

# Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 12. Усреднение по классическим процессам. Предел слабой связи

Теретёнков Александр Евгеньевич

5 декабря 2023 г.

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

**Утверждение.** Пусть  $\xi_t, t \geq 0$  — классический случайных процесс Леви (классический резервуар), то есть

- ❶  $\xi_0 = 0$
- ❷  $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$   
(независимость приращений)
- ❸ При  $t > s$  приращения  $\xi_t - \xi_s$  и  $\xi_{t-s} - \xi_0$  распределены одинаково (стационарность приращений)
- ❹ Непрерывный (по вероятности).

Тогда

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t}. \quad A = A^\dagger$$

определяет однопараметрическую непрерывную вполне положительную полугруппу сохраняющую след.

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

**Доказательство:**

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t} = \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s} e^{iA(\xi_t - \xi_s)} =$$

с учётом независимости и стационарности

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} (\mathbb{E} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s}) e^{iA(\xi_t - \xi_s)} = \mathbb{E} e^{-iA\xi_{t-s}} \Phi_s \rho e^{iA\xi_{t-s}} = \\ &= \Phi_{t-s} \Phi_s \rho \end{aligned}$$

Непрерывность полугруппы следует из непрерывности (по вероятности) случайного процесса. □

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Отметим, что  $\Phi_t(I) = \mathbb{E}_{\xi_t} e^{-iA\xi_t} I e^{iA\xi_t} = \mathbb{E}_{\xi_t} I = I$ . Таким образом, отображение  $\Phi_t$  является бистахастическим, а следовательно приводит к возрастанию энтропии  $S(\Phi_t(\rho)) \geq S(\rho)$ .

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

**Упражнение.** Проверить, что двухвременная корреляционная функция  $(\mathcal{U}_s = e^{-iA\xi_s} \cdot e^{iA\xi_s})$  удовлетворяет регрессионной теореме

$$\mathbb{E} \operatorname{Tr}(A\mathcal{U}_{t-s}(B\mathcal{U}_s\rho)) = \operatorname{Tr}(A\Phi_{t-s}(B\Phi_s\rho))$$

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

## 1) Винеровский процесс

$$W_t, t \geq 0, W_0 = 0$$

$$W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$$

— центрированное нормальное распределение.

$$\Phi_t(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-iAx} \rho e^{iAx}$$

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

Вычислим генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(\rho) - \rho}{t}$$

Для этого преобразуем

$$\begin{aligned}\Phi_t(\rho) &= /x = u\sqrt{t}/ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-iAu\sqrt{t}} \rho e^{iAu\sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-\frac{u^2}{2}} \left( 1 - iAu\sqrt{t} - \frac{1}{2}A^2u^2t + o(t) \right) \rho \\ &\quad \left( 1 + iAu\sqrt{t} - \frac{1}{2}A^2u^2t + o(t) \right) = \\ &= \rho - i[A, \rho] \langle u \rangle \sqrt{t} + \left( A\rho A - \frac{1}{2}\{A^2, \rho\} \right) \langle u^2 \rangle t + o(t),\end{aligned}$$

где  $\langle \cdot \rangle$ -усреднение по  $N(0,1)$ , то есть  $\langle u \rangle = 0, \langle u^2 \rangle = 1$ .

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

Получим

$$\mathcal{L}(\rho) = A\rho A - \frac{1}{2}\{A^2, \rho\}$$

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

2)  $\xi_t$  — Пуассоновский процесс

$$P(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-iAk} \rho e^{iAk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} U^k \rho (U^\dagger)^k,$$

где введено обозначение  $U = e^{-iA}$ . Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} U^k \rho (U^\dagger)^k$$

есть не что иное как ряд Тейлора для экспоненты от супероператора  $\lambda t(U \cdot U^\dagger)$ .

# Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам. Примеры

Таким образом

$$\Phi_t(\rho) = e^{-\lambda t} e^{\lambda t(U \cdot U^\dagger)} \rho = e^{\lambda t(U \cdot U^\dagger - \mathcal{I})} \rho$$

Получим генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lambda(U \rho U^\dagger - \rho)$$

Отметим, что генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = \lambda(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)$$

попадает под оба случая.

# Представление Леви-Хинчина

В качестве распределений независимых приращений могут выступать не произвольные распределения, а так называемые бесконечно-делимые. В результате для характеристической функции  $\mathbb{E}e^{i\xi t\theta}$  имеется представление Леви-Хинчина

$$\mathbb{E}e^{i\xi t\theta} = \exp \left( t \left( ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left( e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1} \right) \mu(dx) \right) \right),$$

где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\mu$  — (положительная счётно-аддитивная) мера, называемая мерой Леви, удовлетворяющая

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) \mu(dx) < \infty, \quad \mu(\{0\}) = 0.$$

# Представление Леви-Хинчина

В качестве распределений независимых приращений могут выступать не произвольные распределения, а так называемые бесконечно-делимые. В результате для характеристической функции  $\mathbb{E}e^{i\xi t\theta}$  имеется представление Леви-Хинчина

$$\mathbb{E}e^{i\xi t\theta} = \exp \left( t \left( ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left( e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I_{|x|<1} \right) \mu(dx) \right) \right),$$

где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\mu$  — (положительная счётно-аддитивная) мера, называемая мерой Леви, удовлетворяющая

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) \mu(dx) < \infty, \quad \mu(\{0\}) = 0.$$

Если вместо этого рассматривать поля Леви, то можно получить суммы членов соответствующего вида.

# Предел слабой связи

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)], \quad H_I(t) \equiv e^{i(H_S+H_B)t} H_I e^{-i(H_S+H_B)t}$$

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \quad A_{\alpha}^{\dagger} = A_{\alpha}, \quad B_{\alpha}^{\dagger} = B_{\alpha}$$

$$H_S = \sum_{\varepsilon} \varepsilon \Pi(\varepsilon)$$

# Предел слабой связи

Тогда введём

$$A_\alpha(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \omega} \Pi(\varepsilon) A_\alpha \Pi(\varepsilon')$$

Разложение

$$A_\alpha = \sum_{\omega} A_\alpha(\omega)$$

есть ни что иное как разложение оператора  $A_\alpha$  по собственным операторам супероператора  $[H_S, \cdot]$ . Действительно

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

# Предел слабой связи

$$e^{iH_S t} A_\alpha(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$$
$$B_\alpha(t) \equiv e^{iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t}$$

# Предел слабой связи

Наложим условие

$$\langle B_\alpha(t) \rangle = 0$$

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \equiv \int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle$$

и разложим

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) + i S_{\alpha\beta}(\omega, t),$$

$$S_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2i} (\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)), \quad \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)$$

# Предел слабой связи

В представлении взаимодействия:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t))$$

Гамильтониан Лэмбовского и Штарковского сдвигов:

$$H_{LS}(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega, t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

Диссипатор

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \left( A_{\beta}(\omega) \rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S \} \right)$$

## Предел слабой связи: физический вывод

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)]$$

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i \text{Tr}_B[H_I(t), \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds]$$

Если предположить  $\text{Tr}_B[H_I(t), \rho(0)] = 0$ , то

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]] ds$$