

1 Конформный модуль области

Определение 1

Конформным модулем двусвязной области D будем называть экстремальную длину семейства кривых, соединяющих граничные компоненты этой области:

$$\lambda(\Gamma):=\sup_{\rho}\frac{L^2(\rho)}{A(\rho)}.$$

Здесь Γ — семейство кривых, соединяющих граничные компоненты в D , $\rho(x,y)$ — метрика,
 $L_{\gamma}(\rho)=\int_{\gamma}\rho(z)|dz|$ — обобщенная длина кривой семейства Γ ,
 $L(\rho):=\inf_{\gamma\in\Gamma}L_{\gamma}(\rho)=:$ — «длина самой короткой кривой» семейства Γ ,
 $A(\rho)=\iint_D\rho^2(z)dxdy$ — обобщенная площадь области D .

2 История вопроса

- 1 g — квазиконформное отображение с коэффициентом K , тогда $\frac{1}{K}m(D)\leq m(g(D))\leq K\cdot m(D)$;
- 2 М. Vuorinen: $f(x+iy)=Hx+iy, H\rightarrow\infty. \quad m(f(D))\sim?$

■ Nasyrov, S. R. Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames/ S. R. Nasyrov// Computational Methods and Function Theory. – vol. 15-1, 2015. – pp. 59–74

■ Dubinin, V.N. Some unsolved problems about condenser capacities on the plane. In: Agranovsky, M., Golberg, A., Jacobzon, F., Shoikhet, D., Zalcman, L. (eds) Complex Analysis and Dynamical Systems. Trends in Mathematics. – Birkhäuser, Cham. – 2018. – pp. 81-92

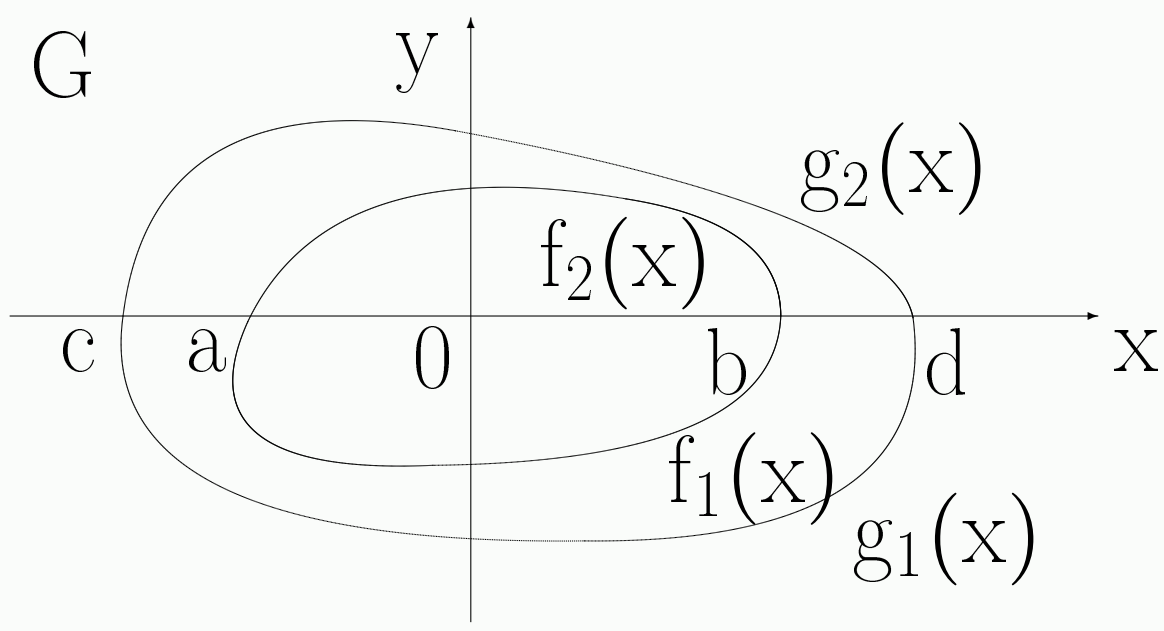
3 Асимптотика модуля двусвязной области достаточно произвольного вида

Будем говорить, что двусвязные области G , вообще говоря, не симметричные относительно оси абсцисс, принадлежат классу $\mathcal{A}$, если границы G удовлетворяют следующим условиям: $\partial G=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где

$$\Gamma_1=\{x+iy:y=f_1(x),a\leq x\leq b\}\cup\{x+iy:y=f_2(x),a\leq x\leq b\},$$
$$\Gamma_2=\{x+iy:y=g_1(x),c\leq x\leq d\}\cup\{x+iy:y=g_2(x),c\leq x\leq d\},$$

