Квадратичные характеры с положительными частичными суммами

Александр Калмынин

Научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов года

15 ноября 2023

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

Характером Дирихле называется функция $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, которая периодична и вполне мультипликативна, то есть $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

Характером Дирихле называется функция $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, которая периодична и вполне мультипликативна, то есть $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. Говорят, что характер Дирихле χ *вещественный*, если все его значения вещественны. В частности, все они равны 0 или ± 1. Пример такого характера — это $\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$, символ Лежандра по модулю p.

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

Характером Дирихле называется функция $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, которая периодична и вполне мультипликативна, то есть $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. Говорят, что характер Дирихле χ *вещественный*, если все его значения вещественны. В частности, все они равны 0 или ± 1. Пример такого характера — это $\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$, символ Лежандра по модулю p. Для характеров Дирихле полезно бывает рассматривать производящие L-ряды, которые называются L-функциями Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

и продолжаются до целых функций на $\mathbb{C}$. Свойства их нулей тесно связаны с распределением простых чисел в арифметических прогрессиях.

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

В результатах о границах нулей L-функций наибольшую сложность представляют оценки для нетривиальных вещественных нулей L-функций вещественных характеров. Обобщенная гипотеза Римана утверждает, что всякий такой нуль обязан быть равен $\frac{1}{2}$, однако предполагается, что L-функции вещественных характеров не обладают вещественными нулями.

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

В результатах о границах нулей L-функций наибольшую сложность представляют оценки для нетривиальных вещественных нулей L-функций вещественных характеров. Обобщенная гипотеза Римана утверждает, что всякий такой нуль обязан быть равен $\frac{1}{2}$, однако предполагается, что L-функции вещественных характеров не обладают вещественными нулями. Далее будем рассматривать только символы Лежандра χ_p.
Многочлены Фекете

$$f_p(t) = \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) t^n$$

могут быть использованы для доказательства отсутствия вещественных нулей:

1. Вещественные характеры и нули Зигеля

В результатах о границах нулей L-функций наибольшую сложность представляют оценки для нетривиальных вещественных нулей L-функций вещественных характеров. Обобщенная гипотеза Римана утверждает, что всякий такой нуль обязан быть равен $\frac{1}{2}$, однако предполагается, что L-функции вещественных характеров не обладают вещественными нулями. Далее будем рассматривать только символы Лежандра χ_p. Многочлены Фекете

$$f_p(t) = \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) t^n$$

могут быть использованы для доказательства отсутствия вещественных нулей:

$$L(s,\chi_p)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f_p(e^{-t})}{1-e^{-pt}} t^{s-1} dt,$$

так что если у $f_p(t)$ нет нулей в $(0,1)$, то же верно и для $L(s,\chi_p)$.

2. Теорема Бейкера-Монтгомери и постановка задачи

В 1990 году Р. Бейкер и Х. Монтгомери доказали, что относительная плотность таких p, для которых $f_p(t)$ не имеет корней между 0 и 1, стремится к 0.

2. Теорема Бейкера-Монтгомери и постановка задачи

В 1990 году Р. Бейкер и Х. Монтгомери доказали, что относительная плотность таких p, для которых $f_p(t)$ не имеет корней между 0 и 1, стремится к 0. Иными словами, они доказали следующий факт

Теорема (Р. Бейкер, Х. Монтгомери)

Количество $p \leq x$, для которых $f_p(t)$ не имеет корней в $(0,1)$, есть $o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

К сожалению, их результат не позволяет получить оценку на скорость убывания в o.

2. Теорема Бейкера-Монтгомери и постановка задачи

В 1990 году Р. Бейкер и Х. Монтгомери доказали, что относительная плотность таких p, для которых $f_p(t)$ не имеет корней между 0 и 1, стремится к 0. Иными словами, они доказали следующий факт

Теорема (Р. Бейкер, Х. Монтгомери)

Количество $p \le x$, для которых $f_p(t)$ не имеет корней в $(0, 1)$, есть $o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

К сожалению, их результат не позволяет получить оценку на скорость убывания в o. С другой стороны, в связи с недавним решением задачи Эрдёша о расходимости, Борвейн, Чхве и Кунс рассмотрели множество $\mathcal{L}^+$ таких p, для которых $\chi_p(n)$ имеет неотрицательные частичные суммы. Несложно показать, что если $p \in \mathcal{L}^+$, то $f_p(t)$ не имеет корней в $(0, 1)$.

