Семейства конформных отображений двусвязных многоугольных областей

Дютин Андрей Юрьевич

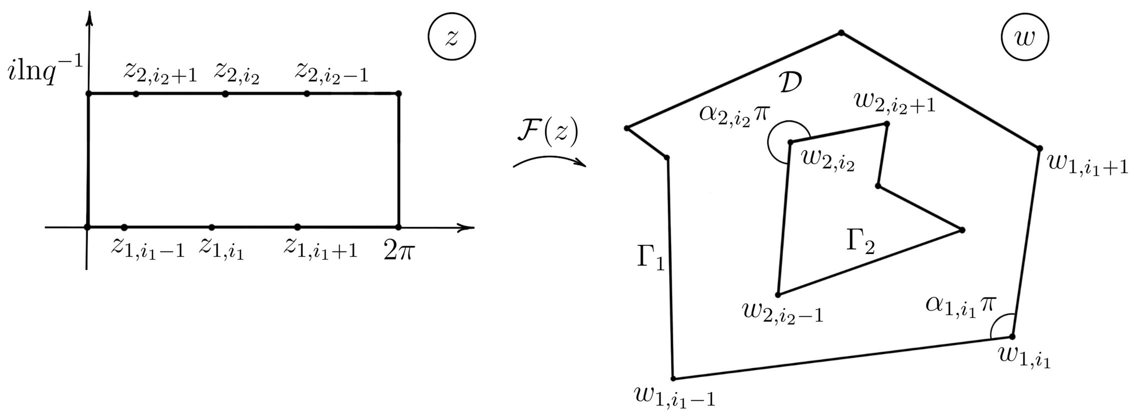
Казанский федеральный УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Предлагается приближённый метод нахождения конформного отображения концентрического кольца на произвольную ограниченную двусвязную многоугольную область. Этот метод основан на идеях, связанных с параметрическим методом Левнера–Комацу (см. подр. [1]). Рассматриваются гладкие однопараметрические семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ концентрических колец на двусвязные многоугольные области $\mathcal{D}(t)$, которые получаются из фиксированной двусвязной многоугольной области $\mathcal{D}$ проведением конечного числа прямолинейных или в общем случае полигональных разрезов переменной длины.

1. Интегральное представление

Рассмотрим конформное отображение $w = \mathcal{G}(\tau)$ кольца $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на двусвязную область $\mathcal{D}$ в $\mathbb{C}$, внешней граничной компонентой которой является n_1–звенная ломаная Γ_1 с вершинами в точках w_{1,i_1}, $1 \le i_1 \le n_1$, а внутренней — n_2–звенная ломаная Γ_2 с вершинами в точках w_{2,i_2}, $1 \le i_2 \le n_2$. Обозначим через $\alpha_{1,i_1}\pi$ и $\alpha_{2,i_2}\pi$ внутренние углы области $\mathcal{D}$ при соответствующих вершинах w_{1,i_1} и w_{2,i_2}.

С помощью экспоненциального отображения $\tau(z) = e^{iz}$, мы можем рассмотреть отображение $\mathcal{F}(z) = \mathcal{G}(e^{iz})$ из горизонтальной полосы $\{0 < \operatorname{Im} z < \ln q^{-1}\}$ на $\mathcal{D}$. Оно конформно отображает прямоугольник $[0, 2\pi] \times (0, \ln q^{-1})$ с отождествлёнными вертикальными сторонами на $\mathcal{D}$.



Функция $\mathcal{F}$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Im} z < \ln q^{-1}$ и является в ней 2π-периодической функцией. На плоскости z рассмотрим прообразы вершин $z_{1,i_1} \in [0, 2\pi]$ и $z_{2,i_2} = x_{2,i_2} + i \ln q^{-1} \in [i \ln q^{-1}, 2\pi + i \ln q^{-1}]$ области $\mathcal{D}$.

Будем искать интегральное представление этого отображения, используя эллиптические функции Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = 2\pi$ и $\omega_2 = 2i \ln q^{-1}$.

