

Компьютерное моделирование динамических процессов в неоднородных деформируемых средах

Чл.-корр.РАН Петров И.Б



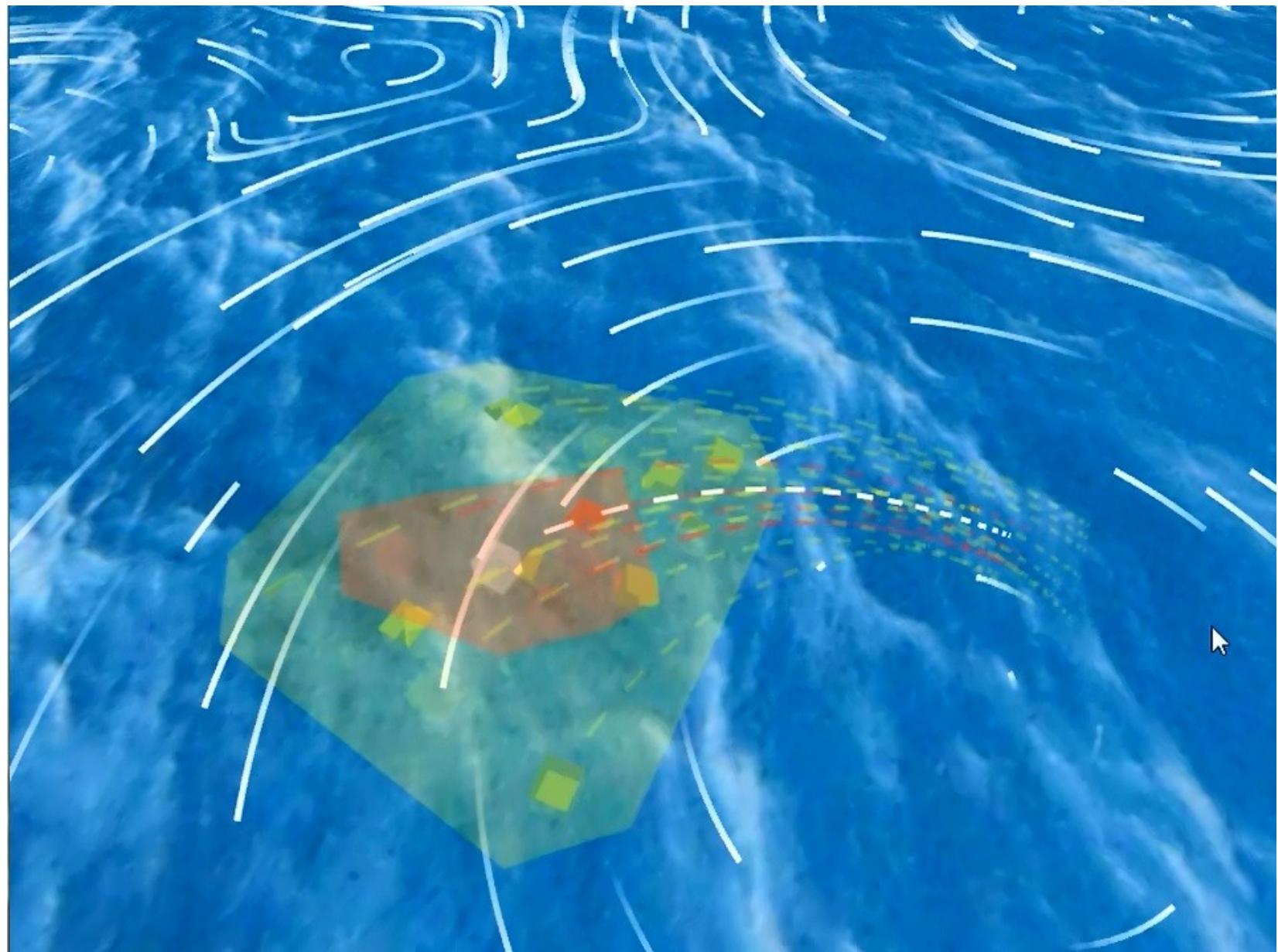


Вычислительные задачи Арктики

1. Прямые и обратные задачи сейсморазведки. Задачи миграции и инверсии.
2. Прямые и обратные задачи электроразведки;
3. Комплексные задачи сеймо- и электроразведки;
4. Расчет механических и прочностных характеристик льда, как твердого деформируемого тела;
5. Задачи миграции (дрейфа) крупных ледовых образований (КЛО);
6. Задачи безопасности морских стационарных ледостойких платформ (МСЛСП) и плавающих (якорных) платформ нефтегазовой промышленности при воздействии природных факторов (ЛО);
7. Задачи заторашивания МСЛП;
8. Моделирование процессов образования КЛО;
9. Расчет на прочность нефтегазо-проводов, наземных и поддонных;
10. Проблемы безопасного плавания судов ледового класса при наличии КЛО;
11. Посадка самолета на плавающую льдину (ледовое поле).

12. Расчет на прочность ледового покрытия при движении по нему транспортных средств.
13. Воздействия периодических и сейсмических нагрузок на технические сооружения в Арктике.
14. Климатические задачи Арктики.
15. Прогнозирование динамики ледовой обстановки с учетом обработки данных наблюдений в воздушном и водном бассейнах Арктики.
16. Обнаружение “метановых бомб” на Ямале.
17. Задачи геомеханики (расчет локализации контактных поверхностей в геологических средах).
18. Определение положения газоносных слоев вблизи скважины (задачи безопасности скважин).
19. Расчет поля температур в КЛО с учетом фазовых переходов, солнечной радиации и разрушения льда при их движении в Северных морях.
20. Расчет жизненного цикла ледового острова с учетом тепловых, радиационных и механических нагрузок.
21. Проблема связи в Арктической зоне РФ.
22. Проблема жизнеобеспечения в условиях низких температур.





Фотография повреждений корабля

R.E. Gagnon, J. Wang Numerical simulations of a tanker collision with a bergy bit incorporating hydrodynamics, a validated ice model and damage to the vessel // Cold regions. Science and Technology, 2012.









Meet – bvq-ufsm-tkc Meet – bvq-ufsm-tkc

Я meet.google.com

A Алексей Добродеев сейчас на главном экране

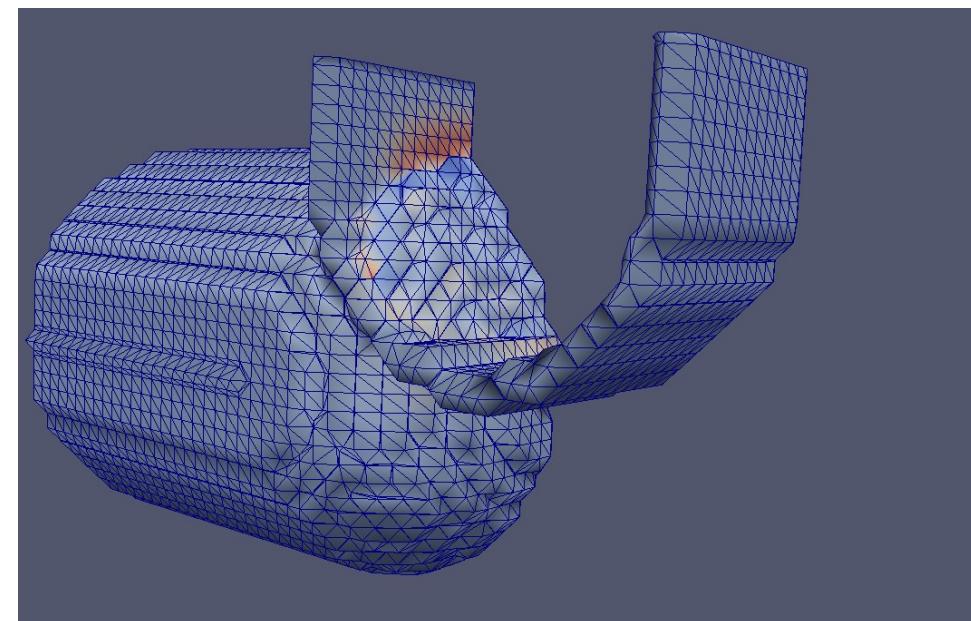
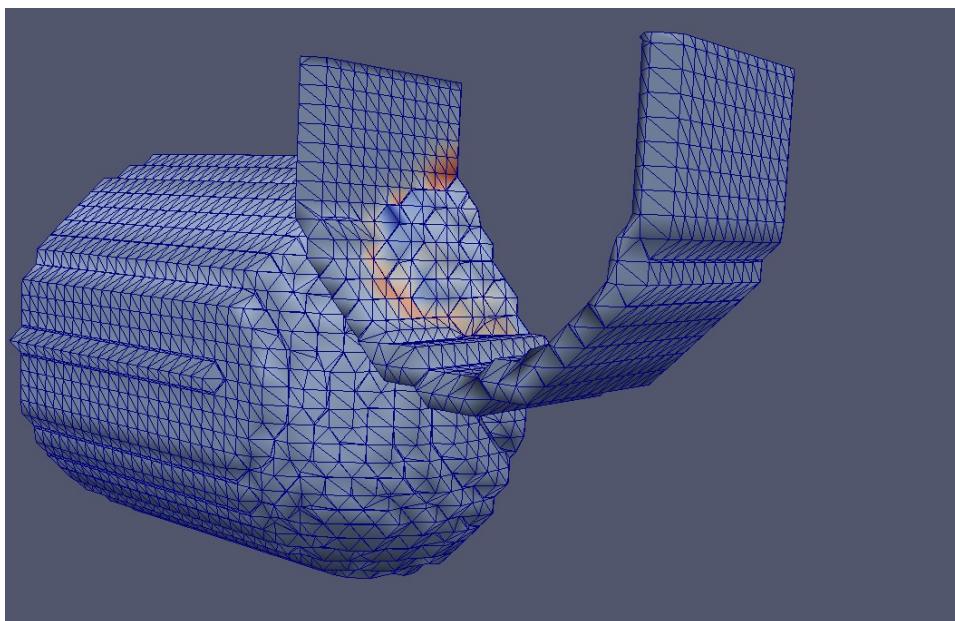
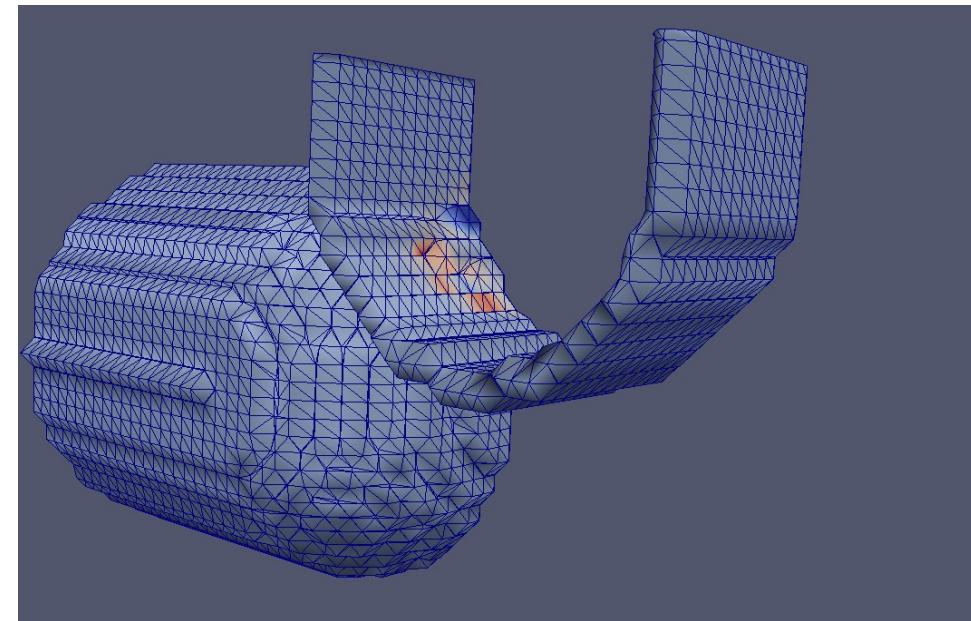
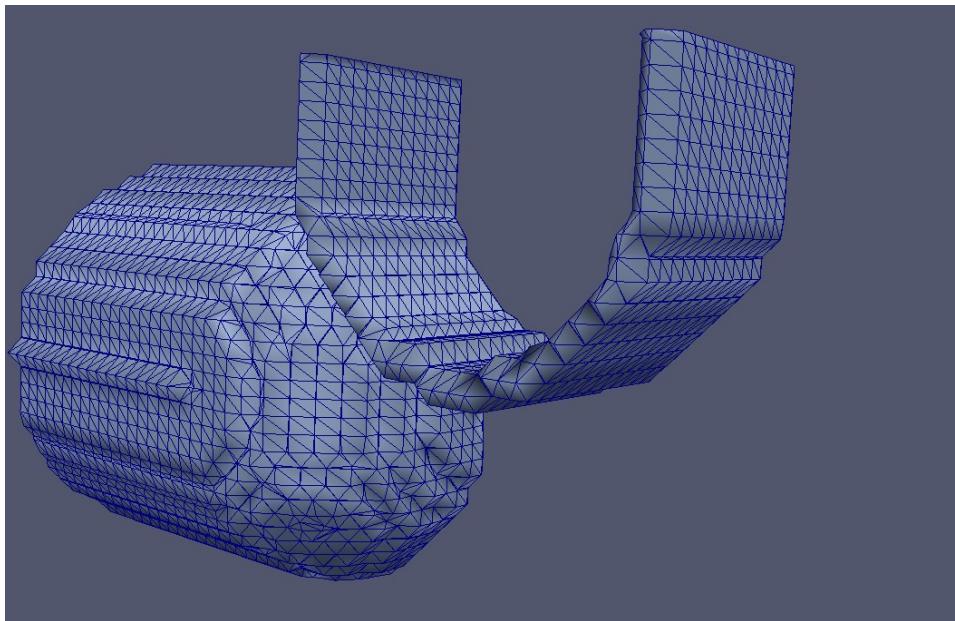
Meet – bvq-ufsm-tkc

