otimes I_R) \rho \otimes \rho_R$$

Упражнение. Эквивалентно, для любых вполне положительных отображений $\mathcal{E}^{(k)}$

$$\mathrm{Tr}_S\, \mathcal{E}^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \ldots \mathcal{E}^{(1)} \Phi_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho =$$
$$= \mathrm{Tr}_{S+R} (\mathcal{E}^{(N)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_N - t_{N-1}} \ldots (\mathcal{E}^{(1)} \otimes I_R) \mathcal{U}_{t_1} \mathcal{E}^{(0)} \rho \otimes \rho_R$$

Другая форма квантовой регрессионной теоремы

В результате можно сказать, что совместное распределение вероятностей для показаний инструментов $\mathcal{E}^{(k)}_{x_k}$, если они провели измерение в момент времени t_k, имеет вид

$$\mathrm{Tr}_S\, \mathcal{E}^{(N)}_{x_N} \Phi_{t_N - t_{N-1}} \dots \mathcal{E}^{(1)}_{x_1} \Phi_{t_1} \mathcal{E}^{(0)}_{x_0} \rho$$

Вполне положительная полугруппа

Определение. Семейство отображений $\Phi_t : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall t \geqslant 0$ — (однопарамтерическая) вполне положительная непрерывная (сохраняющая след) полугруппа:

1. $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \geqslant 0$, $\Phi_0 = I$.
2. Φ_t — непрерывна $\forall t \geqslant 0$ (достаточно непрерывности $t \to +0$).
3. Φ_t — вполне положительные, сохраняющее след $\forall t \geqslant 0$.

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).
Доказательство:

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_s ds = \Phi_0 = I$$

Обозначим

$$M_t = \int_0^t \Phi_s ds$$

Тогда

$$M_t = tI + o(t), \qquad t \to +0$$
$$\det M_t = t^n + o(t^n), \qquad t \to +0$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall t < \delta(\varepsilon) \qquad |\det M_t - t^n| < \varepsilon t^n$$

Так как круг

$$z : |z - t^n| < \frac{1}{2} t^n$$

не содержит точки $z = 0$, то полагая $t_1 = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2})$, получим

$$\det M_{t_1} \neq 0.$$

$$\Rightarrow \exists t_1 > 0 : M_{t_1} \text{— обратима}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\Phi_s = M_{t_1}^{-1} M_{t_1} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_s ds \Phi_t =$$
$$= M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_{s+t} dt = M_{t_1}^{-1} \int_s^{s+t_1} \Phi_t dt =$$
$$= M_{t_1}^{-1} (M_{s+t_1} - M_s)$$

В правой части стоят функции дифференцируемые по s, что гарантирует дифференцируемость Φ_s

$$\frac{d}{ds} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} (\Phi_{s+t_1} - \Phi_s) = \underbrace{M_{t_1}^{-1} (\Phi_{t_1} - I)}_{\mathcal{L}} \Phi_s \quad \square$$