Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 10. Генератор вполне положительной полугруппы. Квантовая относительная энтропия

Теретёнков Александр Евгеньевич

21 ноября 2023 г.

В прошлой серии...

Определение. Семейство отображений $\Phi_t : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall t \geqslant 0$ — (однопарамтерическая) вполне положительная непрерывная (сохраняющая след) полугруппа:

1. $\Phi_t \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \geqslant 0$, $\Phi_0 = I$.
2. Φ_t — непрерывна $\forall t \geqslant 0$ (достаточно непрерывности $t \to +0$).
3. Φ_t — вполне положительные, сохраняющее след $\forall t \geqslant 0$.

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Генератор вполне положительной полугруппы

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = \mathcal{L}\Phi_t,$$

$\mathcal{L}$ — генератор.

$$\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Доказательство:

1) Φ_t — вполне положительная однопараметрическая полугруппы.

Разложение Краусса в базисе.

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger, \qquad C \geqslant 0$$

Выберем ортонормированный базис такой, что $F_{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} I$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger + \sum_{i=1}^{n^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}} C_{in^2}(t) F_i \rho + h.c. + \frac{C_{n^2 n^2}(t)}{n} \rho$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\mathcal{L}(\rho) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Phi_\varepsilon(\rho)-\rho}{\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^{n^2-1}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i\rho F_j^\dagger +$$

$$+\sum_{i=1}^{n^2-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{in^2}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i\rho + h.c. + \frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{n^2n^2}(\varepsilon)-n}{\varepsilon}\rho$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad i,j = 1,\ldots,n^2-1$$

$$F = \sum_{i=1}^{n^2-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{in^2}(\varepsilon)}{\varepsilon}F_i$$

$$a_{n^2n^2} = \frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{C_{n^2n^2}(\varepsilon)-n}{\varepsilon}$$

(Неотрицательность a_{ij} следует из неотрицательности $C_{ij}(\varepsilon)$.)

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F\rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2}\rho =$$

$$= -i[H,\rho] + \{G,\rho\} + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger$$

$$H = \frac{1}{2i}(F^\dagger - F), \qquad G = \frac{1}{2} a_{n^2 n^2} I + \frac{1}{2}(F^\dagger + F)$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Выразим G через a_{ij} и базис F_i с помощью условия нормировки $\operatorname{tr}\mathcal{L}(\rho) = 0$:

$$0 = \operatorname{tr}\left(2G + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i\right)\rho$$

В силу произвольности ρ:

$$G = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i$$

Генератор вполне положительной полугруппы

2) $\mathcal{L}$ — ГКСЛ генератор.

По формуле Троттера $e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{N}\mathcal{A}} e^{\frac{1}{N}\mathcal{B}}\right)^N$

Применим к

$$\mathcal{L}(\rho) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger}_{\mathcal{A}(\rho)} + \underbrace{(G - iH)\rho + \rho(G + iH)}_{\mathcal{B}(\rho)}$$

$$e^{\mathcal{L}t} = \lim_{N\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{N} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \cdot F_j^\dagger \right) e^{\frac{t}{N}(G-iH)} \cdot e^{\frac{t}{N}(G+iH)} \right)^N$$

Оба члена вполне положительны, поэтому и предел вполне положителен.

Генератор вполне положительной полугруппы

Кроме того, сохранение следа следует из ряда Тейлора (удобнее проверить сохранение единицы сопряжённым генератором):

$$(e^{\mathcal{L}t})^* I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{L}^*)^k I = I$$

$\square$

Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 1. Если не требовать сохранения следа, то очевидно мы остановимся на:

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F\rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2}\rho,$$

или

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_j C_j \rho C_j^\dagger + K\rho + \rho K^\dagger.$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \Psi(\rho) + K\rho + \rho K^\dagger.$$

Ψ — вполне положительное.

Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 2.

$$\mathcal{L}(\rho) = \Psi(\rho) + K\rho + \rho K^\dagger.$$

можно также эквивалентно охарактеризовать с помощью условной вполне положительности:

$$\sum_{i,j=1}^{k} \langle \psi_i | \mathcal{L}(X_i^\dagger X_j) | \psi_j \rangle \geqslant 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}, X_i \in \mathbb{C}^{n\times n}, |\psi_j\rangle \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\sum_{j=1}^{k} X_j |\psi_j\rangle = 0$.

Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 3. Ещё одна эквивалентная характеризация условно вполне положительных отображений может быть получена по аналогии с представлением Чоя-Ямилковского:

$$P = I_{n^2} - |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

$$P(\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{n^2})(|\Omega\rangle\langle\Omega|)P \geqslant 0$$

Замечание 4. Аналогично для пропагаторов, но будет зависящий от t ГКСЛ-генератор (CP-делимость.)

Генератор положительной полугруппы

Генератор $\mathcal{L}$ — положительной сохраняющей след полугруппы $\Leftrightarrow$ Для любого ортогонального разложения единицы P_x выполнено

$$\mathrm{Tr}(P_x \mathcal{L}(P_y)) \geqslant 0, \qquad x \neq y$$

и $\sum_x \mathrm{Tr}(P_x \mathcal{L}(P_y)) = 0$.

Генератор положительной полугруппы

Генератор $\mathcal{L}$ — сохраняющей след и эрмитовость полугруппы $\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — ГКСЛ-генераторы.

Квантовая относительная энтропия

Определение. Пусть ρ, σ — матрицы плотности в $\mathbb{C}^n$

$$S(\rho||\sigma) = \operatorname{Tr}\rho\ln\rho - \operatorname{Tr}\rho\ln\sigma, \qquad \ker\rho = \ker\sigma = \{0\}$$

В общем случае введём носитель матрицы плотности

$$\operatorname{supp}\rho = \operatorname{sign}\rho \ \cdot \mathbb{C}^n.$$

$$S(\rho||\sigma) =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Tr}\rho|_{\operatorname{supp}\rho}\ln\rho|_{\operatorname{supp}\rho} - \operatorname{Tr}\rho|_{\operatorname{supp}\sigma}\ln\sigma|_{\operatorname{supp}\sigma}, & \operatorname{supp}\rho \subseteq \operatorname{supp}\sigma \\ +\infty, & \operatorname{supp}\rho \nsubseteq \operatorname{supp}\sigma \end{cases}$$

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geqslant 0, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geqslant 0, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Доказательство: Используя разложение в ряд Тейлора функции $\eta(\lambda) = -\lambda \ln \lambda$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu) + (\lambda - \mu)\eta'(\mu) + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \eta''(\xi), \quad 0 < \lambda < \xi < \mu \leqslant 1$$

С учётом $\eta'(\lambda) = -1 - \ln \lambda$, $\eta''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}$, получаем

$$-\lambda \ln \lambda = -\mu \ln \mu - (\lambda - \mu) - (\lambda - \mu) \ln \mu - \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi}$$

Квантовая относительная энтропия

$$\lambda \ln \lambda - \lambda \ln \mu = \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi} \geqslant \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2$$

(с учётом $\xi < 1$)
В частности, и в пределе $\lambda \to +0$

$$0 \geqslant -\mu + \frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{при } \mu \in [0,1]$$

$$\rho = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|, \qquad \sigma = \sum_k \mu_k |h_k\rangle\langle h_k|$$

$$S(\rho||\sigma) = \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 \left(\lambda_j \ln \lambda_j - \lambda_j \ln \mu_k\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k)^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\rho - \sigma)^2$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, мы доказали, что

$$S(\rho||\sigma) \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Очевидно, $\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2 \geqslant 0$, причём, если $\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2 = 0$, то $\rho = \sigma$. □