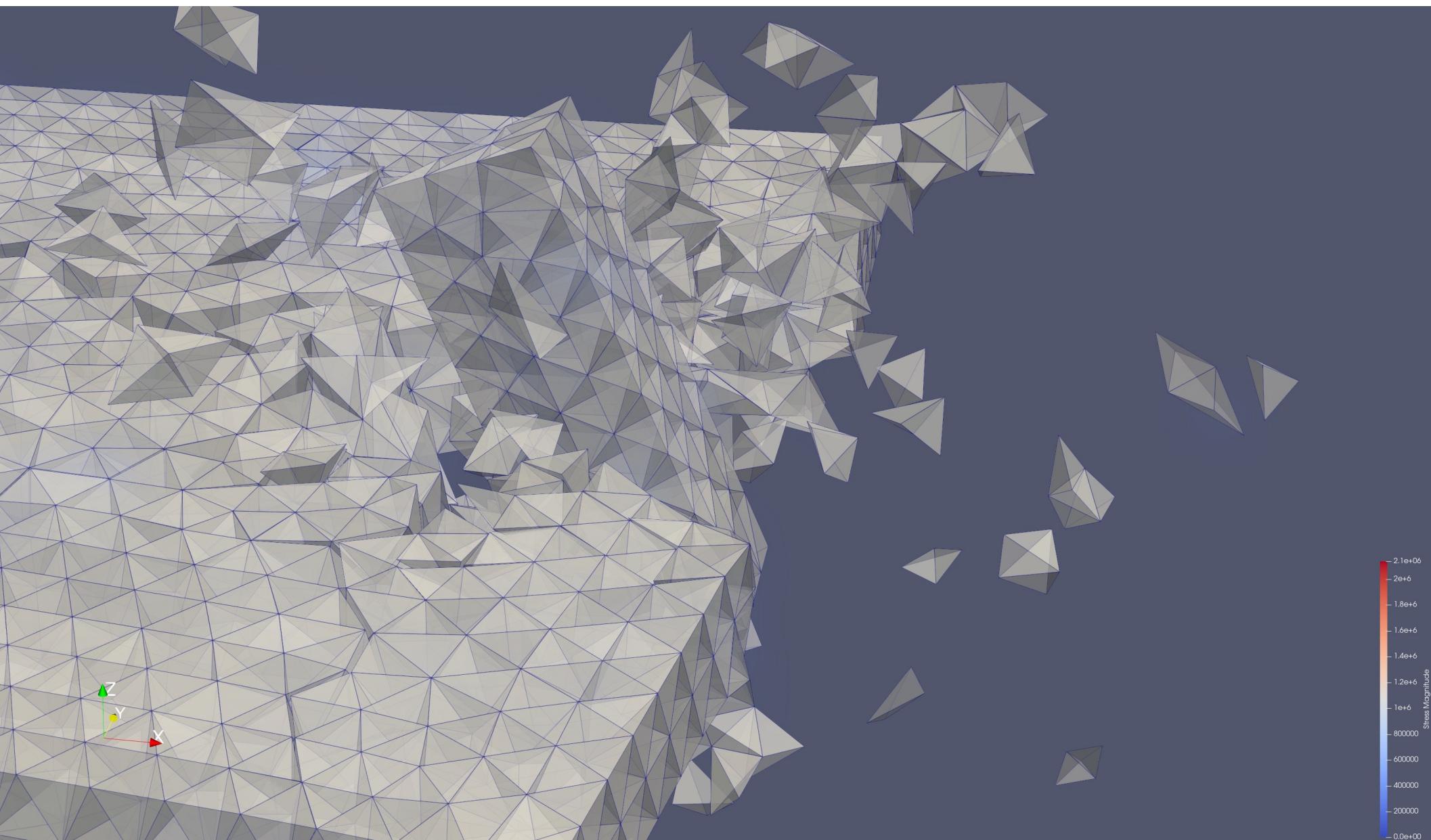
Николай Н и еще 3 че

27. Моделирование движения в ледовом канале

Крыловский государственный научный центр

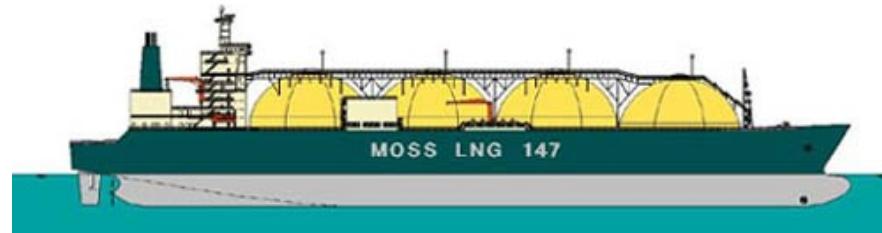
Столкновение ледокола с торосом





Моделирование столкновения танкера с причалом

Институт автоматизации проектирования РАН. Н/рук. темы д.ф.-м.н. В.Л.Якушев



Сжиженный газ (Liquefied Natural Gas - LNG) привлекает внимание как источник экологически чистой энергии, который может быть доставлен по морю в различные страны, но вместе с тем представляет серьезную угрозу при катастрофах.

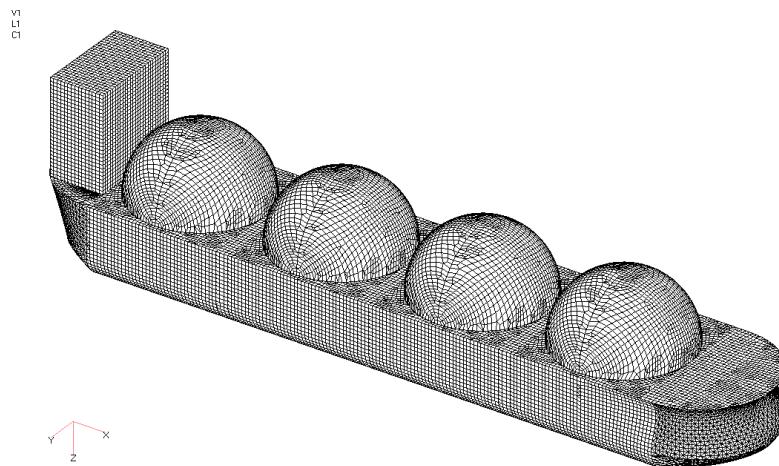


РИС. 1. Конечно-элементная модель танкера.

