

Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с асимптотическим конечным ограничением

С.М. Асеев

Отдел дифференциальных уравнений МИАН

Научная сессия МИАН, 15 ноября 2023

Постановка задачи

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, непустые замкнутые множества $M_0 \subset G$ и $M_\infty \subset \mathbb{R}^n$, функции

$$f : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f^0 : [0, \infty) \times G \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$$

и многозначное отображение $U : [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$.

Задача (P) :

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in U(t),$$

$$x(0) \in M_0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0.$$

[1] Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. Economic J., 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543–559.

Асимптотические конечные ограничения в оптимальном управлении

Концевое ограничение $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$.

- [2] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз, 1961.

Для $i = 1, \dots, m$, $m \leq n$, $\exists x_*^i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_*^i(t)$. Концевые ограничения типа равенств и неравенств на значения $x_*^i(\infty)$.

- [3] Бродский Ю.И., Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, Матем. сб., 105(147):3 (1978), 371–388.
- [4] Tauchnitz N., Pontryagin's maximum principle for infinite horizon optimal control problems with bounded processes and with state constraints, arXiv:2007.09692
- [5] Seierstad A., A maximum principle for smooth infinite horizon optimal control problems with state constraints and with terminal constraints at infinity, Open Journal of Optimization, 4 (2015), pp. 100-130.

Экстремальные задачи с ограничениями

Пусть заданы нормированные пространства X , Y , отображение

$$F : X \rightarrow Y,$$

и функции

$$f_i : X \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Задача $(\tilde{P})$:

$$f_0(x) \rightarrow \max,$$

$$F(x) = 0,$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

[6] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Теория экстремальных задач. М.: Наука (1974).

Основные определения

Измеримую по Лебегу функцию $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m: u(t) \in U(t) \forall t \geq 0$ будем называть **управлением**.

Траектория $x(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывное решение $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, определенное в G на $[0, \tau)$, $0 < \tau \leq \infty$.

Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть **процессом**, если $\tau = \infty$.

Процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть **допустимым**, если выполняются концевые ограничения $x(0) \in M_0$ и $\liminf_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), M_\infty) = 0$, а функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ локально интегрируема на $[0, \infty)$.

Допустимый процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть **слабо обгоняющим**, если для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$\varphi(x_*(0)) - \varphi(x(0)) + \limsup_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt - \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \right] \geq 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A1) Существуют такие непрерывная функция $\gamma: [0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ и локально интегрируемая функция $\nu: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, что $\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ для всех $t \geq 0$ и для п.в. $t \in [0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\max_{\{x: \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \left\{ \|f_x(t, x, u_*(t))\| + \|f_x^0(t, x, u_*(t))\| \right\} \leq \nu(t).$$

(A1) $\Rightarrow$ применимость стандартных результатов о существовании, единственности, непрерывной зависимости решения $x(\tau, \xi; \cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \quad x(\tau) = \xi.$$

от начальных данных (τ, ξ) и дифференцируемости по начальному состоянию ξ на любом конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$.

Если процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет (A1), то для любых $0 \leq \tau < s$ и любого ξ из некоторой окрестности $\mathcal{V}(x_*(\tau)) \subset G$ точки $x_*(\tau)$ единственное решение $x(\tau, \xi; \cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(\tau) = \xi$, определено на $[0, s]$.

Для любого $t \geq 0$ функция $x(\tau, \cdot; t): \mathcal{V}(x_*(\tau)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема и

$$x_\xi(\tau, x_*(\tau); s) = Y_*(s) Y_*^{-1}(\tau) = [Z_*(\tau) [Z_*(s)]^{-1}]^*.$$

Здесь $Y_*(\cdot)$ и $Z_*(\cdot)$ — матричные решения систем

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x_*(t), u_*(t))y(t)$$

и

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* z(t)$$

с начальными условиями $Y_*(0) = I$ и $Z_*(0) = I$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A2) Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0, \infty)$ и

$$\max_{\theta \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_*(0)\| \lambda(t).$$

Лемма 1. Пусть процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Тогда

$$\left\| [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \quad \text{п.в.} \quad t \geq 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A2') Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0, \infty)$ и для любых $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, имеем*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta_1; t), x(\zeta_2; t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta_1; t) - x(\zeta_2; t) \rangle \right| \stackrel{n.b.}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\| \lambda(t).$$

Пусть $\forall (x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие (A1).

