

Критические ветвящиеся процессы,
развивающиеся в неблагоприятной случайной среде

Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е.

Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона

- Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_j^{(n)}$$

- $\xi_j^{(n)} \stackrel{d}{=} \xi$ независимы и одинаково распределены.
- Производящая функция числа потомков

$$f(s) := \mathbf{E}s^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k) s^k$$

$A := \mathbf{E}\xi = f'(1)$ - математическое ожидание числа потомков у одной частицы

- $\log A < 0$ - докритический,
 $\log A = 0$ - критический,
 $\log A > 0$ - надкритический.
- $\mathbf{E}Z_n = A^n = e^{n \log A} = e^{n \log f'(1)}$

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС)

- Производящие функции чисел потомков $F_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}}$ в поколениях $n = 0, 1, \dots$ **СЛУЧАЙНЫ И НЕЗАВИСИМЫ И ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫ**.

$\Rightarrow F'_n(1) := \mathbf{E}\xi^{(n)}$ – **НЕЗАВИСИМЫЕ И ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ** случайные величины;

•

$$Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \xi_j^{(n)}.$$

- $\xi_j^{(n)} \stackrel{d}{=} \xi^{(n)}$ **НЕЗАВИСИМЫ И ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫ** при фиксации набора $F_0, F_1, \dots$.

ПРИМЕР

$$F_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}} = \frac{q_n}{1 - p_n s} = \sum_{k=0}^{\infty} q_n p_n^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi^{(n)} = k) s^k,$$

где $q_n + p_n = 1$, и, например, $p_n, n = 0, 1, 2, \dots$ НЕЗАВИСИМЫ И

РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕНЫ на отрезке $[0, 1]$.

Классификация ветвящихся процессов, развивающихся в случайной среде с независимыми компонентами

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[Z_n \middle| F_0, F_1, \dots\right] &= \mathbf{E}_F\left[Z_n\right] = \prod_{j=0}^{n-1} F'_j(1) \\ &= e^{\sum_{j=0}^{n-1} \log F'_j(1)} = e^{S_n}\end{aligned}$$

где $S_0 = 0$ и при $n \geq 1$

$$\begin{aligned}S_n &= \log F'_0(1) + \log F'_1(1) + \dots + \log F'_{n-1}(1) \\ &= X_1 + X_2 + \dots + X_n\end{aligned}$$

где $X_i := \log F'_{i-1}(1)$

Последовательность

$$S_n = \log F'_0(1) + \log F'_1(1) + \cdots + \log F'_{n-1}(1)$$

называется **сопровождающим случайным блужданием** для соответствующего ветвящегося процесса в случайной среде. Имеем

$$\mathbf{E}_F[Z_n] = \prod_{j=0}^{n-1} F'_j(1) = e^{S_n}.$$

Классификация: ВПСС называется

- **над**критическим, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ с вероятностью единица;
- **до**критическим, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ с вероятностью единица;
- критическим, если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ (оба с вероятностью единица);

Замороженная среда (Quenched approach):

Изучение поведения характеристик ВПСС для типичных реализаций среды $F_0, F_1, \dots$

Пусть

$$T = \min\{n : Z_n = 0\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}_F(Z_n > 0) = \mathbf{P}_F(T > n) = \mathbf{P}(T > n | F_0, F_1, \dots)$$

является а случайной величиной на вероятностном пространстве возможных реализаций среды $F_0, F_1, \dots$. Например, для геометрического распределения числа потомков в каждом поколении

$$S_k = \log p_0/q_0 + \dots + \log p_{k-1}/q_{k-1}$$

и

$$\mathbf{P}_F(Z_n > 0) = \frac{1}{1 + e^{-S_1} + e^{-S_1} \dots + e^{-S_n}}$$

Усреднение по распределению компонент среды (Annealed approach):

Изучение поведения характеристик ВПСС, после усреднения по возможным сценариям $F_0, F_1, \dots$ случайной среды:

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) = \mathbf{E}[\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(Z_n > 0)]$$

– это число!

Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(Z_n > 0) &\leq \min_{0 \leq k \leq n} \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(Z_k > 0) \\ &\leq \min_{0 \leq k \leq n} \mathbf{E}_{\mathbf{F}}[Z_k] = \min_{0 \leq k \leq n} e^{S_k} = e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) = \mathbf{E}[\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(Z_n > 0)] \leq \mathbf{E}e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}.$$

Теперь мы перечислим наши основные ограничения на свойства случайного блуждания.

Условие А. Случайные величины $X_n, n \in \mathbb{N}$ являются независимыми вероятностными копиями случайной величины X принадлежащей области притяжения устойчивого закона с параметрами $0 < \alpha \leq 2, |\beta| < 1$. Кроме того, распределение случайной величины X является нерешетчатым.

Условие В.

Существуют $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\mathbf{E}[(\log^+ \gamma(b))^{\alpha+\varepsilon}] < \infty,$$

где $\log^+ x = \log(\max(x, 1))$.

Для любого события $\mathcal{D}$, зависящего только от среды,

$$\mathbf{P}(Z_n > 0; \mathcal{D}) = \mathbf{E}[\mathbf{P}_F(Z_n > 0); \mathcal{D}] \leq \mathbf{E} \left[e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}; \mathcal{D} \right].$$

Оказывается, что для многих событий $\mathcal{D}$

$$\mathbf{P}(Z_n > 0; \mathcal{D}) \sim C_{\mathcal{D}} \mathbf{E} \left[e^{\min_{0 \leq k \leq n} S_k}; \mathcal{D} \right].$$

Сводка результатов для случая $EX^2 < \infty$

- (Afanashev, Geiger, Kersting, V. (2005))

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},$$

причем для $x > 0$

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq x\sqrt{n}) \sim C(x)\mathbf{P}(Z_n > 0),$$

где

$$C(x) \in (0, 1) \quad \text{и} \quad C(0) = 0.$$

- (Afanashev, Geiger, Kersting, V. (2005))

$$\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},$$

причем для $x > 0$

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq x\sqrt{n}) \sim C(x)\mathbf{P}(Z_n > 0)$$

- Если $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$ и $\varphi(n) \rightarrow +\infty$, то (V., Dyakonova (2022))

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq \varphi(n)) \sim \frac{C\varphi^2(n)}{n^{3/2}} = o(\mathbf{P}(Z_n > 0)).$$

- Для любой фиксированной константы K (V., Dyakonova, Dong (2023))

$$\mathbf{P}(Z_n > 0, S_n \leq K) \sim \frac{C_K}{n^{3/2}} = o(\mathbf{P}(Z_n > 0)),$$

Найдены также условные предельные распределения вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\log Z_{[nt]}}{\sqrt{n}} \leq x \mid Z_n > 0, S_n \leq \varphi(n) \right), 0 < t < 1,$$

и для $m = o(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\log Z_{n-m}}{\sqrt{m}} \leq x \mid Z_n > 0, S_n \leq \varphi(n) \right)$$

Результаты доклада отражены в статьях

[1] В.А.Ватутин, Е.Е.Дьяконова «Критические ветвящиеся процессы, эволюционирующие в неблагоприятной среде», **Дискретная математика**, **2022**, т.34, вып.3, с.20-33.

[2] В.А.Ватутин, Е.Е.Дьяконова «Размер популяции критического ветвящегося процесса, эволюционирующего в неблагоприятной среде», **Теория вероятностей и ее применения**, **2023**, т.68, вып.3, с.509–531 .

[3] В.А. Ватутин, К. Донг, Е.Е. Дьяконова «Случайные блуждания, остающиеся неотрицательными, и ветвящиеся процессы в неблагоприятной среде», **Математический сборник**, **2023**, т.214, вып. 11, с.3-36.