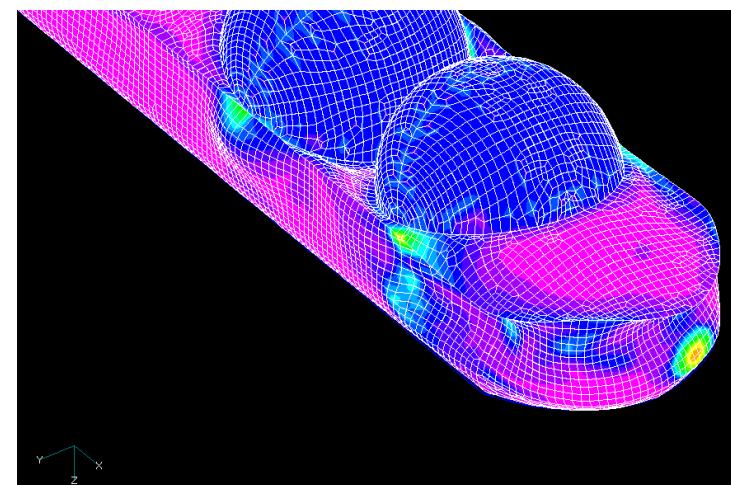
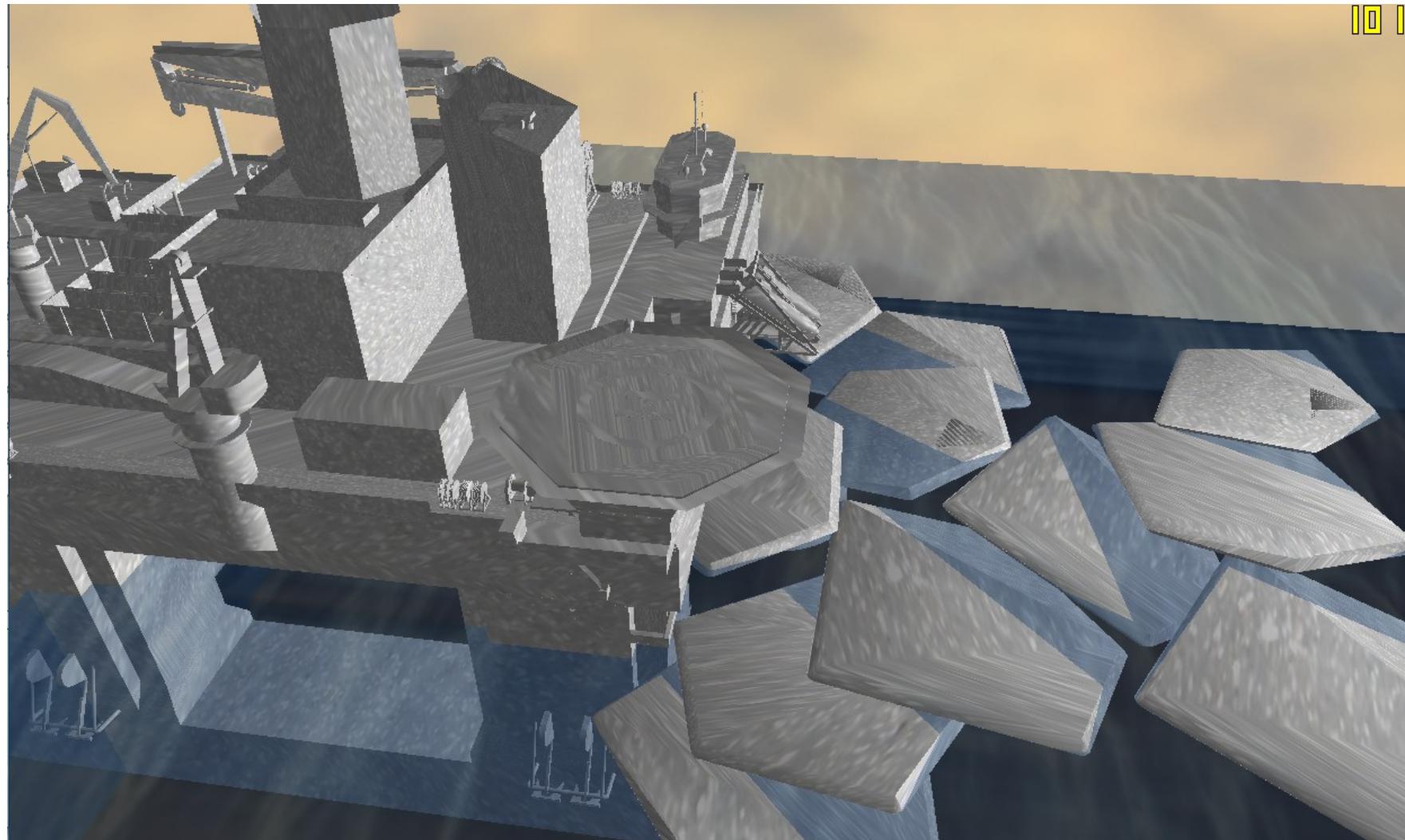
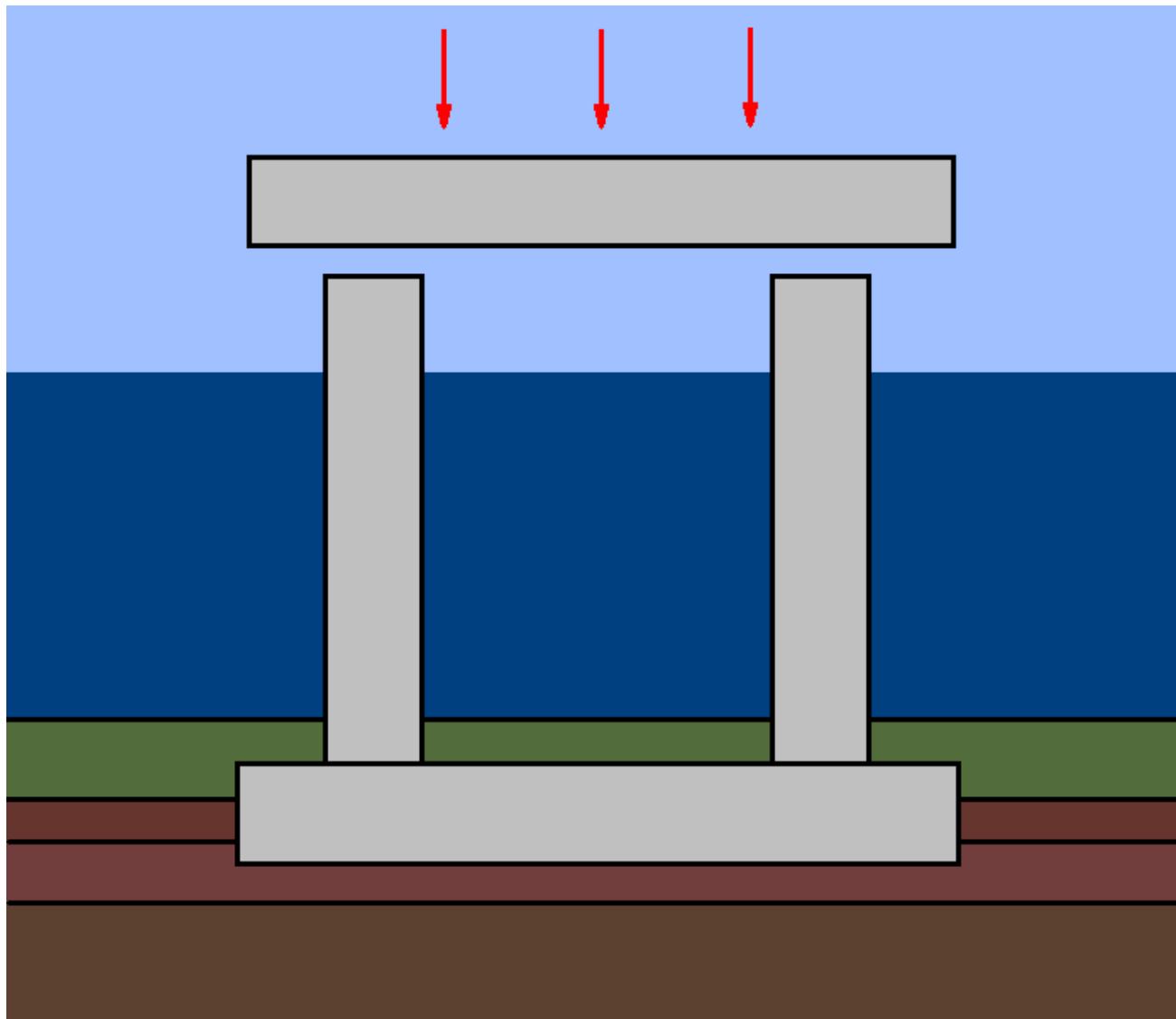


РИС. 2. Распределение напряжений при ударе.

Торосы и нефтедобывающая платформа

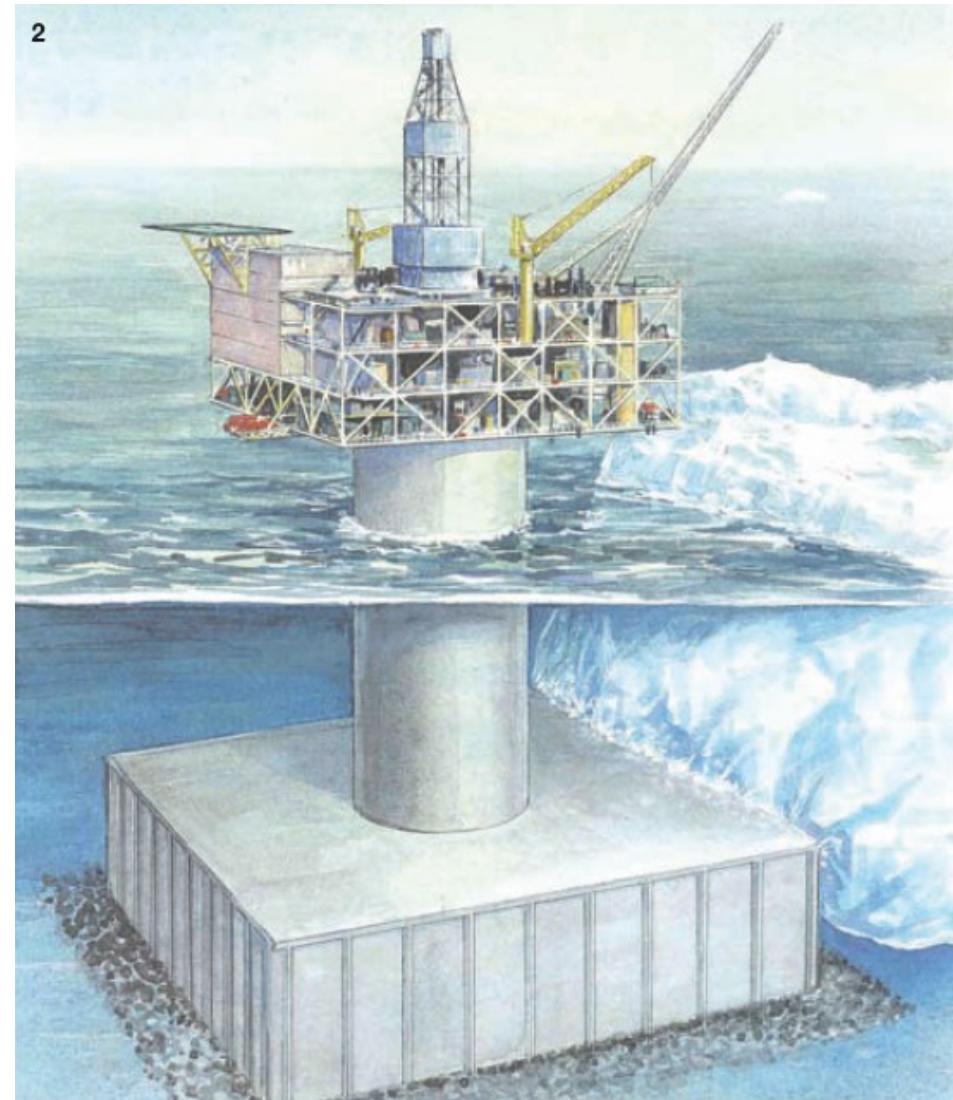


The calculation of the stress-strain state of the props of oil-extracting platform in a heterogeneous ground during installing this platform