Функция $\mathcal{F}$, отображающая кольцо $\mathcal{A} = \{\tau : q < |\tau| < 1\}$ на двусвязную многоугольную область $\mathcal{D}$, имеет вид

$$\mathcal{F}(z) = C_1 \int_0^z \exp\{c\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}) \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2})\, d\xi + C_2\,, \tag{1}$$

где $z = -i \ln \tau$. В (1) точки z_{1,i_1} и z_{2,i_2} – это прообразы вершин области $\mathcal{D}$, константа c имеет вид

$$c = \frac{\eta_1}{\omega_1}\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1)\, z_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1)\, x_{2,i_2}\right) + \eta_2\,. \tag{2}$$

а $C_1 \ne 0$ и C_2 — это некоторые комплексные константы.

Конформное отображение $\mathcal{F}$ может быть записано с помощью тета-функций Якоби:

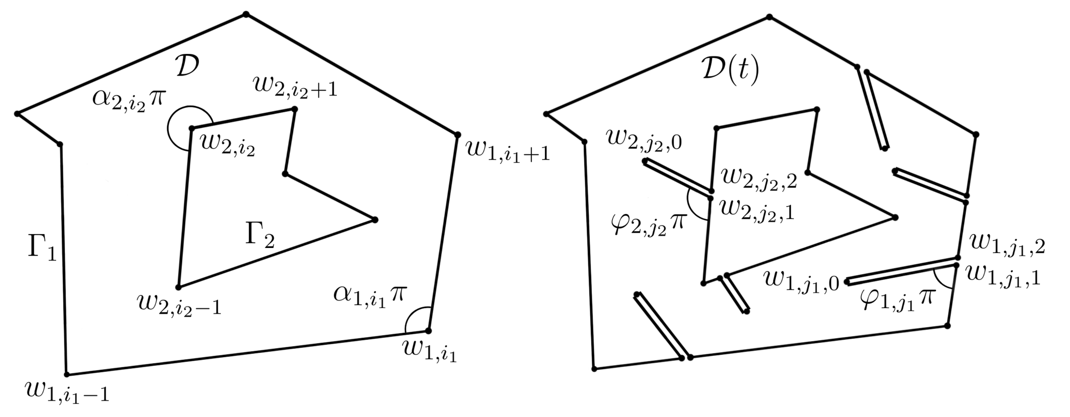
$$\mathcal{F}(z) = C_1' \int_0^z \exp\left\{\left(-\eta_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \eta_2\right)\xi\right\} \times$$
$$\times \prod_{i_1=1}^{n_1} \vartheta_1^{\alpha_{1,i_1}-1}\left(\frac{\xi - z_{1,i_1}}{\omega_1}\right) \prod_{i_2=1}^{n_2} \vartheta_1^{\alpha_{2,i_2}-1}\left(\frac{\xi - z_{2,i_2}}{\omega_1}\right) d\xi + C_2\,. \tag{3}$$

Формулы (1) и (3) представляют собой варианты формул Ахиезера и Голузина (см. [2] и [3]).

2. Семейства конформных отображений

Рассмотрим семейство двусвязных областей $\mathcal{D}(t)$, получаемых из фиксированной двусвязной области $\mathcal{D}$, ограниченной двумя замкнутыми ломаными, проведением нескольких прямолинейных попарно непересекающихся разрезов внутрь области и исходящих из её границы. Будем считать, что концевые точки разрезов являются гладкими функциями от вещественного параметра t, изменяющегося на числовом промежутке.

Пусть из попарно различных точек граничной компоненты Γ_1 выходят m_1 разрезов под углами $\varphi_{1,j_1}\pi$, $1 \le j_1 \le m_1$, а из Γ_2 — m_2 разрезов под углами $\varphi_{2,j_2}\pi$, $1 \le j_2 \le m_2$. Обозначим через $z_{1,j_1,0}(t) \in [0, \omega_1]$ – прообразы концов разрезов, выходящих из точек Γ_1, $z_{2,j_2,0}(t) = x_{2,j_2,0}(t) + \omega_2(t)/2 \in [\omega_2(t)/2, \omega_1 + \omega_2(t)/2]$ – прообразы концов разрезов, выходящих из точек Γ_2. Через $z_{1,j_1,1}(t)$ и $z_{1,j_1,2}(t)$ обозначим прообразы новых угловых точек внешней граничной компоненты с внутренними углами $\varphi_{1,j_1}\pi$ и $(1-\varphi_{1,j_1})\pi$ соответственно, а через $z_{2,j_2,1}(t)$ и $z_{2,j_2,2}(t)$ обозначим прообразы новых угловых точек внутренней граничной компоненты с внутренними углами $\varphi_{2,j_2}\pi$ и $(1 - \varphi_{2,j_2})\pi$ соответственно.



Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство конформных отображений

$$\mathcal{F}(z,t) = C_1(t) \int_0^z \exp\{c(t)\,\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}(t)) \times$$
$$\times \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2}(t)) \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(\xi,t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(\xi,t)\, d\xi + C_2\,, \tag{4}$$

где

$$s_{1,j_1}(z,t) = \sigma(z - z_{1,j_1,0}(t))\, \sigma^{\varphi_{1,j_1}-1}(z - z_{1,j_1,1}(t))\, \sigma^{-\varphi_{1,j_1}}(z - z_{1,j_1,2}(t))\,,$$
$$s_{2,j_2}(z,t) = \sigma(z - z_{2,j_2,0}(t))\, \sigma^{\varphi_{2,j_2}-1}(z - z_{2,j_2,1}(t))\, \sigma^{-\varphi_{2,j_2}}(z - z_{2,j_2,2}(t))\,,$$

$$c(t) = \frac{\eta_1(t)}{\omega_1}\Bigg[\sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1)\, z_{1,i_1}(t) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1)\, x_{2,i_2}(t) +$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{m_1} \Big(z_{1,j_1,0}(t) + (\varphi_{1,j_1} - 1)\, z_{1,j_1,1}(t) - \varphi_{1,j_1}\, z_{1,j_1,2}(t)\Big) +$$
$$+ \sum_{j_2=1}^{m_2} \Big(x_{2,j_2,0}(t) + (\varphi_{2,j_2} - 1)\, x_{2,j_2,1}(t) - \varphi_{2,j_2}\, x_{2,j_2,2}(t)\Big)\Bigg] + \eta_2(t)\,.$$

Здесь $\sigma(z) = \sigma(z;\, \omega_1, \omega_2(t))$, $\eta_1(t) = 2\zeta(\omega_1/2;\, \omega_1, \omega_2(t))$ и $\eta_2(t) = 2\zeta(\omega_2(t)/2;\, \omega_1, \omega_2(t))$. Конформный модуль области $\mathcal{D}(t)$ равен

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{D}(t)) = \frac{\omega_2(t)}{2\omega_1 i}\,.$$

3. Основной результат

Гладкое семейство $\mathcal{F}(z,t)$ конформных отображений (4) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\dot{\mathcal{F}}(z,t)}{\mathcal{F}'(z,t)} = \mathcal{H}(z,t)\,, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{H}(z,t) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t)\, \mathcal{K}_{1,j_1}(z,t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\, \mathcal{K}_{2,j_2}(z,t)\,. \tag{6}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_{k,\ell_k}(t) := \frac{\dot{\mathcal{E}}_{k,\ell_k}(t)}{\mathcal{F}''\Big(z_{k,\ell_k,0}(t), t\Big)}\,,$$

$$\mathcal{K}_{k,j_k}(z,t) = \zeta(z - z_{k,j_k,0}(t)) - \frac{\eta_1(t)}{\omega_1} z + \zeta(z_{k,j_k,0}(t))\,,$$

$$1 \le k \le 2\,, \quad 1 \le \ell_k \le m_k\,.$$

При этом в (6) у ζ-функции Вейерштрасса период ω_1 равен 2π, а период $\omega_2(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot\omega_2(t) = i\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\right). \tag{7}$$

