Неравенства Харди в областях с выпуклым дополнение

Макаров Руслан Валерьевич, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Школа для молодых ученых "Современные методы в теории аппроксимации и комплексном анализе", МИАН, 13-17 ноября 2023 г.

1 Неравенство Харди

Неравенства типа Харди, имеющие и самостоятельный интерес, находят широкое применение в различных разделах математики, физики и математической физики. Они используются в теории интегральных и дифференциальных уравнений, в нелинейном анализе, в теории интерполяции, анализе Фурье, применяются в качестве инструмента в исследовании спектра эллиптических операторов.

Неравенства типа Харди связывают в одномерном случае функцию и ее производную, а в многомерном случае — функцию и модуль ее градиента.

Классическое неравенство Харди для абсолютно непрерывной функции $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, такой что $f(0)=0$ и $f'\in L^2(0,\infty)$ выглядит следующим образом

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x^2}dx \le 4\int_0^\infty |f'(x)|^2 dx.$$

Постоянная 4 является неулучшаемой, хотя и не существует экстремальной функции $f\not\equiv 0$, на которой достигается равенство.

В следующей теореме приведена унифицированная версия результатов Харди в форме, подходящей для их приложений к многомерным неравенствам.

Теорема 1

Пусть $p\in[1,\infty)$ и $s\in\mathbb{R}$, тогда для любой функции $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f\in C_0^1((0,\infty))$ и $f\not\equiv 0$, справедливо следующее неравенство

$$\int_0^\infty \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}}dt > \frac{|s-1|^p}{p^p}\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^s}dt,$$

где константа $|s-1|^p/p^p$ точная. А именно, для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in C_0^1((0,\infty))$, такая, что

$$\int_0^\infty \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}}dt < \left(\frac{|s-1|^p}{p^p}+\varepsilon\right)\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^s}dt.$$

2 Основные понятия

Нам понадобятся следующие определения

Определение 1

Величина $\mathrm{dist}(x,A)$ – расстояние между точкой x и множеством A.

Определение 2

Для любого $A\subset X$ и $\varepsilon>0$, пусть

$$(A)_\varepsilon := \{x\in X \mid \mathrm{dist}(x,A)\le\varepsilon\}.$$

Определение 3

Пусть $\mathscr{C}(X)$ непустой класс замкнутых, ограниченных подмножеств в метрическом пространстве (X,dist). Для любых $A,B\in\mathscr{C}(X)$, пусть

$$\mathrm{dist}_H(A,B) := \inf\{\varepsilon>0 \mid A\subset(B)_\varepsilon \text{ и } B\subset(A)_\varepsilon\}.$$

(Точная нижняя граница существует, так как множества A и B ограничены).

Метрика dist_H называется метрикой Хаусдорфа.

Определение 4

Для любого подмножества A из $\mathbb{R}^n$, пусть $\mathscr{F}(A)$ семейство всех выпуклых множеств, включающих A. Пересечение $\mathscr{F}(A)$ называется выпуклой оболочкой A.

$$\mathrm{conv}A := \cap\mathscr{F}(A).$$

$\mathrm{conv}A$ *— минимальное (по включению) выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее A.*

Определение 5

Непустое подмножество P из $\mathbb{R}^n$ является выпуклым многогранником, если существует конечное $X\subset\mathbb{R}^n$ с $\mathrm{conv}X=P$.

3 Обобщение теорем Хадвигера

Будем рассматривать непустые открытые связные множества $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ такие, что $n\ge 2$ и множества $K:=\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ — непустые и выпуклые. Другими словами, рассматриваем области Ω с выпуклым дополнением.

Доказаны следующие две теоремы, являющиеся обобщением теорем Хадвигера для неограниченных непустых компактных подмножеств.

Теорема 2

Пусть $K\in\mathscr{K}_\infty^n, \varepsilon>0$. Тогда существуют многогранники $P,Q\in\mathscr{P}_\infty^n$ такие что $P\subset K\subset Q$, и

$$\mathrm{dist}_H(K,P)<\varepsilon,\ \mathrm{dist}_H(K,Q)<\varepsilon.$$

Теорема 3

Для любого $K\in\mathscr{K}_\infty^n$ с $0\in K$ и $0\notin\partial K$ существует выпуклый многогранник P такой, что

$$\forall\lambda>1,\quad P\subset K\subset\lambda P.$$

4 Оценки констант в интегральных неравенствах

Пусть $C_0^1(\Omega)$ — семейство гладких вещественных функций с компактными носителями на множестве $\Omega\neq\mathbb{R}^n$.

Пусть параметры $p\in[1,\infty)$ и $s\in(-\infty,\infty)$. Рассмотрим следующее вариационное неравенство типа Харди

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p dx}{\mathrm{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)} \ge c_{nps}(\Omega)\int_\Omega \frac{|f(x)|^p dx}{\mathrm{dist}^s(x,\partial\Omega)}\quad \forall f\in C_0^1(\Omega),$$

где ∇f обозначает градиент функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$, константа $c_{nps}(\Omega)\in[0,\infty)$ является максимально возможной, то есть определяется следующей формулой

$$c_{nps}(\Omega) = \inf_{f\in C_0^1(\Omega), f\not\equiv 0}\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p dx}{\mathrm{dist}^{s-p}(x,\partial\Omega)}dx \Bigg/ \int_\Omega \frac{|f(x)|^p dx}{\mathrm{dist}^s(x,\partial\Omega)}.$$

Была доказана

Теорема 4

Предположим, что $n\ge 2$ и $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ такая область, что $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ непустое выпуклое множество. Тогда для любого $p\in[1,\infty)$ и любого $s\in(-\infty,\infty)$ выполняется следующее оптимальное неравенство

$$c_{nps}(\Omega)\ge\min\{|s-k|^p/p^p : k=1,2,\ldots,n\}.$$

Получено неравенство, родственное принципу неопределенности Гейзенберга следующего вида:

Теорема 5

Пусть $s\in\mathbb{R}$. Следующее неравенство является верным

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|\nabla f(z)|^2}{r^{s-2}}dxdy \ge \frac{|s-2|^2}{4}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{f^2(z)}{r^s}dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2}\left(f(z)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt\right)^2\frac{dxdy}{r^s}\quad \forall f\in C_0^1\left(\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\right),$$

где $r=|z|$, $z=x+iy=re^{i\theta}$.

5 Список литературы

- Авхадиев, Ф.Г. Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах / Ф.Г. Авхадиев // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2006. — Т. 255. — С. 8–18;
- Харди, Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. — Москва: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. — 456 с.
- Avkhadiev F.G. Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants / F.G. Avkhadiev // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2006. — V. 21. —P. 3–31.
- Balinsky, A.A. The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality / A.A. Balinsky, W.D. Evans, R.T. Lewis. — Springer, Heidelberg-New York-Dordrecht-London. — 2015. — 263 pp.
- Hadwiger, H. Vorlesungen über Inhalt, Oberflächer und Isoperimetrie / H. Hadwiger. — Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957. — 312 pp.