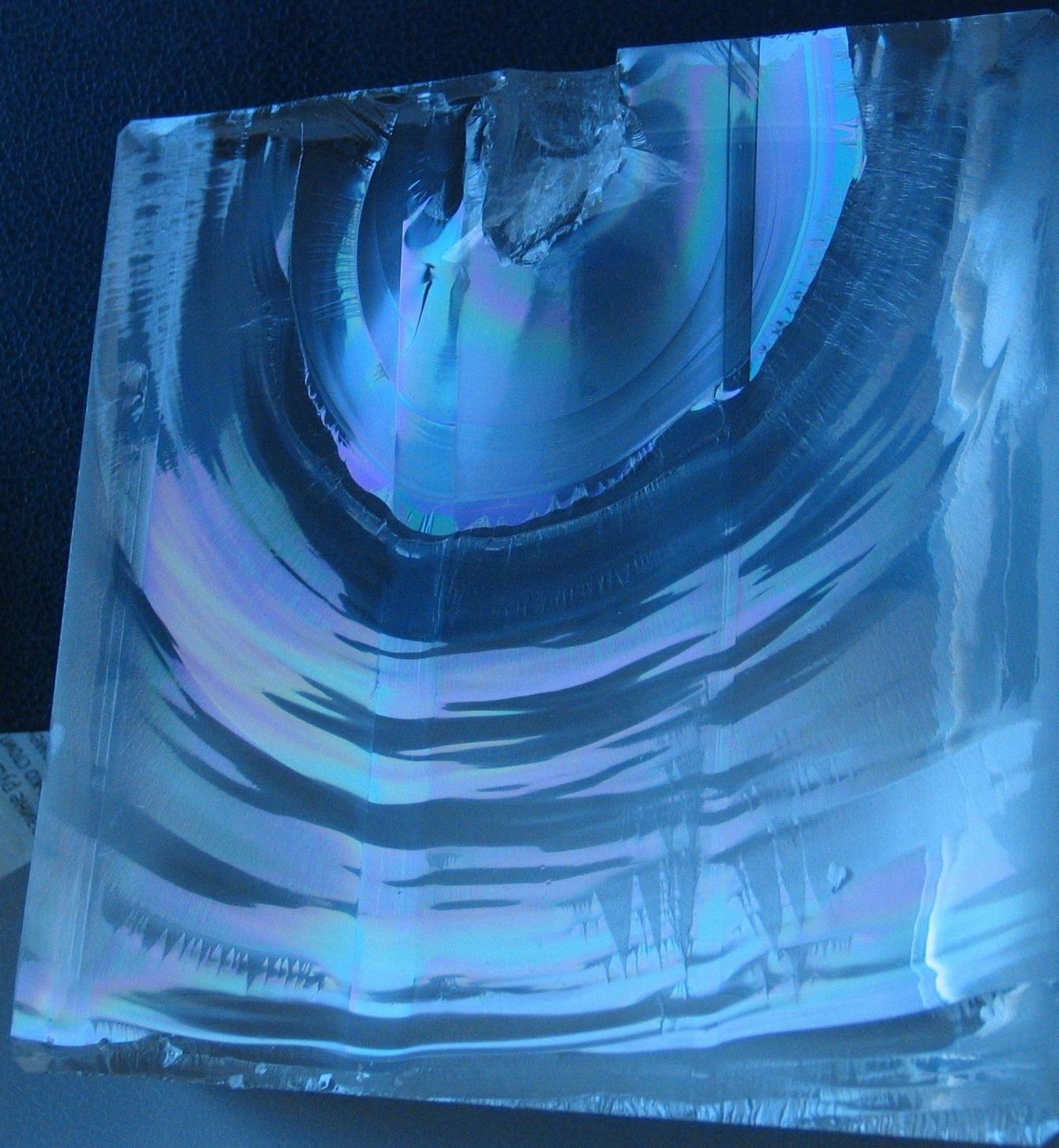


Столкновение айсберга со стационарной нефтедобывающей платформой





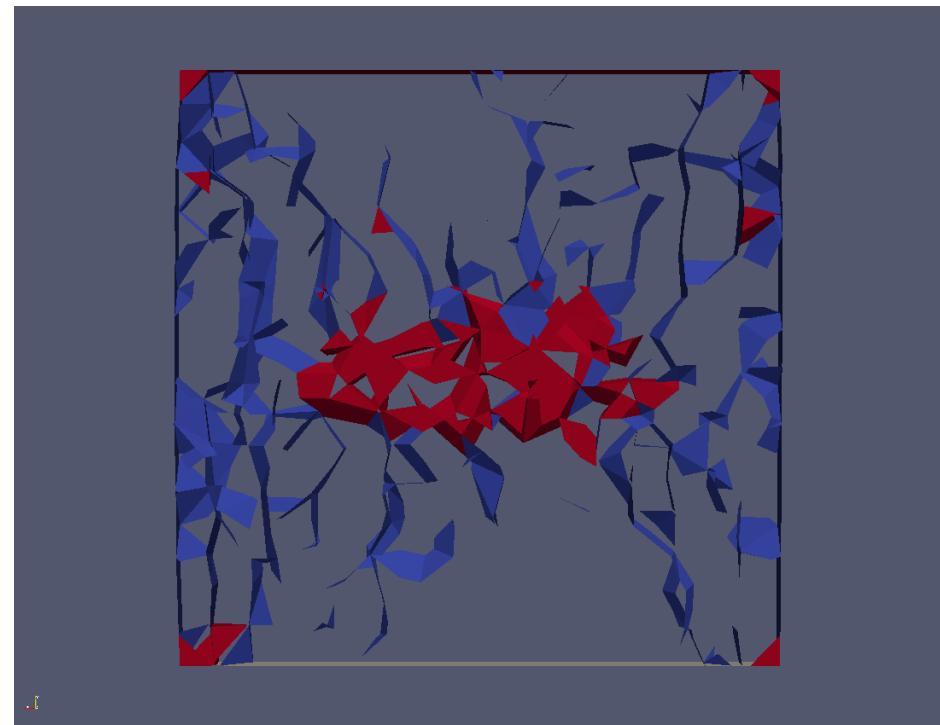
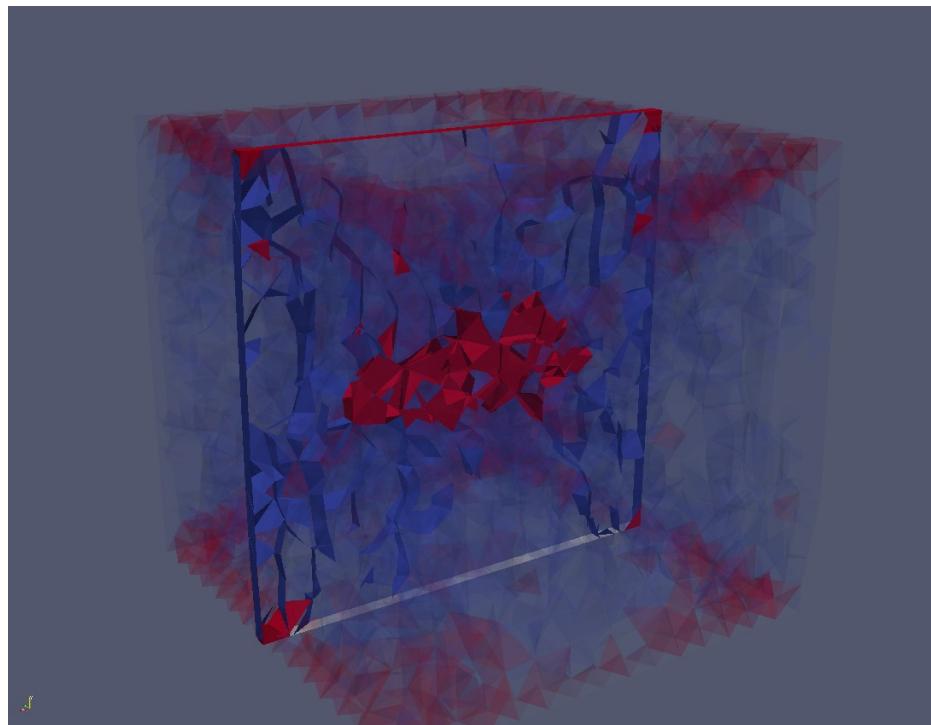


