Регуляризации псевдо-автоморфизмов с положительной алгебраической энтропией

Научная сессия МИАН

Александра Кузнецова

15 ноября 2023

Основной вопрос доклада

Пусть X это проективное алгебраическое многообразие и f это его бирациональный автоморфизм:

$$f\colon X \dashrightarrow X.$$

Вопрос

Какие f регуляризуются?
То есть при каких условиях существуют

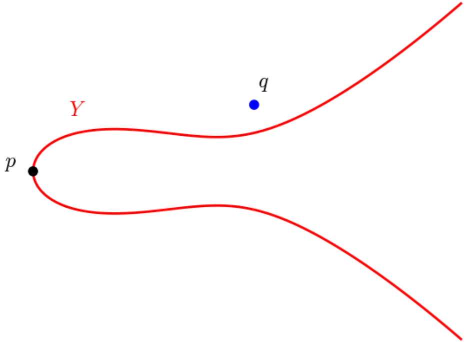
- (гладкое) проективное многообразие Y;
- бирациональное отображение $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$;

так что композиция является регулярным автоморфизмом Y:

$$\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y).$$

Бирациональные инволюции $\mathbb{P}^n$

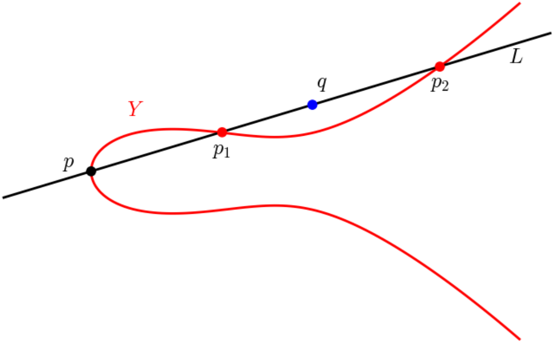
Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.



$$\sigma_p(q) = ?$$

Бирациональные инволюции $\mathbb{P}^n$

Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.

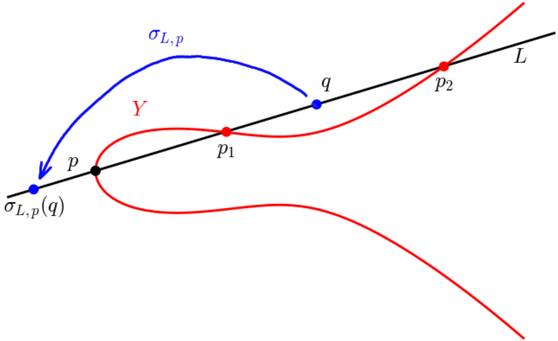


Построим прямую L в $\mathbb{P}^n$, проходящую через точки p и q.

$$\sigma_p(q) = ?$$

Бирациональные инволюции $\mathbb{P}^n$

Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.



Пусть $\sigma_{L,p}$ это единственная инволюция L сохраняющая точки p_1 и p_2,

$$\sigma_p(q) = \sigma_{L,p}(q).$$

Пример автоморфизма с положительной энтропией

Пусть Y это гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и p точка на Y. Мы построили бирациональную инволюцию:

$$\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Теорема (Blanc'13)

Пусть точки $p_1, \ldots, p_k \in Y$ *достаточно общие и* $k \geqslant 3$, *тогда*

$$F = \sigma_{p_k} \circ \cdots \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

это бирациональный автоморфизм.
Если $n = 2$, *то* F *регуляризуется.*

Вопрос

Можно ли построить регуляризацию F при $n \geqslant 3$?

Результат

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и $p_1, \ldots, p_k$ точки на S.

$$\sigma_{p_k} \circ \cdots \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Теорема (К.)

Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ очень общая комплексная кубическая поверхность и $p_1, p_2, p_3 \in S$ достаточно общие точки. Тогда

$$\sigma_{p_3} \circ \sigma_{p_2} \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

это нерегуляризующийся автоморфизм.