причем:

- 1 $-\infty< c < a < b < d < \infty$;
- 2 $g_1(x)< f_1(x)$, и $f_2(x)< g_2(x)$,
 $c\leq x\leq d$;
- 3 $g_2(x)< g_1(x)$, $c < x < d$;
- 4 $f_2(x)< f_1(x)$, $a < x < b$;
- 5 $f_2(a)=f_1(a)$, $f_2(b)=f_1(b)$,
 $g_2(c)=g_1(c)$, $g_2(d)=g_1(d)$.



4 Теорема 1

Пусть G — двусвязная область из класса $\mathcal{A}$, и область $G_H=F_H(G)$, где F_H — растяжение области G вдоль оси OX . Тогда при $H\rightarrow\infty$

$$m(G_H)\sim\frac{1}{(c_1+c_2)H},\quad c_1=\int_a^b\frac{dx}{f_1(x)-g_1(x)},\quad c_2=\int_a^b\frac{dx}{g_2(x)-f_2(x)}.$$

- Dautova, D. N. Asymptotics of the Modules of Mirror Symmetric Doubly Connected Domains under Stretching/ D. N. Dautova, S. R. Nasyrov// Mathematical Notes. – 2018. – Vol. 103-4. – PP. 537–549
- Dautova D. N. Asymptotics of Conformal Module of Nonsymmetric Doubly Connected Domain under Unbounded Stretching Along the Real Axis / D. Dautova, S. Nasyrov // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2019. - V. 40. - Iss. 9. - P. 1268-1274

5 Примеры

1 Концентрическое круговое кольцо.

Если $D=\{z\in\mathbb{C}:r<|z|<R\}$, то

$$m(D_H)\sim\frac{1}{\alpha H},\quad H\rightarrow\infty,\quad\text{где}$$
$$\alpha=\frac{1}{R^2-r^2}\left(\pi r^2+2R^2\arcsin\frac{r}{R}+2r\sqrt{R^2-r^2}\right),$$

2 Ромбовидное окно.

Если $D_H=\{(x,y)\mid 1<|x/H|+|y|<k\}$, то справедлива оценка

$$\frac{k-1}{4H}-\frac{\ln 2}{2\pi}\cdot\frac{(k-1)^2}{H^2}+O\left(\frac{1}{H^3}\right)\leq m(D_H)\leq\frac{k-1}{4H},\quad H\rightarrow\infty.$$

6 Интеграл Дирихле и некоторые его свойства

Рассмотрим жорданову область Ω . Пусть u — вещественнозначная функция, $u\in C(\bar{\Omega})\cap W_1(\Omega)$, т.е. u непрерывна в $\bar{\Omega}$ и принадлежит пространству Соболева $W_1(\Omega)$.

Определение 2

Функционал

$$D_{\Omega}[u]:=\int_{\Omega}|\operatorname{grad}u|^2dxdy=\int_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

называется интегралом Дирихле функции u по области Ω .

Теорема 1 (Принцип Дирихле)

Пусть граница γ области Ω , состоит из жордановых кривых, u — функция, непрерывная в $\Omega+\gamma$, кусочно-гладкая в Ω и интеграл Дирихле $D_{\Omega}[u]$ — конечная величина. Рассмотрим класс всех функций v , удовлетворяющих условиям:

- 1) v непрерывны в $\Omega+\gamma$,
- 2) v кусочно-гладкие в Ω
- 3) v принимают на γ те же граничные значения $\bar{u}$, что и функция u .

Тогда задача отыскания функции v , для которой выполняется

$d=\min_vD_{\Omega}[v]$, имеет единственное решение $v=w$. Функция w решает

граничную задачу для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ и заданных на γ граничных значений $\bar{u}$.