2. Теорема Бейкера-Монтгомери и постановка задачи

В 1990 году Р. Бейкер и Х. Монтгомери доказали, что относительная плотность таких p, для которых $f_p(t)$ не имеет корней между 0 и 1, стремится к 0. Иными словами, они доказали следующий факт

Теорема (Р. Бейкер, Х. Монтгомери)

Количество $p \leq x$, для которых $f_p(t)$ не имеет корней в $(0, 1)$, есть $o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$.

К сожалению, их результат не позволяет получить оценку на скорость убывания в o. С другой стороны, в связи с недавним решением задачи Эрдёша о расходимости, Борвейн, Чхве и Кунс рассмотрели множество $\mathcal{L}^+$ таких p, для которых $\chi_p(n)$ имеет неотрицательные частичные суммы. Несложно показать, что если $p \in \mathcal{L}^+$, то $f_p(t)$ не имеет корней в $(0, 1)$. Таким образом, если $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ — число элементов $\mathcal{L}^+$, не превосходящих x, то $\pi_{\mathcal{L}}(x) = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$. Задача уточнения данной оценки рассматривается в представленной работе.

3. Случайные мультипликативные функции

При помощи квадратичного закона взаимности и оценок для количества простых чисел в арифметической прогрессии удается свести оценку для $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ к оценке вероятности некоторого события, связанного со случайными мультипликативными функциями.

3. Случайные мультипликативные функции

При помощи квадратичного закона взаимности и оценок для количества простых чисел в арифметической прогрессии удается свести оценку для $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ к оценке вероятности некоторого события, связанного со случайными мультипликативными функциями. Случайная мультипликативная функция $f(n)$ задается формулой

$$f(n) = \prod_{p^\alpha || n} X_p^\alpha,$$

где X_p — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ («броски монетки»).

3. Случайные мультипликативные функции

При помощи квадратичного закона взаимности и оценок для количества простых чисел в арифметической прогрессии удается свести оценку для $\pi_{\mathcal{L}}(x)$ к оценке вероятности некоторого события, связанного со случайными мультипликативными функциями. Случайная мультипликативная функция $f(n)$ задается формулой

$$f(n) = \prod_{p^\alpha || n} X_p^\alpha,$$

где X_p — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ («броски монетки»).

Теорема 1

Пусть $m(N)$ — вероятность того, что для всех $k \le N$ выполнено неравенство $f(1) + \ldots + f(k) \ge 0$. Справедлива оценка

$$\pi_{\mathcal{L}}(x) \ll \frac{x}{\ln x} m(0.5 \ln x).$$

3. Случайные мультипликативные функции

Для оценок $m(N)$ оказывается полезной случайная дзета-функция

$$\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Такой ряд Дирихле обладает массой интересных свойств. Например, А. Винтнер доказал, что с вероятностью 1 для $\zeta_f(s)$ верна гипотеза Римана.

3. Случайные мультипликативные функции

Для оценок $m(N)$ оказывается полезной случайная дзета-функция

$$\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Такой ряд Дирихле обладает массой интересных свойств. Например, А. Винтнер доказал, что с вероятностью 1 для $\zeta_f(s)$ верна гипотеза Римана. Из аналитических свойств ζ_f удается вывести следующее

Теорема 2

При $c = 2 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{23+16\sqrt{2}}}{2} \approx 0.0368$ *выполнено*

$$m(N) \ll (\ln N)^{-c+o(1)}.$$

В частности,

$$\pi_{\mathcal{L}}(x) \ll \frac{x}{\ln x (\ln \ln x)^{c+o(1)}}$$

3. Случайные мультипликативные функции

Следует отметить, что для обычного случайного блуждания без условия мультипликативности вероятность неотрицательности первых N частичных сумм убывает как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. По всей видимости, мультипликативные функции испытывают некоторое смещение в сторону положительности по сравнению со стандартными случайными блужданиями.

