О СВОЙСТВЕ МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Л.И. Родина

НИТУ «Московский институт стали и сплавов»

Свойство монотонности относительно начальных условий

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны.

Пусть $\varphi(t, x) = \big(\varphi_1(t, x), \ldots, \varphi_n(t, x)\big)$ — решение (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Для решения многих прикладных задач желательно, чтобы решения системы (1) обладали следующим свойством монотонности:

Свойство 1.

Пусть $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(0) \in \mathbb{R}^n$ *такие, что* $x(0) \leqslant y(0)$. *Тогда*

$$\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0)) \quad \text{для любого} \quad t \geqslant 0.$$

Неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать, как $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

План доклада

1. Приведены условия, при которых свойство 1 выполнено для линейной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$.
2. Получены условия на функцию $f(x)$, при которых свойство 1 выполнено для системы дифференциальных уравнений (1).
3. Показано, что данное свойство справедливо для любого дифференциального уравнения (1) (то есть при $n = 1$) и приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений.
4. Рассмотрена одна из задач, для исследования которой применяется указанное свойство – это задача оценки средней временной выгоды для систем со случайными параметрами, которая выполнена с вероятностью единица.

Свойство монотонности решений для линейных систем

Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

где A – постоянная матрица размеров $n \times n$.

Решение системы (2) можно записать в виде $\varphi(t, x) = e^{At}x$. Матрица A называется экспоненциально неотрицательной, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Матрица A называется матрицей Метцлера, если ее элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$, см. [2].

Лемма 1 (см. [1,2]).

Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.

1. Wazewski T. Systemes des equations et des inegalites differentieles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. 1950. V. 23. P. 112–166.
2. Noutsos D., Tsatsomeros M.J. Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM Journ. on Matrix Anal. and Appl. 2008. V. 30. № 2. P. 700–712.

Свойство монотонности для нелинейных систем

Замечание 1.

Отметим, что свойство 1 выполнено для дифференциального уравнения вида $\dot{x} = f(x)$. Для этого нужно показать, что при любом фиксированном $t > 0$ функция $x \mapsto \varphi(t, x)$ возрастающая. Действительно, если это не так, то существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(t, x_1) \geqslant \varphi(t, x_2)$. Тогда найдется точка $t_* \in (0, t]$, в которой $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения. Однако свойство 1 выполнено не для любой системы порядка два и выше.

Множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется положительно инвариантным относительно системы (1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D.

Свойство монотонности для нелинейных систем

Условие 1.

Пусть множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *положительно инвариантно относительно системы* (1). *Каждая из функций* f_i *является возрастающей на множестве* D *по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной* x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1.

Пусть выполнено условие 1. *Тогда, если для* $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ *имеет место неравенство* $x(0) \leqslant y(0)$, *то* $\varphi(t, x(0)) \leqslant \varphi(t, y(0))$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Замечание 2.

Если система (1) линейная и выполнено условие 1, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

Модели популяций, обладающие св-ом монотонности

Модели взаимодействия двух видов в классификации Е. Одума подробно описаны в [3]. Пусть численности видов равны x_1 и x_2, тогда данные модели могут быть описаны системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь параметры $a_i > 0$ – постоянные собственной скорости роста видов, $c_i > 0$ – постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} – постоянные взаимодействия видов, $i, j = 1, 2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип взаимодействия.

3. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск, 2002.

Модели популяций, обладающие св-ом монотонности

Свойством монотонности решений обладают не все системы (3); данное свойство выполнено для таких моделей, как
1) симбиоз — в этом случае $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$,
2) комменсализм — $b_{12} > 0$, $b_{21} = 0$,
3) нейтрализм — $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$.
Если хотя бы один из коэффициентов b_{ij} отрицательный, то свойство монотонности будет выполнено не для всех решений системы (3); это относится к таким моделям, как хищник-жертва, конкуренция и аменсализм.

Примером системы, обладающей свойством монотонности по части начальных условий для системы (3) является модель аменсализма ($b_{12} = 0$, $b_{21} < 0$). Тогда первое уравнение этой системы имеет вид $\dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2$ (не зависит от переменной x_2) и система (3) обладает свойством монотонности по начальному условию $x_1(0)$.

Оценки средней временной выгоды

Вопросы оптимального сбора ресурса из стохастической популяции, заданной дифференциальным уравнением (случай $n = 1$), исследовались в работах [4,5]. Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (случай $n > 1$).

4. Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 48–58.
5. Родина Л.И. Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 2. С. 213–221.

Модели структурированных популяций

Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где} \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0\}. \qquad (4)$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in [0,1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geqslant 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Можно рассматривать добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные.

Модель эксплуатируемой популяции

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем заданные значения $(u_1(k),\ldots,u_n(k)) = u(k) \in [0,1]^n$ в момент kd). В этом случае определенная часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k) \in [0,1]^n, \quad \text{где} \quad \ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \; x_i(kd) = \big(1 - \ell_i(k)\big) \cdot x_i(kd-0), \tag{5}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots$.
Предполагаем, что решения системы (5) непрерывны справа.

Определение средней временной выгоды

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots,$ зависящее от долей ресурса $\ell(1), \ldots, \ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса равна $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i(k) \ell_i(k)$.

Определение 1.

Средней временной выгодой от извлечения ресурса называется

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(j) \ell_i(j)\,.$$

Если предел существует, будем обозначать его $H\big(\overline{\ell}, x(0)\big)$.

Описание вероятностной модели

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0,1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\}$, где $\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \big\{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \ldots, \omega(k) \in A(k)\big\}, \quad \text{где} \quad A(j) \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 1, 2, \ldots$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k) = \widetilde{\mu}(A(1)) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A(k))$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Теорема 2.

Пусть $x(k)$ равно количеству ресурса после сбора в момент τ_k, тогда

$$X(k+1) = \varphi(d, x(k)) \quad \text{и} \quad x(k) = (1 - \ell(k))X(k).$$

Если $\ell_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \ldots,$ то $X(k)$ удовлетворяет

$$X(k+1) = \varphi\big(d, (1-u)X(k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Обозначим через $S(u) = \big(S_1(u), \ldots, S_n(u)\big)$ неподвижную точку (6), $s(u) \doteq (1-u)S(u)$. Рассмотрим случайные величины $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$ и обозначим через $M\ell_i = M\ell_i(k)$ их математическое ожидание.

Теорема 2.

Пусть выполнено свойство 1. *Тогда, если* $x(0) \geqslant s(u)$, *то для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$H_*\big(\bar{\ell}, x(0)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{n} C_i S_i(u) M\ell_i.$$

Модель симбиоза двух видов

Найдем оценку средней временной выгоды для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_1x_2 - cx_1^2, \\ \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1x_2 - cx_2^2, \end{cases}$$

где $a > 0$, $c > b > 0$.
Случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Модель симбиоза двух видов

Пусть $u_1 = u_2 = u < 1 - e^{-ad}$, тогда система (6) имеет положительную неподвижную точку с координатами

$$S_1(u) = S_2(u) = \frac{a\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad}-1)}.$$

При $x_i(0) \geqslant s_i(u) = (1-u)S_i(u)$, $i = 1, 2$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$H_*\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \geqslant \frac{a(C_1 + C_2)\big(e^{ad}(1-u) - 1\big)}{(c-b)(1-u)(e^{ad}-1)}\Big(u - \frac{u^2}{2}\Big),$$

где $u < 1 - e^{-ad}$.