

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 13. Предел слабой связи. Физический вывод

Теретёнков Александр Евгеньевич

12 декабря 2023 г.

В прошлой серии...

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)], \quad H_I(t) \equiv e^{i(H_S+H_B)t} H_I e^{-i(H_S+H_B)t}$$

$$H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \quad A_{\alpha}^{\dagger} = A_{\alpha}, \quad B_{\alpha}^{\dagger} = B_{\alpha}$$

$$H_S = \sum_{\varepsilon} \varepsilon \Pi(\varepsilon)$$

В прошлой серии...

Тогда введём

$$A_\alpha(\omega) \equiv \sum_{\varepsilon' - \varepsilon = \omega} \Pi(\varepsilon) A_\alpha \Pi(\varepsilon')$$

Разложение

$$A_\alpha = \sum_{\omega} A_\alpha(\omega)$$

есть ни что иное как разложение оператора A_α по собственным операторам супероператора $[H_S, \cdot]$. Действительно

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

В прошлой серии...

$$e^{iH_S t} A_\alpha(\omega) e^{-iH_S t} = e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega)$$
$$B_\alpha(t) \equiv e^{iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t}$$

В прошлой серии...

Наложим условие

$$\langle B_\alpha(t) \rangle = 0$$

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \equiv \int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_\alpha^\dagger(t) B_\beta(t-s) \rangle$$

и разложим

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) + i S_{\alpha\beta}(\omega, t),$$

$$S_{\alpha\beta}(\omega, t) = \frac{1}{2i} (\Gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)), \quad \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) = \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega, t)$$

В прошлой серии...

В представлении взаимодействия:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \mathcal{D}(\rho_S(t))$$

Гамильтониан Лэмбовского и Штарковского сдвигов:

$$H_{LS}(t) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega, t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

Диссипатор

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega, t) \left(A_{\beta}(\omega) \rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S \} \right)$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(t)]$$

$$\rho(t) = \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_I(t), \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds]$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i \text{Tr}_B[H_I(t), \rho(0) - i \int_0^t [H_I(s), \rho(s)] ds]$$

Если предположить $\text{Tr}_B[H_I(t), \rho(0)] = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho(s)]] ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

1) Приближение Борна:

$$\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_B$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]] ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

2) Приближение Маркова:

$$\rho_S(s) \approx \rho_S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

— уравнение Редфильда (Redfield).

Преобразуем:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^t \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

Предел слабой связи: физический вывод

3) Приближение Борна-Маркова (не независимое от предыдущих приближений):

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = - \int_0^{+\infty} \text{Tr}_B[H_I(t), [H_I(t-s), \rho_S(t) \otimes \rho_B]]ds$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_S(t) = \int_0^{+\infty} & \text{Tr}_B(H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B H_I(t) - \\ & - H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B)ds + \text{h.c.} \end{aligned}$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$H_I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} A_{\alpha}(\omega) \otimes B_{\alpha}(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{i\omega t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) \otimes B_{\alpha}^{\dagger}(t)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \text{Tr}_B(H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B H_I(t))ds = \\ &= \sum_{\beta, \omega} \sum_{\alpha, \omega'} \int_0^{+\infty} \text{Tr}_B(e^{-i\omega(t-s)} A_{\beta}(\omega) \otimes B_{\beta}(t-s) \rho_S(t) \otimes \rho_B e^{i\omega' t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') \otimes B_{\alpha}^{\dagger}(t))ds = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \omega', \omega} e^{i(\omega' - \omega)t} A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') \underbrace{\int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s} \text{Tr}_B B_{\beta}(t-s) \rho_B B_{\alpha}^{\dagger}(t)}_{\Gamma_{\alpha\beta}(t, \omega)} \end{aligned}$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \text{Tr}_B(H_I(t)H_I(t-s)\rho_S(t) \otimes \rho_B)ds = \\
 &= \sum_{\beta,\omega} \sum_{\alpha,\omega'} \int_0^{+\infty} \text{Tr}_B(e^{i\omega't} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') \otimes B_{\alpha}^{\dagger}(t) e^{-i\omega(t-s)} A_{\beta}(\omega) \otimes B_{\beta}(t-s) \rho_S(t) \otimes \rho_B)ds = \\
 &= \sum_{\alpha,\beta,\omega',\omega} e^{i(\omega'-\omega)t} A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \underbrace{\int_0^{+\infty} ds e^{i\omega s} \text{Tr}_B B_{\alpha}^{\dagger}(t) B_{\beta}(t-s) \rho_B}_{\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta,\omega',\omega} e^{i(\omega'-\omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) (A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') - A_{\alpha}^{\dagger}(\omega') A_{\beta}(\omega) \rho_S(t)) + \text{h.c.}$$