Частичные ответы на вопрос

Вопрос

При каких условиях регуляризуется бирациональный автоморфизм:

$$f\colon X \dashrightarrow X.$$

- $\dim(X) = 1$.
- $\dim(X) = 2$: автоморфизмы регуляризуются в зависимости от свойств операторов

$$(f^n)^*\colon N^1(X) \to N^1(X),\ n \in \mathbb{Z}.$$

- В случае $\dim(X) \geqslant 3$ общих решений задачи нет.

Действие на численных классах

Пусть X это гладкое проективное многообразие.

Определение

Группа численных классов на X это следующая группа:

$$N^i(X) = \mathbb{Z}\{Z \subset X \mid Z \text{ неприводимо}, \operatorname{codim}(Z) = i\}/ \sim_{num}.$$

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ это бирациональный автоморфизм X такой что

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

Определим отображение $f^*\colon N^i(X) \to N^i(X)$ следующим способом:

$$f^* = q_* \circ p^*\colon N^i(X) \to N^i(X).$$

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ бирациональный автоморфизм гладкого проективного многообразия X. Пусть $H \in N^1(X)$ обильный класс на X.

Определение

Следующее число называется *i*-**ой динамической степенью** f:

$$\lambda_i(f) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(f^n)^*(H^i)\cdot H^{\mathrm{dim}(X)-i}}.$$

Алгебраическая энтропия автоморфизма f **положительна**, если $\lambda_i(f) > 1$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant \mathrm{dim}(X)$.

Теорема (Dinh, Sibony'05)

Числа $\lambda_i(f)$ это бирациональные инварианты f и не зависят от H.

Автоморфизмы поверхностей

Пусть $f : X \dashrightarrow X$ бирациональный автоморфизм гладкой поверхности.

- $\lambda_0(f) = \lambda_2(f) = 1$;
- $\lambda_1(f) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(f^n)^*(H)\cdot H}$ может быть больше 1.

Теорема (Blanc, Cantat'16)

Если $\lambda_1(f) > 1$, то это целое алгебраическое число.
Более того, $\lambda_1(f)$ это либо число Салема, либо число Пизо, и

(1) *если $\lambda_1(f)$ это число Салема, то f регуляризуется;*

(2) *если $\lambda_1(f)$ неквадратичное число Пизо, то f не регуляризуется.*

Псевдо-автоморфизмы

Определение

Бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ называется **псевдо-автоморфизмом**, если ни f, ни f^{-1} не стягивают дивизоров.

Замечание: В случае когда X это гладкая поверхность, любой псевдо-автоморфизм регулярен.

Вопрос

Дан псевдо-автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ трехмерного многообразия X. Можно ли построить регуляризацию f?

Модель, на которой F псевдо-автоморфизм

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и $p_1, \dots, p_k$ точки на S.

$$F = \sigma_{p_k} \circ \dots \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Пусть $\Gamma_i \subset S$ это следующая кривая:

$$\Gamma_i = \{q \in S| \text{ прямая } \langle p_i, q\rangle \text{ касательная к } S \text{ в } q\}.$$

Лемма

Пусть $\delta\colon X \to \mathbb{P}^3$ это последовательное раздутие $p_1, \dots, p_k, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

и f это псевдо-автоморфизм X.

Критерий

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ это псевдо-автоморфизм гладкого трехмерного X.

$$f^*\colon N^1(X) \to N^1(X)$$

[Truong'14]: Если $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$, то $\exists!\ \theta \in N^1(X)$ так что класс θ псевдо-эффективен и

$$f^*(\theta) = \lambda_1(f)\theta.$$

Теорема (K.)

Пусть псевдо-автоморфизм f удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$;

(2) *существует кривая C такая что $\theta \cdot [C] < 0$;*

(3) *существует бесконечно много $m > 0$ так что $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$.*

Тогда f не регуляризуется.

Спасибо за внимание!