Акцессорные параметры семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z,t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$\dot z_{1,k_1}(t) = -\mathcal{H}(z_{1,k_1}(t), t)\,, \quad 1 \le k_1 \le n_1\,,$$
$$\dot z_{2,k_2}(t) = -\mathcal{H}(z_{2,k_2}(t), t)\,, \quad 1 \le k_2 \le n_2\,,$$
$$\dot z_{1,\ell_1,j}(t) = -\mathcal{H}(z_{1,\ell_1,j}(t), t)\,, \quad 1 \le \ell_1 \le m_1\,, \quad j = 1, 2\,,$$
$$\dot z_{2,\ell_2,j}(t) = -\mathcal{H}(z_{2,\ell_2,j}(t), t)\,, \quad 1 \le \ell_2 \le m_2\,, \quad j = 1, 2\,,$$

$$\dot z_{1,\ell_1,0}(t) = -\sum_{j_1=1,\, j_1\ne\ell_1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t)\, \mathcal{K}_{1,j_1}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) -$$
$$- \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\, \mathcal{K}_{2,j_2}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) - \mathcal{L}_{1,\ell_1}(t)\Bigg[\mathcal{Q}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) +$$
$$\sum_{j_1=1,\, j_1\ne\ell_1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,i_1}(z_{1,\ell_1,0}(t), t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,i_2}(z_{1,\ell_1,0}(t), t)\Bigg],$$

$$\dot z_{2,\ell_2,0}(t) = -\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t)\, \mathcal{K}_{1,j_1}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) -$$
$$- \sum_{j_2=1,\, j_2\ne\ell_2}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\, \mathcal{K}_{2,j_2}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) - \mathcal{L}_{2,\ell_2}(t)\Bigg[\mathcal{Q}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) +$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{Q}_{1,i_1}(z_{2,\ell_2,0}(t), t) + \sum_{j_2=1,\, j_2\ne\ell_2}^{m_2} \mathcal{Q}_{2,i_2}(z_{2,\ell_2,0}(t), t)\Bigg],$$

$$-\frac{\dot C_1(t)}{C_1(t)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1)\, \mathcal{R}(z_{1,i_1}(t), t) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1)\, \mathcal{R}(z_{2,i_2}(t), t) +$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{R}(z_{1,j_1,0}(t), t) + (\varphi_{1,j_1} - 1)\, \mathcal{R}(z_{1,j_1,1}(t), t) - \varphi_{1,j_1}\, \mathcal{R}(z_{1,j_1,2}(t), t) +$$
$$+ \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{R}(z_{2,j_2,0}(t), t) + (\varphi_{2,j_2} - 1)\, \mathcal{R}(z_{2,j_2,1}(t), t) - \varphi_{2,j_2}\, \mathcal{R}(z_{2,j_2,2}(t), t) +$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t)\, \mathcal{P}(z_{1,j_1,0}(t), t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\, \mathcal{P}(z_{2,j_2,0}(t), t)\,, \tag{8}$$

$$\dot\omega_2(t) = i\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\right),$$

где

$$\mathcal{P}(z,t) = \wp(z;\, \omega_1, \omega_2(t)) + \frac{\eta_1(t)}{\omega_1}\,.$$

$$\mathcal{R}(z(t), t) = \zeta(z(t), t)\, \dot z(t) + \dot\omega_2(t) \frac{\partial \ln \sigma(z(t);\, \omega_1, \omega_2(t))}{\partial \omega_2}\,,$$

$$\mathcal{Q}(z,t) = c(t) + \sum_{i_1=1}^{n_1} (\alpha_{1,i_1} - 1)\, \zeta(z - z_{1,i_1}(t)) + \sum_{i_2=1}^{n_2} (\alpha_{2,i_2} - 1)\, \zeta(z - z_{2,i_2}(t))\,,$$

$$\mathcal{Q}_{k,i_k}(z,t) = \zeta(z - z_{k,j_k,0}(t)) + (\varphi_{k,j_k} - 1)\, \zeta(z - z_{k,j_k,1}(t)) -$$
$$- \varphi_{k,j_k}\, \zeta(z - z_{k,j_k,2}(t))\,, \quad 1 \le k \le 2\,.$$

В (8) частная производная функции $\ln \sigma(z)$ по периоду ω_2 вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \ln \sigma(z)}{\partial \omega_2} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\omega_1(\wp(z) - \zeta^2(z)) + \eta_1(z\zeta(z) - 1) - \frac{g_2}{24}\omega_1 z^2\right].$$

Конформный модуль $m(t) = \mathrm{Mod}(\mathcal{D}(t))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot m(t) = \frac{1}{2\omega_1}\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \mathcal{L}_{1,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{m_2} \mathcal{L}_{2,j_2}(t)\right).$$

4. Примеры

Мы можнем эффективно находить акцессорные параметры разработанным параметрическим методом.