3. Случайные мультипликативные функции

Следует отметить, что для обычного случайного блуждания без условия мультипликативности вероятность неотрицательности первых N частичных сумм убывает как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. По всей видимости, мультипликативные функции испытывают некоторое смещение в сторону положительности по сравнению со стандартными случайными блужданиями. Предполагается, что $m(N) \sim c(\ln N)^{-1/2}$ для некоторой константы $c > 0$. Поскольку для случайных мультипликативных функций неизвестен даже аналог центральной предельной теоремы, многие вопросы подобного рода до сих пор остаются за пределами досягаемости.

3. Случайные мультипликативные функции

Следует отметить, что для обычного случайного блуждания без условия мультипликативности вероятность неотрицательности первых N частичных сумм убывает как $\frac{1}{\sqrt{N}}$. По всей видимости, мультипликативные функции испытывают некоторое смещение в сторону положительности по сравнению со стандартными случайными блужданиями. Предполагается, что $m(N) \sim c(\ln N)^{-1/2}$ для некоторой константы $c > 0$. Поскольку для случайных мультипликативных функций неизвестен даже аналог центральной предельной теоремы, многие вопросы подобного рода до сих пор остаются за пределами досягаемости. Так, гипотетически близкая к оптимальной версия закона повторного логарифма для случайных мультипликативных функций получена А. Харпером лишь в конце 2020 года.

Тематика положительности сумм мультипликативных функций получила развитие в ряде более поздних работ:

Теорема 3 (Р. Анджело, М. Шу, 2022)

Для некоторой константы $C > 0$ вероятность положительности суммы $\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{n}$ не меньше

$$1 - O\left(\exp\left(-\exp\left(\frac{C\ln x}{\ln\ln x}\right)\right)\right)$$

4. Дальнейшие результаты

Тематика положительности сумм мультипликативных функций получила развитие в ряде более поздних работ:

Теорема 3 (Р. Анджело, М. Шу, 2022)

Для некоторой константы $C > 0$ вероятность положительности суммы $\sum\limits_{n\le x}\frac{f(n)}{n}$ не меньше

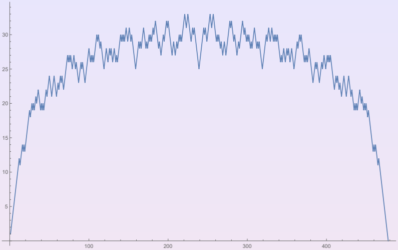
$$1 - O\left(\exp\left(-\exp\left(\frac{C\ln x}{\ln\ln x}\right)\right)\right)$$

Теорема 4 (О. Клурман, Й. Ламзури, М. Мюнш, 2022+)

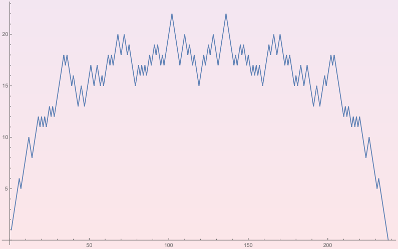
Если не существует нулей Зигеля, то

$$\pi_{\mathcal{L}}(x) \ll \frac{x}{\ln x}\exp\left(-\frac{c\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}\right)$$

5. Картинки

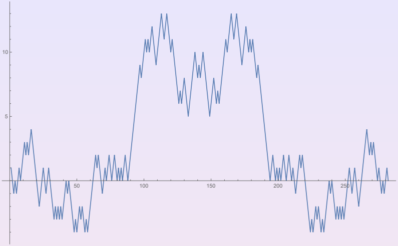


$$p = 479 \in \mathcal{L}^{+}$$

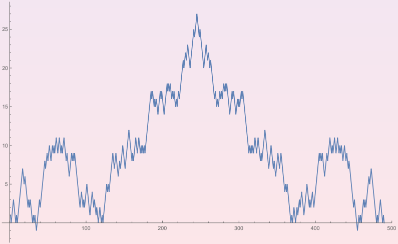


$$p = 239 \in \mathcal{L}^{+}$$

5. Картинки



$p = 283 \notin \mathcal{L}^+$



$p = 491 \notin \mathcal{L}^+$

Спасибо за внимание!