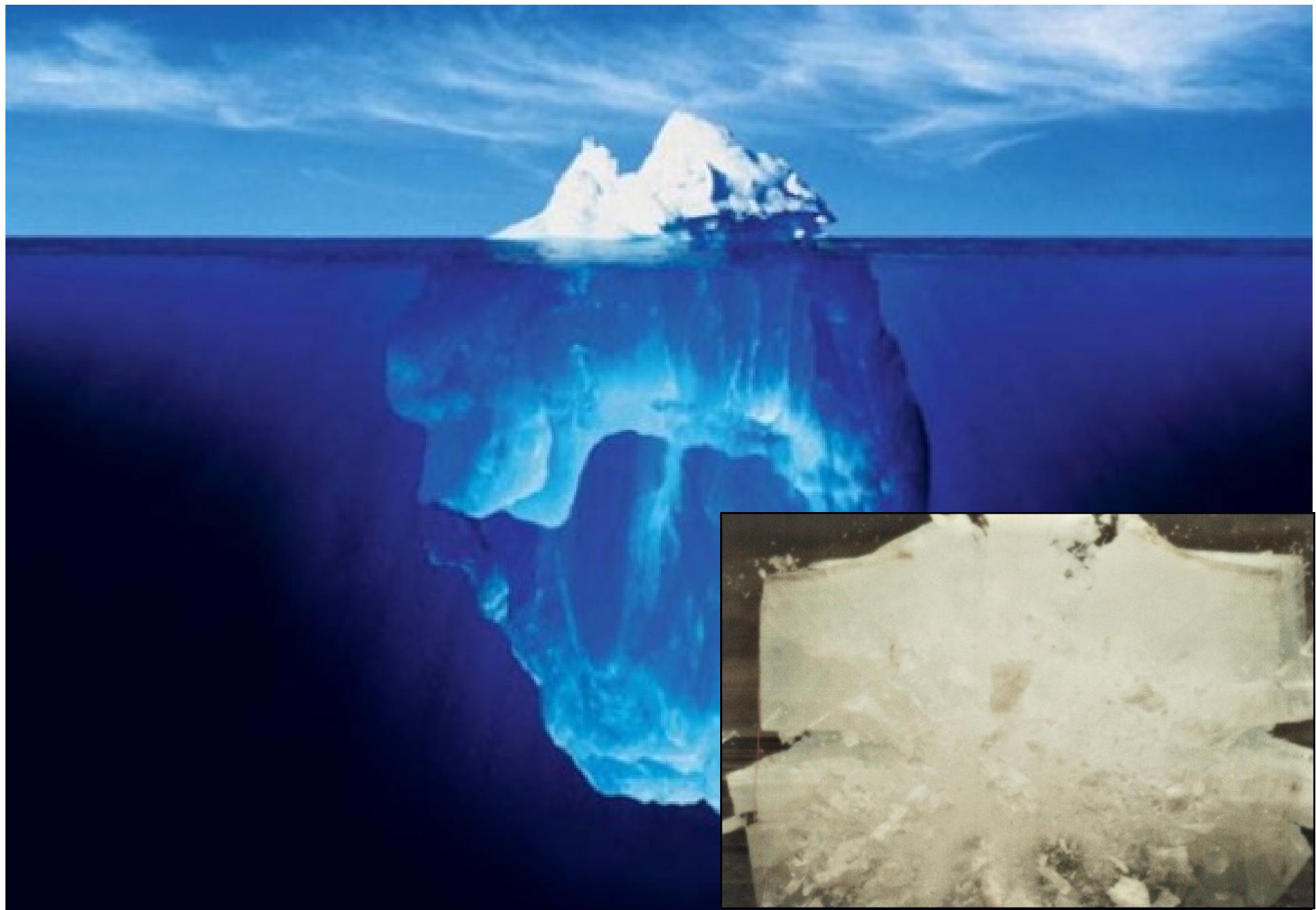


Численное моделирование экспериментов по исследованию прочностных характеристик льда

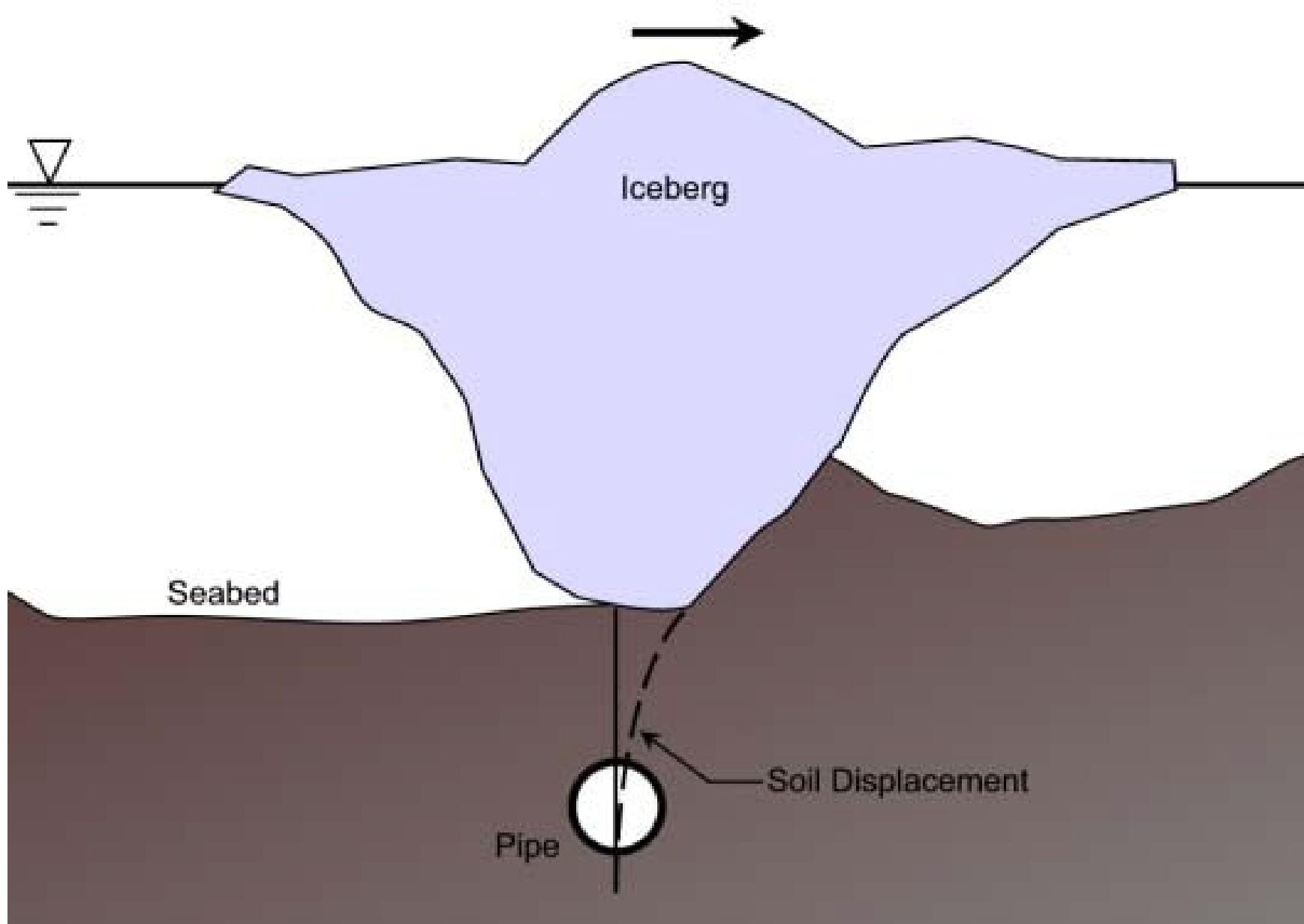


Сечение картины разрушений ледяного образца



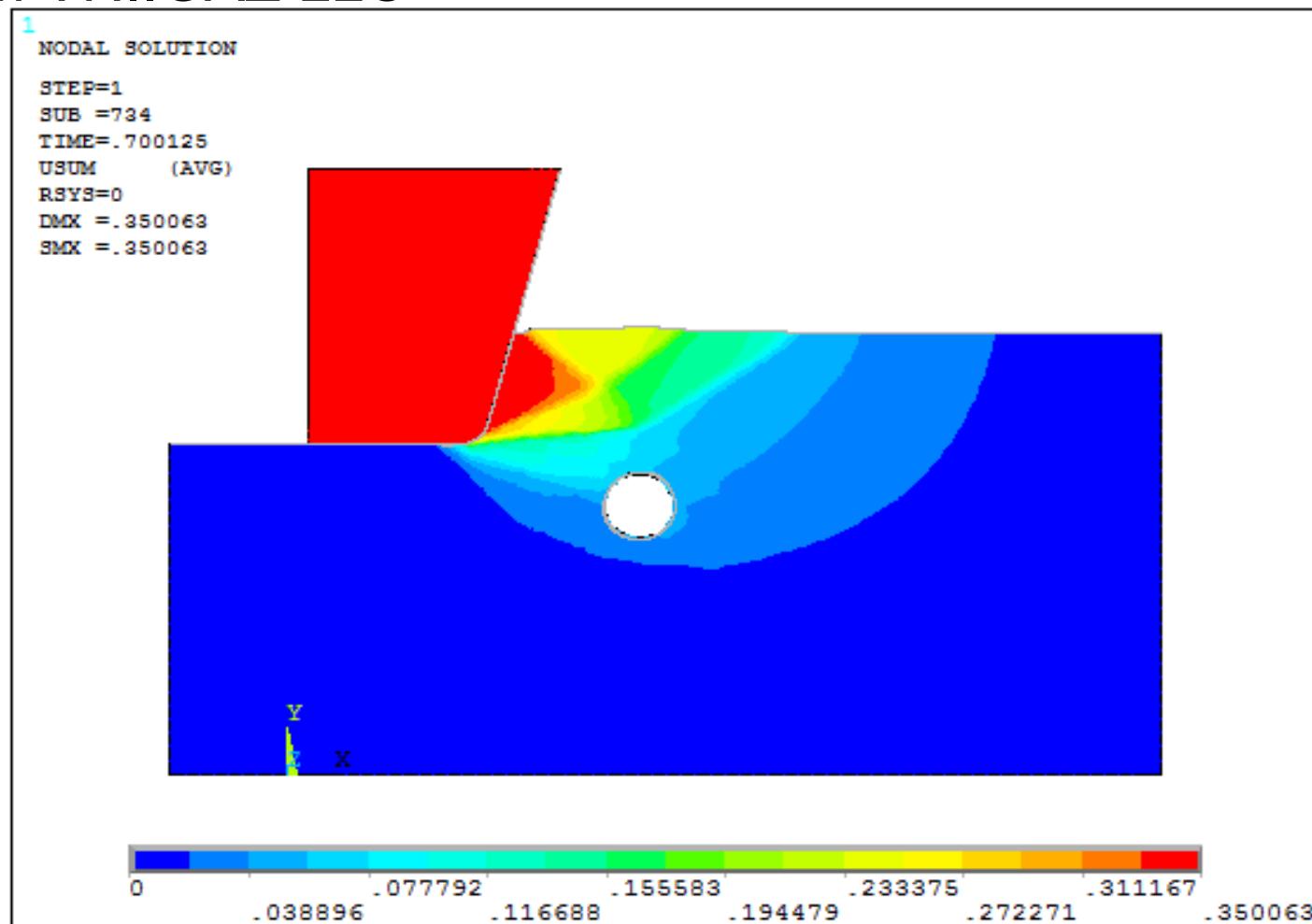


Задача несколько сложнее, так как труба под слоем грунта: 1) киль деформирует грунт и передает деформацию через грунт (не доставая трубы);
2) киль деформирует грунт, затем задевает трубу;