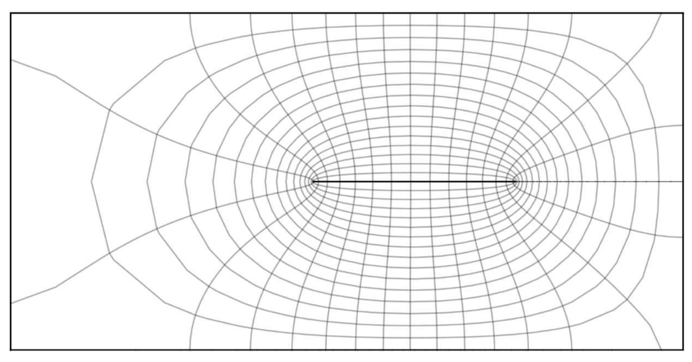


Figure 1. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на прямоугольник $(-1,1) \times (-0.5, 0.5)$ с разрезом вдоль отрезка $[-0.1, 0.5]$.

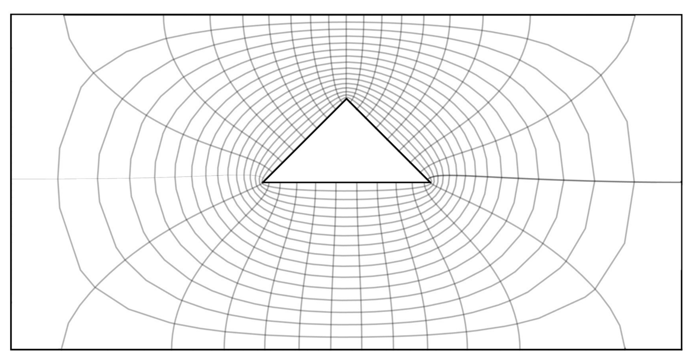


Figure 2. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на область, получающуюся из прямоугольника $(-1,1) \times (-0.5, 0.5)$ удалением треугольника с вершинами в точках 0.25, -0.25 и $0.25\,i$.

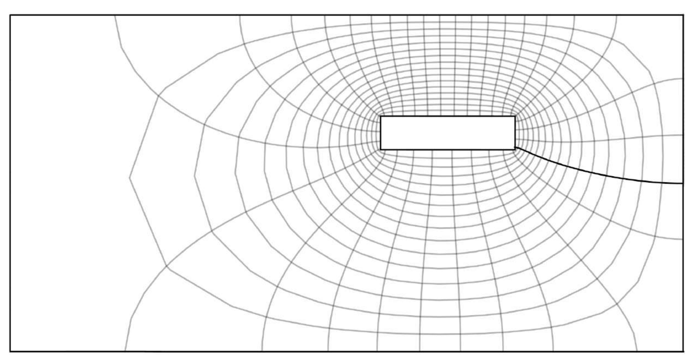


Figure 3. Образ полярной сетки при конформном отображении кольца на область, являющуюся разностью прямоугольников $(-1,1) \times (-0.5, 0.5)$ и $[0.1, 0.5] \times [0.1, 0.2]$.

Список литературы

1. Александров, И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И. А. Александров. – М.: Наука, 1976. – 344 с.

2. Ахиезер, Н.И. Аеродинамічні дослiди / Н.И. Ахиезер // Труды физ.-мат. отд. АН УССР. – 1928. – К. 7. – С. 223–231.

3. Голузин, Г. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей / Г. Голузин, Л. Канторович, В. Крылов, П. Мелентьев, М. Муратов, Н. Стенин. – М.: ОНТИ, 1937. – 126 с.

dyutin.andrei2016@yandex.ru