Сэмплинг в пространствах, инвариантных относительно сдвига, порожденных двумерным Гауссианом

Илья Злотников

Мы обсудим задачи о сэмплинге в пространстве, образованном целочисленными сдвигами двумерного Гауссиана:

$$V_a^2(\mathbb{R}^2) := \Big\{ f(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} c_{n,m} e^{-a(x-n)^2-a(y-m)^2} : c \in \ell^2(\mathbb{Z}^2) \Big\}. \tag{1}$$

Во-первых, мы рассмотрим так называемую задачу *мобильного сэмплинга* для семейства параллельных прямых на плоскости

$$\Lambda := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\cdot\vec{v} \in \Gamma\}, \quad \Gamma \subset \mathbb{R} \text{ р.д. множество.} \tag{2}$$

Мы установим необходимое и достаточное условие на множество Λ в терминах плотности множества сдвигов Γ и вектора v, гарантирующее, что Λ есть множество мобильного сэмплинга для $V_a^2(\mathbb{R}^2)$ (в частности, это означает что никакая нетривиальная функция из пространства $V_a^2(\mathbb{R}^2)$ не может обнуляться на Λ). Любопытно, что в отличие от классических (для подобного рода задач) пространств Пэли-Винера (см. [2]), результаты зависят от “рациональности” наклона прямых. Например, для единичного вектора

$$\vec{v} = \frac{(q,p)}{\sqrt{p^2+q^2}}, \quad p,q\in\mathbb{Z},\ \gcd(p,q)=1,$$

мы утверждаем, что Λ есть множество мобильного сэмплинга, если

$$D^-(\Gamma) \geq \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

где через D^- мы обозначили нижнюю равномерную плотность.

Во-вторых, мы рассмотрим задачу *классического сэмплинга* в пространстве $V_a^2(\mathbb{R}^2)$ для широкого класса решёток на плоскости. Наконец, используя хорошо известную связь между пространствами $V_a^2(\mathbb{R}^2)$ и Габоровскими фреймами, мы обсудим новые примеры двумерных решёток S с плотностью близкой к 1, для которых система

$$\mathcal{G}(e^{-x^2-y^2}, S\times\mathbb{Z}^2) = \{e^{2\pi i x n} e^{2\pi i y k} e^{-(x-s_1)^2-(y-s_2)^2},\ (s_1,s_2,n,k)\in S\times\mathbb{Z}^2\}$$

образует фрейм в $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Доклад по совместной работе с Х. Л. Ромеро и А. Улановским [1].

Список литературы

[1] José Luis Romero, Alexander Ulanovskii, Ilya Zlotnikov, *Sampling in the shift-invariant space generated by the bivariate Gaussian function,* preprint: arxiv.org/abs/2306.13619

[2] Alexander Rashkovskii, Alexander Ulanovskii, Ilya Zlotnikov, *On 2-dimensional mobile sampling*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 62, 1-23, (2023) DOI: 10.1016/j.acha.2022.08.001.