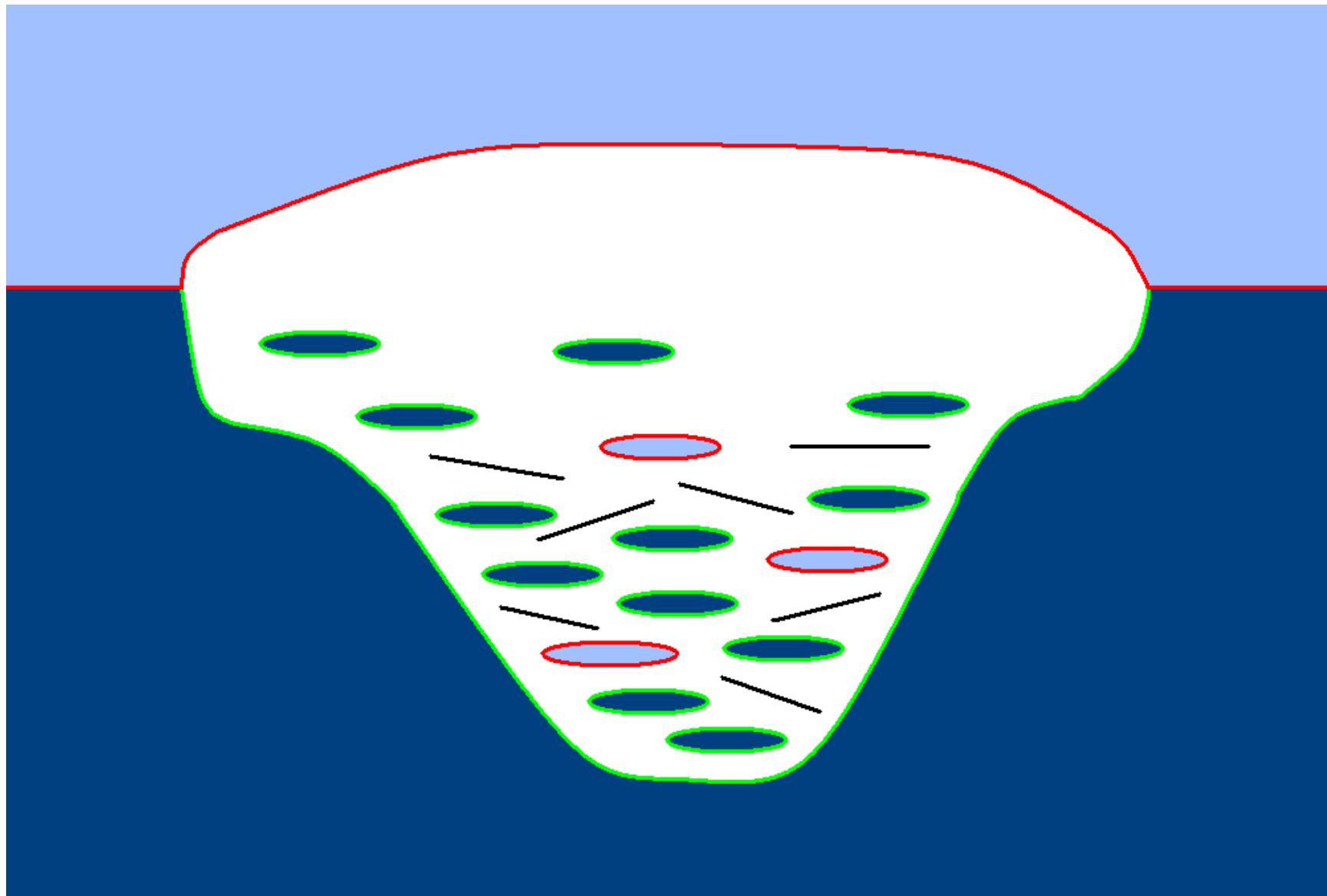


2-D model of the ice hummock keel's impact on deepened pipeline

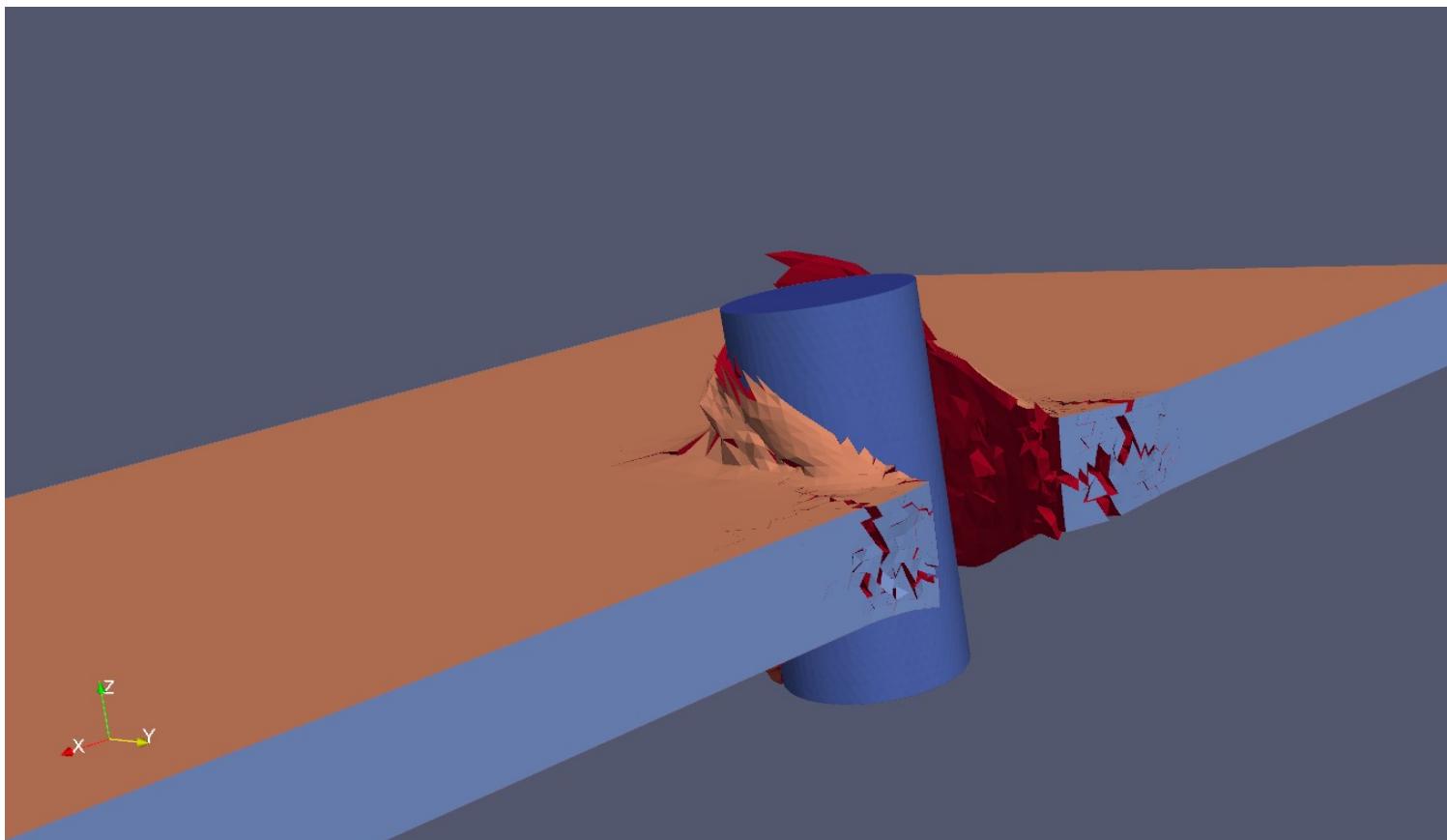
*M.A. Naumov, D.A. Onishchenko, Presentation
Gazprom VNIIGAZ LLC*



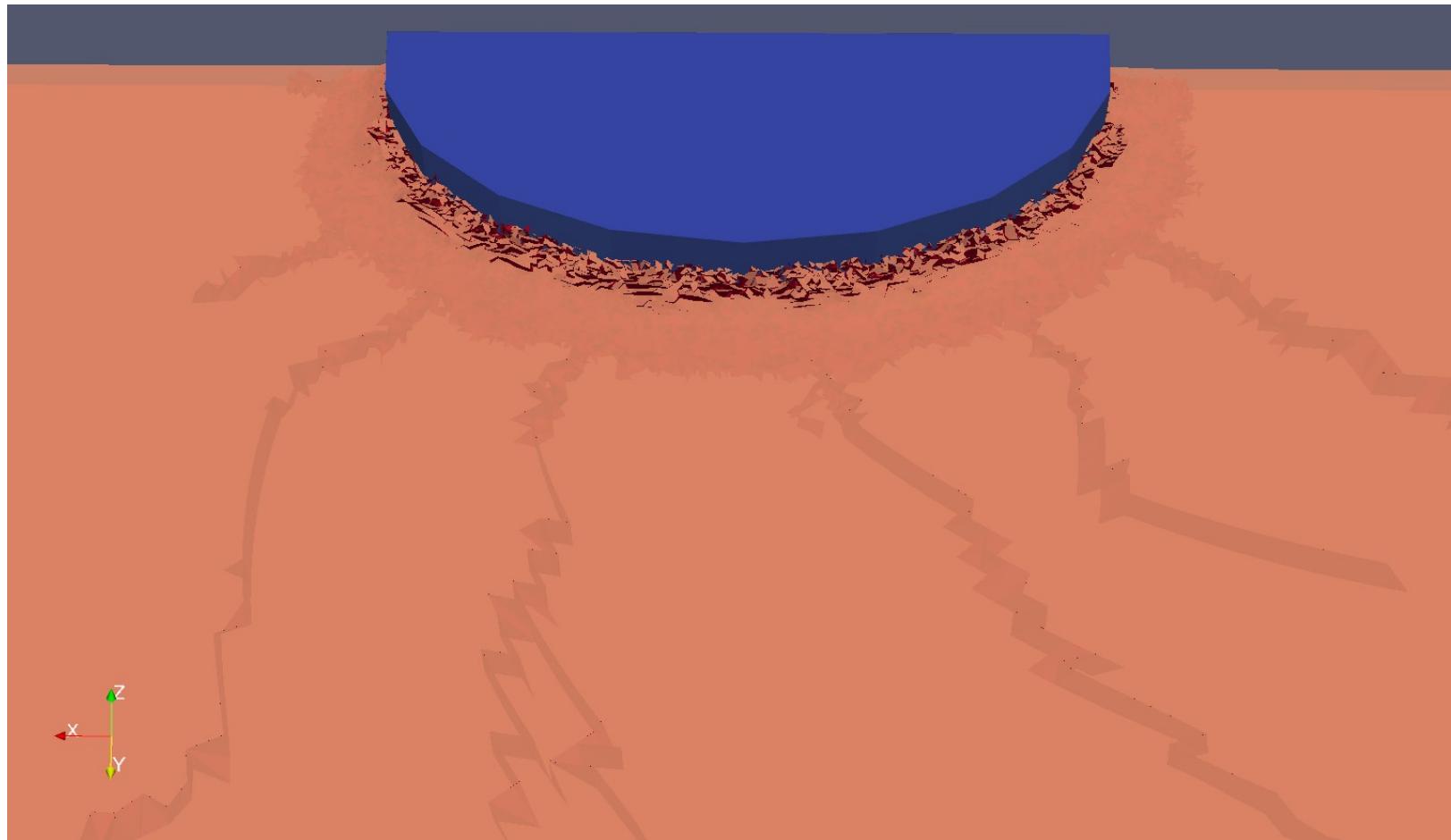
Ледяное тело заданной формы с заданным распределением
водонасыщенных и газонасыщенных полостей и трещин