Определим открытое множество $\Omega \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta: \|\zeta - x_*(0)\| < \beta} \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta; \tau), \tau \geq 0\}.$$

Лемма 2. Пусть для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется условие (A2') и для любого процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$, $\|x(\zeta; 0) - x_*(0)\| < \beta$, выполняется условие (A1). Тогда для любой точки $(\tau, \xi) \in \Omega$ имеем

$$\left\| [Z(\tau, \xi; t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

Здесь $Z(\tau, \xi; \cdot)$ — матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(\tau, \xi; t), u_*(t))]^* z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau, \xi; 0) = I$.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — допустимый процесс, $u(\cdot)$ — некоторое управление и $\tau > 0$.

Определим составное управление $u_*^\tau(\cdot)$ равенством

$$u_*^\tau(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, \tau), \\ u_*(t), & t \in [\tau, \infty). \end{cases}$$

(A3) Существует такое $\varepsilon > 0$, что если для допустимого процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в момент $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $\rho(x_*(\tau), M_\infty) \leq \varepsilon$, то существует такое $\delta(\tau, x_*(\tau)) > 0$, что для любой траектории $x(\cdot)$, соответствующего управлению $u(\cdot)$ на интервале $[0, \tau]$ в G с начальным состоянием $x(0) \in M_0$ и удовлетворяющего неравенствам $\|x(\tau) - x_*(\tau)\| \leq \delta(\tau, x_*(\tau))$ и $\rho(x(\tau), M_\infty) \leq \rho(x_*(\tau), M_\infty)$, пара $(x_*^\tau(\cdot), u_*^\tau(\cdot))$ — допустимый процесс. Здесь, $u_*^\tau(\cdot)$ — составное управление, соответствующее $u(\cdot)$, $u_*(\cdot)$ и τ , а $x_*^\tau(\cdot)$ — соответствующая траектория.

Функция межвременной полезности

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс и выполняется $(A2')$.

Пусть $\forall (x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие $(A1)$.

Пусть $0 \leq \tau < s$ и $(\tau, \xi) \in \Omega$

Определим **функцию межвременной полезности** $\pi(\tau, \cdot, s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G: (\tau, x) \in \Omega\}$$

равенством

$$\pi(\tau, \xi, s) = f^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)), \quad \xi \in G_\tau.$$

Функция условной стоимости

Пусть процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет $(A2')$ и $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) < \infty$.

Тогда $\forall (\tau, \xi) \in \Omega$ интеграл

$$W(\tau, \xi) = \int_{\tau}^{\infty} \pi(\tau, \xi, s) ds$$

сходится и функцию $W(\cdot, \cdot)$ будем называть **функцией условной стоимости**.

Лемма 3. Пусть для процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A2')$, значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и для любого процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется $(A1)$. Тогда для любого $\tau \geq 0$ функция $\xi \mapsto W(\tau, \xi)$ непрерывно дифференцируема на G_{τ} и

$$\begin{aligned} W_{\xi}(\tau, \xi) &= \int_{\tau}^{\infty} \pi_{\xi}(\tau, \xi, s) ds \\ &= Z(\tau, \xi; \tau) \int_{\tau}^{\infty} [Z(\tau, \xi; s)]^{-1} f_x^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)) ds. \end{aligned}$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс, значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Пусть $\forall \zeta \in M_0: \|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$.

Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$M_k = \{x \in \mathbb{R}^n: \rho(x, M_\infty) \leq \rho(x_*(T_k), M_\infty), \|x - x_*(T_k)\| \leq \delta(T_k, x_*(T_k))\}.$$

Задача (P_k) :

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \varphi(x(0)) + W_k(x(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T_k) \in M_k,$$

$$u(t) \in U(t).$$

Функция $W_k(\cdot) := W(\cdot, T_k)$ непрерывно дифференцируема на G_{T_k} .

[7] Clarke F., Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics, 264 (2013), London: Springer-Verlag.

Теорема 1. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в (P) , значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и выполняются условия $(A2')$ и $(A3)$. Пусть $\forall \zeta \in M_0: \|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$. Тогда существуют такая ненулевая пара $\psi^0 \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, что

(i) Функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = -Z_*(t)\xi + \psi^0 Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

принадлежит $AC_{loc}[0, \infty)$ и удовлетворяет соотношениям П.М.П.:

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi^0, \psi(t)).$$

(ii) Выполняются включения

$$\psi(0) \in -\psi^0 \hat{\partial} \varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

$$\xi \in \text{Ls}_{t \rightarrow \infty: \rho(x_*(t), M_\infty) \rightarrow 0} \left\{ [Z_*(t)]^{-1} N_*(t) \right\}.$$

Здесь

$$N_*(t) = \{\lambda \zeta: \lambda \geq 0, \zeta \in \hat{\partial} \rho(x_*(t), M_\infty + \rho(x_*(t), M_\infty))\}.$$

Теорема 2. Пусть $M_\infty = \mathbb{R}^n$. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс в (P) , значение $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ конечно и выполняется условие $(A2')$. Пусть для любого $\zeta \in M_0$:

$\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для процесса $(x(\zeta; \cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$. Тогда для любого $t \geq 0$ функция $W(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G_t = \{x \in G : (t, x) \in \Omega\}$ и выполняются следующие условия:

(i) Функция $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная равенством

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)), \quad t \geq 0,$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума с $\psi^0 = 1$.

(ii) Выполняется условие трансверсальности

$$\psi(0) \in -\hat{\partial}\varphi(x_*(0)) + \hat{N}_{M_0}(x_*(0)),$$

(iii) Частная производная $W_t(t, x_*(t))$ существует при п.в. $t \geq 0$ и

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \} \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Пример. Роль условия роста (A2)

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-t} [u(t) - 5x(t)^2] dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = (u(t) + x(t)) \phi(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad G = (-\infty, \infty), \\ u(t) \in [0, 1].$$

Здесь $\phi: \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, 1]$ – такая гладкая функция, что $\phi(x) \equiv 1$ если $|x| \leq 1$, и $\phi(x) \equiv 0$ если $|x| \geq 2$.

В этом примере $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$, $t \geq 0$.

Так как $Z_*(t) = e^{-t}$, $f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) = -10x_*(t)e^{-t} \equiv 0$, $t \geq 0$, то

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty Z_*^{-1}(s) f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds \equiv 0, \quad t \geq 0,$$

Однако, для $u_*(t) \equiv 0$ и $\psi(t) \equiv 0$, $t \geq 0$:

$$u_*(t) (e^{-t} + \psi(t)) \neq \max_{u \in [0,1]} [u (e^{-t} + \psi(t))] \equiv e^{-t}.$$

П.М.П. для $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется с $\psi^0 = 1$, $\psi(t) = -e^{-t}$, $t \geq 0$.

- [8] Асеев С.М., О некоторых свойствах сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума для задач оптимального экономического роста, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 19, № 4 (2013), 15–24.
- [9] Асеев С.М., Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени, Труды МИАН, 290 (2015), 239–253.
- [10] Aseev S.M., Veliov, V.M., Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 20 (2014), 41–57.
- [11] Aseev S.M., Necessary conditions for the optimality and sustainability of solutions in infinite-horizon optimal control problems, Mathematics, 11 (2023), 3851.