Предел слабой связи: физический вывод

4) Секулярное приближение:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) (A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega)A_\beta(\omega)\rho_S(t)) + \text{h.c.}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) \right)^\dagger &= \sum_{\alpha,\beta} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\alpha(\omega)\rho_S(t)A_\beta^\dagger(\omega) = \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}(t,\omega) A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) \\ \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) + \text{h.c.} &= \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{(\Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) + \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}(t,\omega))}_{\gamma_{\alpha\beta}(t,\omega)} A_\beta(\omega)\rho_S(t)A_\alpha^\dagger(\omega) \end{aligned}$$

Предел слабой связи: физический вывод

$$\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(t,\omega) \rho_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) + i S_{\alpha\beta}(t,\omega) \right) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t)$$

$$\left(\sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega) \rho_S(t) \right)^{\dagger} = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) - i S_{\alpha\beta}(t,\omega) \right) \rho_S(t) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

$$H_{LS} = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} S_{\alpha\beta}(t,\omega) A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega)$$

$$\mathcal{D}(\rho_S) = \sum_{\omega} \sum_{\alpha,\beta} \gamma_{\alpha\beta}(t,\omega) \left(A_{\beta}(\omega) \rho_S A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{2} \{ A_{\alpha}^{\dagger}(\omega) A_{\beta}(\omega), \rho_S \} \right)$$



Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t} \rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\text{Tr}_B B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B = \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B$$

Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t} \rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\text{Tr}_B B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B = \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B &= \text{Tr}_B e^{iH_B t} B_k^\dagger e^{-iH_B t} e^{iH_B(t-s)} B_j e^{-iH_B(t-s)} \rho_B = \\ &= \text{Tr}_B e^{iH_B s} B_k^\dagger e^{-iH_B s} B_j \rho_B = \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B \end{aligned}$$

Стационарный резервуар

Напомним, что

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Поэтому в любом состоянии стационарном относительно свободной эволюции $e^{-iH_B t} \rho_B e^{iH_B t} = \rho_B$ корреляционные функции резервуара также являются стационарными

$$\text{Tr}_B B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B = \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B B_k^\dagger(t) B_j(t-s) \rho_B &= \text{Tr}_B e^{iH_B t} B_k^\dagger e^{-iH_B t} e^{iH_B(t-s)} B_j e^{-iH_B(t-s)} \rho_B = \\ &= \text{Tr}_B e^{iH_B s} B_k^\dagger e^{-iH_B s} B_j \rho_B = \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B \end{aligned}$$

И $\Gamma_{\alpha\beta}(\omega)$ не зависят от времени.

Пример

2-уровневая система:

$$H_S = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$$

Напомним, что $A_\alpha(\omega)$ определялись как разложение A_α по собственным операторам супероператора $[H_S, \cdot]$:

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Ясно, что спектр боровских частот состоит из 3 чисел $0, \pm\omega_0$ с собственными операторами:

$$[H_S, \sigma_\pm] = -(\mp\omega_0)\sigma_\pm, \quad [H_S, \sigma_+\sigma_-] = 0, [H_S, I] = 0$$

Пример

Таким образом,

$$A_\alpha(\mp\omega_0) \sim \sigma_\pm, \quad A_\alpha(0) \sim \sigma_z + \text{const}$$