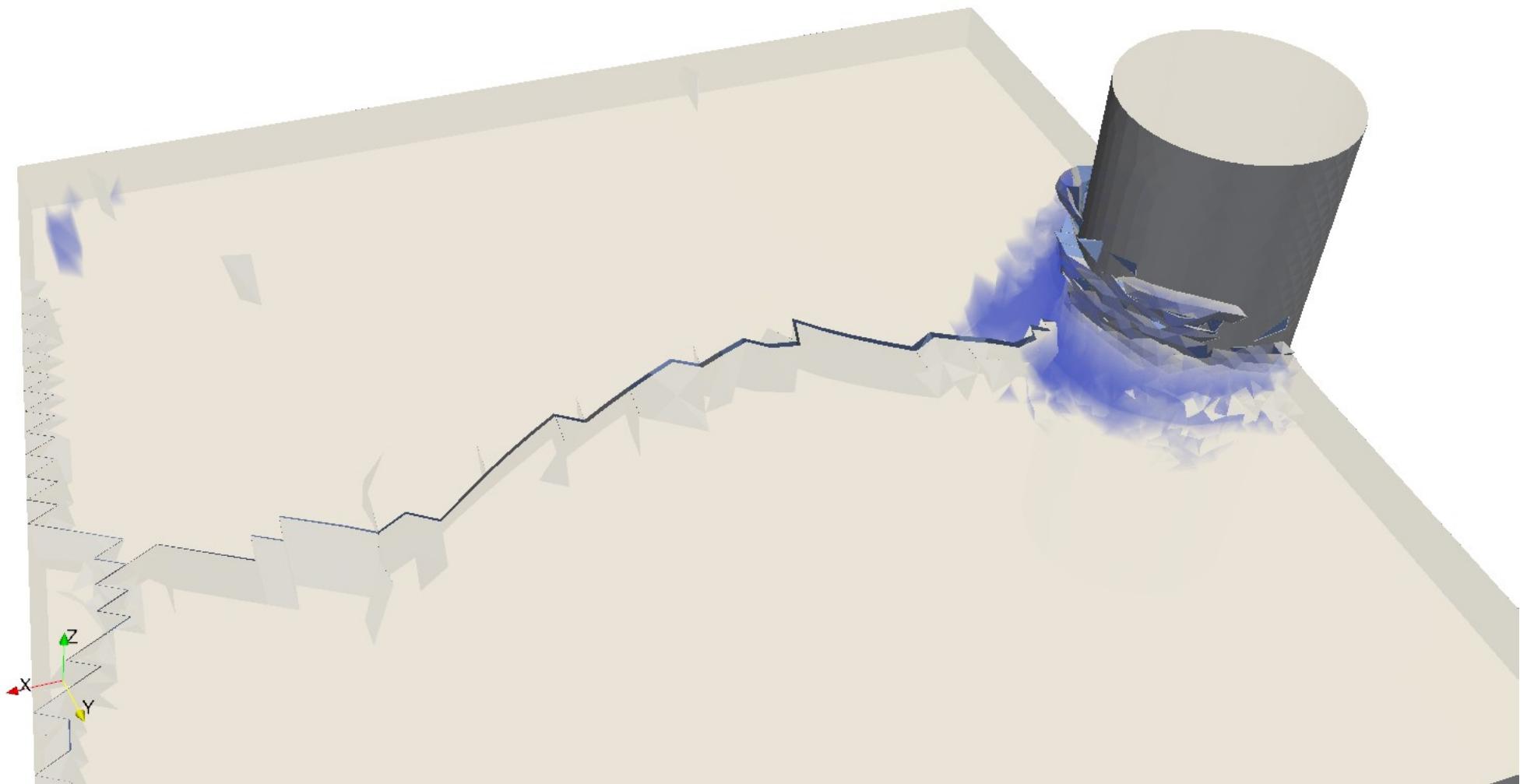
Прорезание стойки платформы ледяным полем



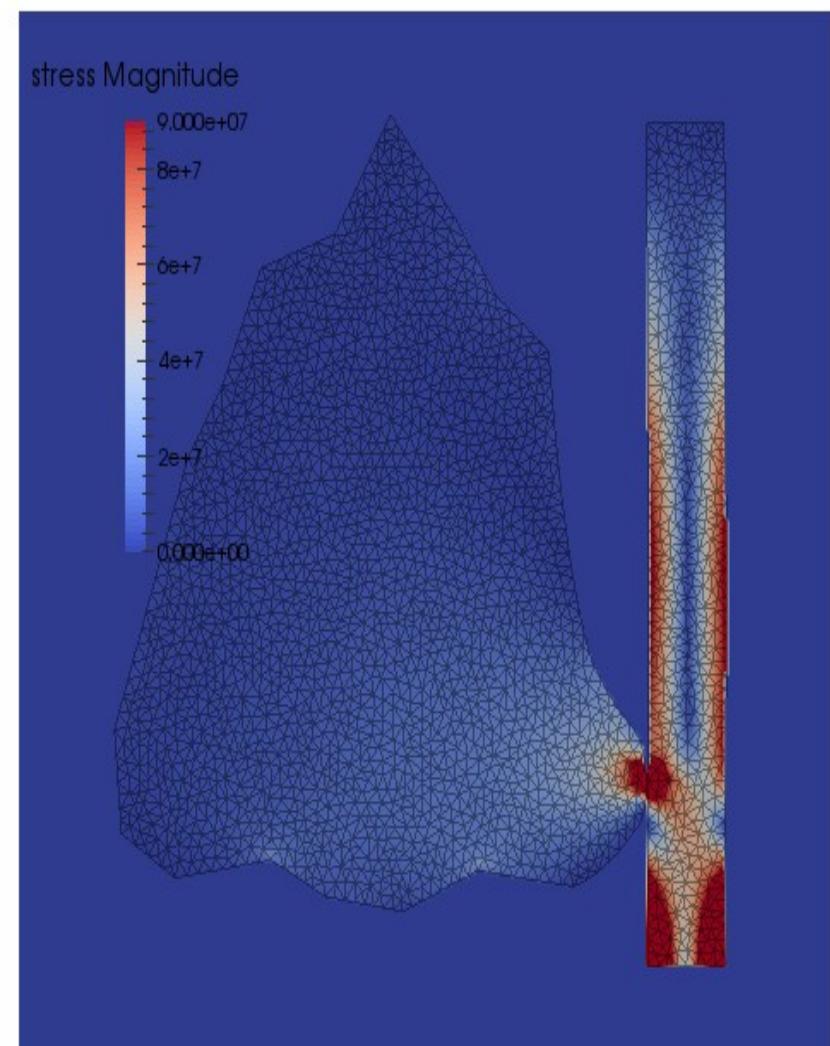
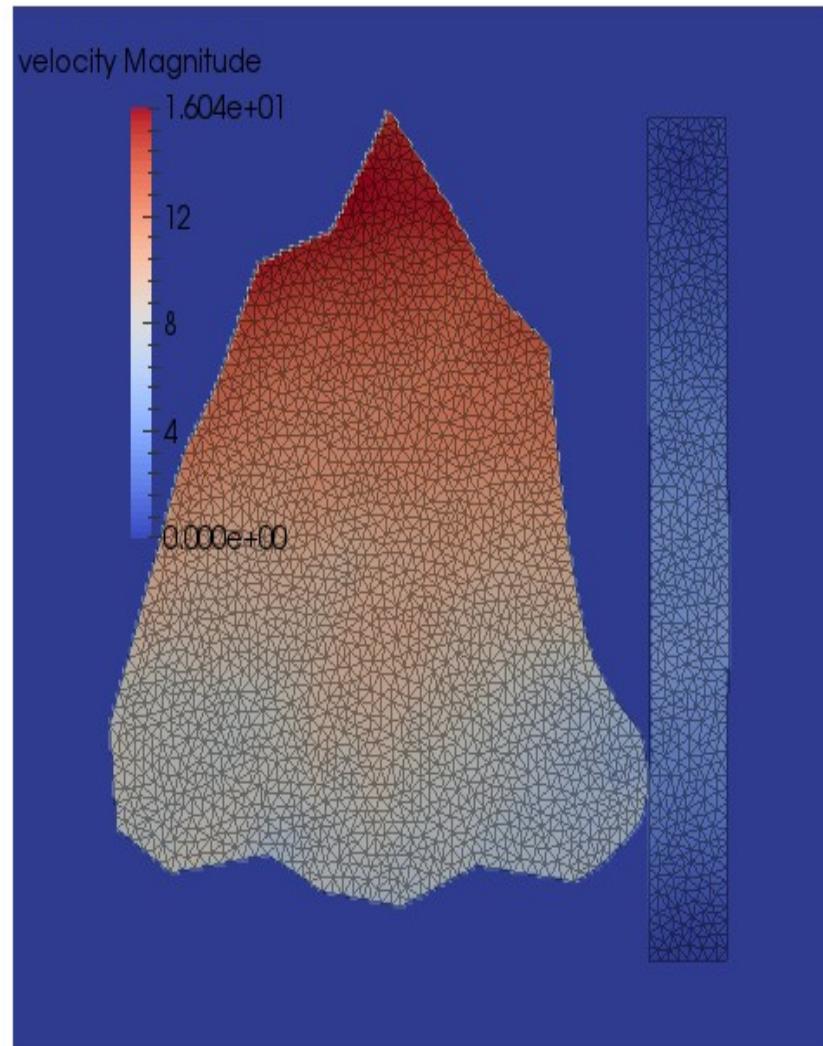
Прорезание стойки платформы ледяным полем