Теорема 2 (Вариационное свойство конформного модуля)

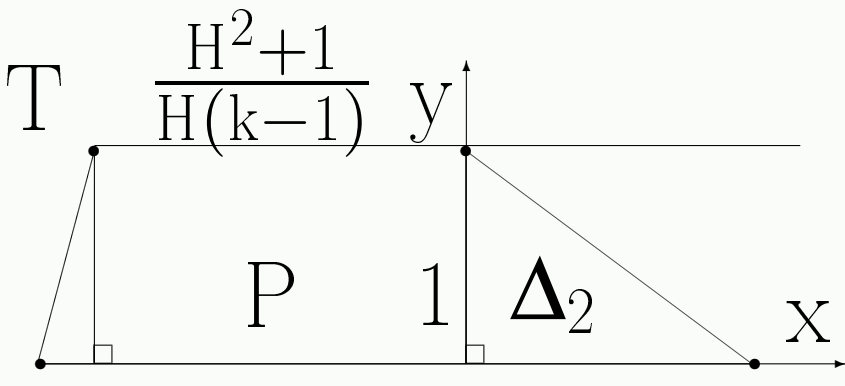
Рассмотрим четырехсторонник $Q:=\{\Omega;z_1,z_2,z_3,z_4\}$. Пусть K — класс действительзначных функций, непрерывных в $\bar{\Omega}$, принимающих граничные значения $u=0$ и $u=1$ на участках границы (z_1,z_2) и (z_3,z_4) соответственно, лежащих в пространстве Соболева $W_1(\Omega)$. Пусть v — решение краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u=0$, когда граничные значения на (z_1,z_2) и (z_3,z_4) равны $v_1=0$, $v_2=1$. Тогда $\frac{1}{m(Q)}=\min_{u\in K}D_{\Omega}[u]=D_{\Omega}[v]$.

7 Пример: трапеция T

Как показано у

- Papamichael, N. Numerical Conformal Mapping : Domain Decomposition and the Mapping of Quadrilaterals. / N. Papamichael, N. Stylianopoulos. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. – 242 p., выполняется

$$\frac{H^2+1}{H(k-1)}\leq m(T)\leq\frac{H^2+1}{H(k-1)}+\frac{\ln 4}{\pi}\quad (1)$$



Хотим получить оценку, аналогичную (1), используя свойства интеграла $D_{\Omega}[u]$.

$$\frac{1}{m(P)}\leq\frac{1}{m(T)}\leq D_{P+\Delta_1+\Delta_2}[u]=D_P[u]+D_{\Delta_1}[u]+D_{\Delta_2}[u]=$$
$$=\frac{1}{m(P)}+D_{\Delta_1}[u]+D_{\Delta_2}[u].$$

Здесь $u=y$, $(x;y)\in P$, $u=y\cdot\varphi(x), (x;y)\in\Delta_1,\Delta_2$.

$$D_{\Delta_2}[u]=\iint_{\Delta_2}|\operatorname{grad}(y\cdot\varphi(x))|^2dxdy=\int_0^{+\infty}\left(\varphi^2(x)+\frac{(\varphi'(x))^2}{3}\right)dx;$$
$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\varphi'(x)\right)+2\varphi(x)=0;\quad\varphi(x)=c_1e^{\sqrt{3}x}+c_2e^{-\sqrt{3}x};$$

$$D_{\Delta_2}[u]=\iint_{\Delta_2}|\operatorname{grad}(y\cdot e^{-\sqrt{3}x})|^2dxdy=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{H(k-1)}{H^2+1}=\frac{1}{m(P)}\leq\frac{1}{m(T)}\leq\frac{1}{m(P)}+D_{\Delta_1}[u]+D_{\Delta_2}[u]\rightarrow\frac{H(k-1)}{H^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

8 Список литературы

- Nasyrov, S.R. Asymptotics of the Conformal Modulus of Unbounded Symmetric Doubly Connected Domain Under Stretching/S.R. Nasyrov, V.G. Nguyen// Lobachevskii J Math. –vol. 42, 2021. – pp. 2895–2904
- Насыров С. Р. Асимптотика внешнего конформного модуля четырехсторонника при его растяжении/ С. Р. Насыров, В. З. Нгуен// Изв. вузов. Матем. – № 5, 2023. – с. 89–95
- Прилепкина Е. Г. О конформной емкости пространственного конденсатора с шаровыми пластинами/ Е.Г. прилепкина// Дальневост. матем. журн. –№ 22:1, 2022. – с. 76–83
- Дубинин В. Н. Асимптотика емкости конденсатора с переменными уровнями потенциала/ В.Н. Дубинин// Сиб. матем. журн. – № 61:4, 2020 – с. 796–802
- Dyutin A. Yu. Asymptotics of the Exterior Conformal Modulus of a Symmetric Quadrilateral under Stretching Map./ A. Yu. Dyutin, G.V. Nguyen// Lobachevskii J Math. – vol. 44, 2023. – pp. 1289–1298
- Nasyrov S. Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection/ S. Nasyrov, T. Sugawa, M. Vuorinen// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – vol. 524. – I. 2, 2023