

**О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ
ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ**

А.Г.СЕРГЕЕВ, Е.А.ТЕПЛЯКОВ

Теория Блоха

Поведение электрона в твердом теле, наделенном кристаллической решеткой Λ , определяется уравнением Шредингера с потенциалом, инвариантным относительно Λ . Собственные функции такого оператора Шредингера, называемые блоховскими, имеют вид

$$\psi(x) = e^{ik \cdot x} \varphi(x),$$

где вектор k принадлежит двойственному пространству $(\mathbb{R}^d)'$ и называется квазиимпульсом, а φ — гладкая Λ -периодическая функция. Решетке Λ в двойственном пространстве отвечает двойственная решетка Λ' , фундаментальная область которой, совпадающая с тором $\mathbb{T}^d$, называется зоной Бриллюэна и обозначается через Br_d . Исходному гамильтониану H отвечает в терминах двойственного пространства блоховский гамильтониан H_k , зависящий от квазиимпульса k .

Основной объект исследования — это блоховское расслоение $\mathcal{H}$ над зоной Бриллюэна Br_d , слоями которого являются гильбертовы пространства $\mathcal{H}_k$, на которых действует блоховский гамильтониан H_k .

Топологические инварианты

В приближении сильной связи, принятом в теории твердого тела, можно считать, что имеется только конечное число n активных энергетических уровней. Для того, чтобы построить топологические инварианты, отвечающие блоховскому гамильтониану H_k , рассмотрим его адиабатическую деформацию в рассматриваемом классе гамильтонианов, не затрагивающую энергетической щели и переводящую гамильтониан H_k в гамильтониан H'_k с двумя собственными значениями ± 1 . Иными словами, можно построить непрерывное отображение $U : \text{Br}_d \rightarrow U(n)$ такое, что

$$U^*(k)H'_kU(k) = \text{diag} (1_{p \times p}, -1_{(n-p) \times (n-p)}) ,$$

где справа стоит блочно-диагональная матрица, а p – число заполненных электронных уровней. Матрица U в этом уравнении определена только с точностью до умножения справа на блочно-унитарную матрицу $\text{diag} (U_{p \times p}, U_{(n-p) \times (n-p)})$.

Иными словами, она задает непрерывное отображение из зоны Бриллюэна $\text{Br}_d = \mathbb{T}^d$ в грассманиан

$$\text{Gr}_{p,n} = \text{U}(n)/\text{U}(p) \times \text{U}(n-p).$$

Пользуясь известными результатами о гомотопических классах непрерывных отображений $[\mathbb{T}^d, \text{Gr}_{p,n}]$, мы можем ввести топологические инварианты твердого тела, отвечающие гамильтониану $\mathbf{H}$.

Топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени

Отображение обращения времени задается антиунитарным оператором T , квадрат которого равен -1 . В этом случае блоховское расслоение над зоной Бриллюэна Br_d становится кватернионным, если наделить Br_d естественной инволюцией. Исходному гамильтониану H будет отвечать оператор $\tilde{H}$, действующий на блоховском расслоении, который в окрестности неподвижных точек инволюции представляется в виде суммы кососимметрического оператора и квадратичной поправки. Индекс кососимметрического оператора определяется по формуле Атьи–Зингера, а квадратичная поправка на индекс не влияет. Теперь мы можем определить аналитический индекс топологического диэлектрика как сумму локальных индексов по всем неподвижным точкам инволюции.

Другое, топологическое определение индекса диэлектрика дается в терминах характера Черна блоховского расслоения. Совпадение двух определений индекса можно интерпретировать как вариант теоремы Атьи–Зингера об индексе в рассматриваемой ситуации.

ВВ-соответствие

Построенные инварианты топологического диэлектрика можно также определить в терминах К-теории C^* -алгебр. В свою очередь, граница диэлектрика обладает топологическими инвариантами, которые определяются в терминах фредгольмовой К-теории. Одним из важных свойств топологических диэлектриков является наличие т.н.

ВВ-соответствия (от английского bulk-boundary) между топологическими инвариантами твердого тела и его границы. Алгебры наблюдаемых твердого тела и его границы связаны короткой точной последовательностью гомоморфизмов алгебр. Тогда ВВ-соответствие задается граничным отображением в длинной точной последовательности гомоморфизмов К-групп.

Перечисленные результаты излагаются в приводимых ниже статьях, а также в специальном лекционном курсе, который читается А.Г.Сергеевым в осеннем семестре 2023 года Научно-образовательного центра МИАН.

Публикации

- ❶ А.Г.Сергеев, Е.А.Тепляков, Топологические фазы в теории твердого тела, Изв. РАН. Сер. матем., 87:5 (2023), 204–214.
- ❷ I.Maresin, A.Sergeev, E.Teplyakov, On mathematical aspects of the theory of topological insulators, Acta Math. Sin., Engl. Ser., 2023 (принята к публикации и опубликована онлайн).
- ❸ А.Г.Сергеев, ВВ-соответствие в теории твердого тела, Труды Московского матем. общества, 2023 (принята к публикации).