Таким образом, общий вид уравнения ГКСЛ для двухуровневой системы в пределе слабой связи, определяется:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\rho) = & \gamma(\omega_0) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + \gamma(-\omega_0) \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right) + \\ & + \gamma(0) (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho) \end{aligned}$$

$$H_{LS} = \Delta\omega \sigma_+ \sigma_-$$

Переход в представление Шредингера

В случае 2-уровневой системы мы уже видели, что

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega)$$

Приводите, к тому, что

$$e^{-i[H_S, \cdot]t} \mathcal{D} e^{i[H_S, \cdot]t} = \mathcal{D}$$

$$e^{-i[H_S, \cdot]t} [H_{LS}, \cdot] e^{i[H_S, \cdot]t} = [H_{LS}, \cdot]$$

Поэтому переход в представление Шредингера осуществляется просто посредством замены $H_{LS} \rightarrow H_S + H_{LS}$

Ситуация общего положения

Если спектр ненулевых боровских частот невырожден, а нулевые частоты не вносят вклада, то спектр H_S тем более невырожден, переходя его собственный базис

$$H_S = \sum \varepsilon_j |j\rangle\langle j|$$

Получаем, что

$$A_\alpha(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \sim |i\rangle\langle j|$$

Таким образом, ГКСЛ генератор в пределе слабой связи общего положения определяется

$$\mathcal{D}(\rho) = \sum_{ij} \gamma_{ij} \left(|i\rangle\langle j| \rho |j\rangle\langle i| - \frac{1}{2} |j\rangle\langle j| \rho - \frac{1}{2} \rho |j\rangle\langle j| \right)$$

$$H_{LS} = \sum_j \Delta\omega_j |j\rangle\langle j|$$

Равновесный резервуар

В Гиббсовском равновесии:

$$\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\text{Tr } e^{-\beta H_B}}$$

Равновесный резервуар

В Гиббсовском равновесии:

$$\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\text{Tr} e^{-\beta H_B}}$$

Условия Кубо-Мартина-Швингера (КМШ)

$$\text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B = \text{Tr}_B B_j(0) B_k^\dagger(s + i\beta) \rho_B$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B B_k^\dagger(s) B_j(0) \rho_B &= \frac{\text{Tr}_B e^{iH_B s} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B s} B_j(0) e^{-\beta H_B}}{\text{Tr} e^{-\beta H_B}} = \\ &= \frac{\text{Tr}_B B_j(0) e^{-\beta H_B} e^{iH_B s} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B s}}{\text{Tr} e^{-\beta H_B}} = \\ &= \frac{\text{Tr}_B B_j(0) e^{iH_B(s+i\beta)} B_k^\dagger(0) e^{-iH_B(s+i\beta)} e^{-\beta H_B}}{\text{Tr} e^{-\beta H_B}} = \\ &= \text{Tr}_B B_j(0) B_k^\dagger(s + i\beta) \rho_B \end{aligned}$$

Равновесный резервуар

Напомним

$$\gamma_{jk}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \text{Tr}_B B_j^\dagger(s) B_k(0) \rho_B$$

Упражнение. Показать, что $\gamma_{jk}(-\omega) = e^{-\beta\omega} \gamma_{kj}(\omega)$ в случае, если выбрать $B_j^\dagger = B_j$.

Получили:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\rho_S) = & \sum_{\omega>0} \sum_{j,k} \gamma_{jk}(\omega) \left(A_k(\omega) \rho_S A_j^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{A_j^\dagger(\omega) A_k(\omega), \rho_S\} \right) + \\ & + \sum_{\omega>0} \sum_{j,k} e^{-\beta\omega} \gamma_{jk}(\omega) \left(A_k^\dagger(\omega) \rho_S A_j(\omega) - \frac{1}{2} \{A_j(\omega) A_k^\dagger(\omega), \rho_S\} \right) + \\ & + \sum_{j,k} \gamma_{jk}(0) \left(A_k(0) \rho_S A_j(0) - \frac{1}{2} \{A_j(0) A_k(0), \rho_S\} \right) \\ (A_k(0) = & A_k^\dagger(0))\end{aligned}$$

Пример

Для 2-уровневой системы имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\rho) = & \gamma(\omega_0) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ & + e^{-\beta \omega_0} \gamma(\omega_0) \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right) + \\ & + \gamma(0) (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho)\end{aligned}$$

$$H_{LS} = \Delta \omega \sigma_+ \sigma_-$$