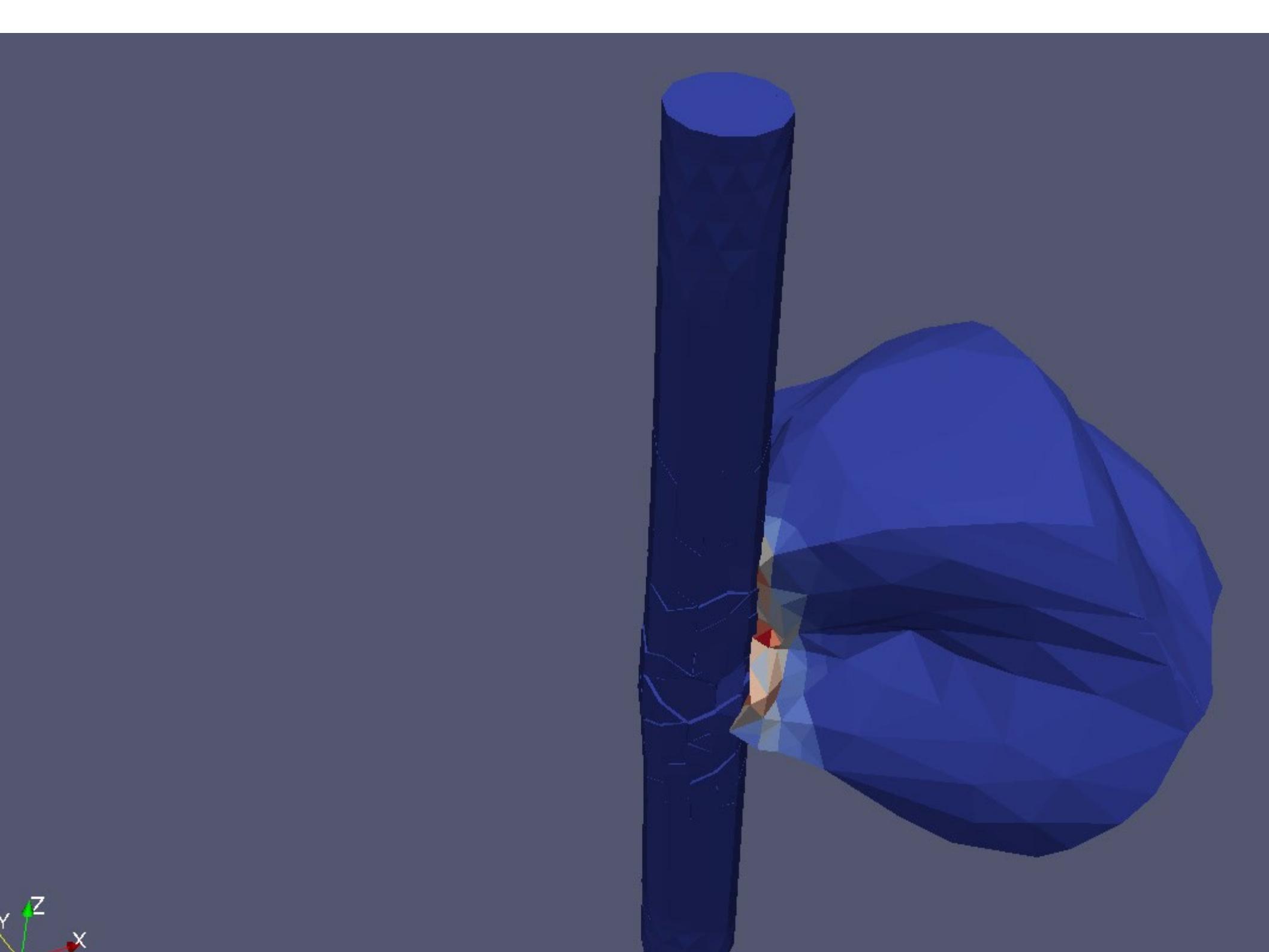


Соударение ледяного массива со стойкой нефтедобывающей платформы

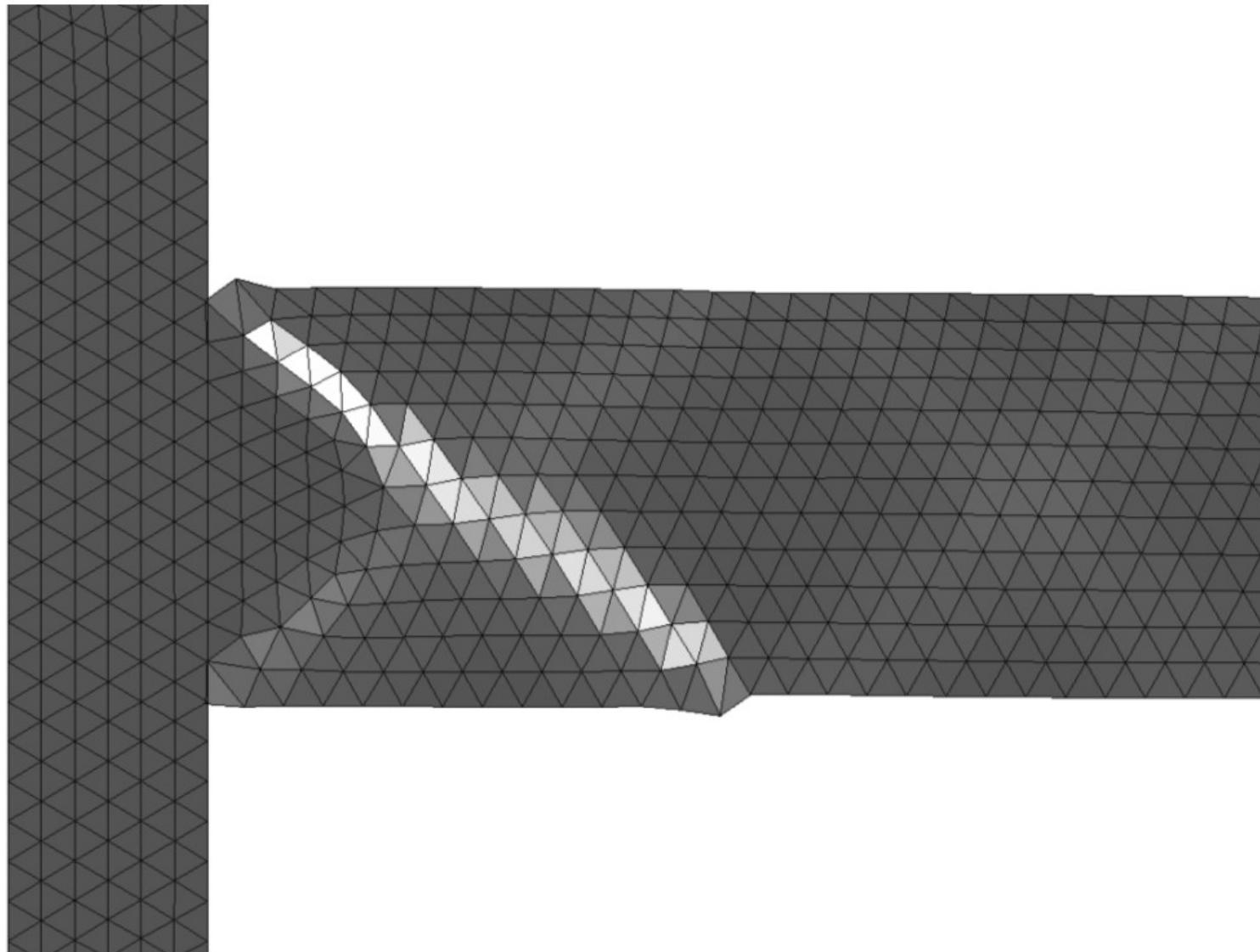


Столкновение айсберга со стойкой стационарной нефтедобывающей платформы



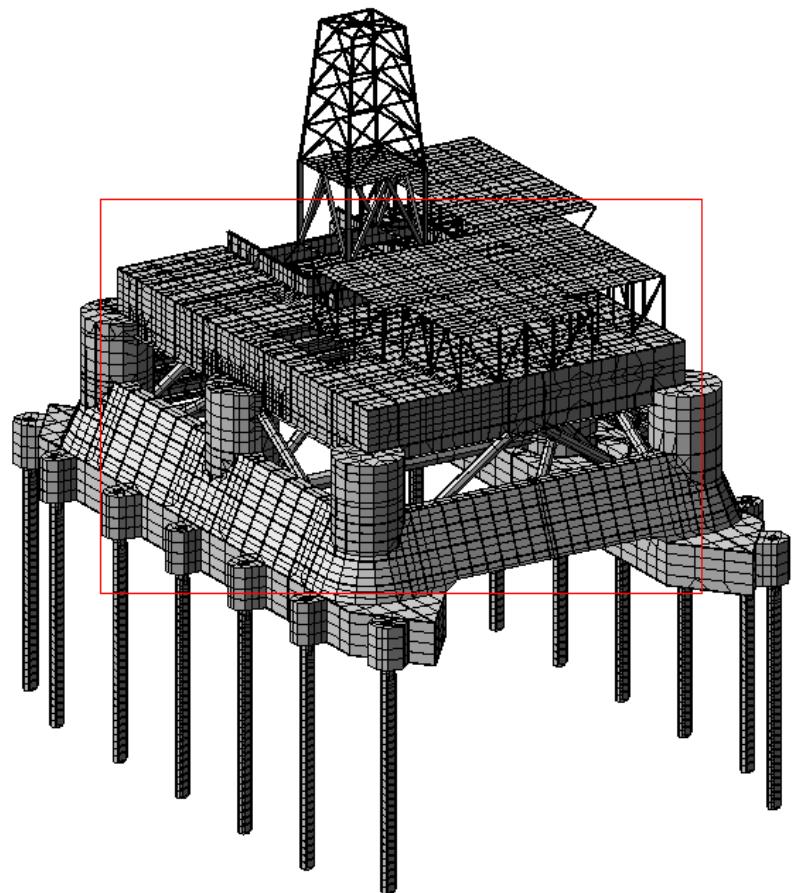
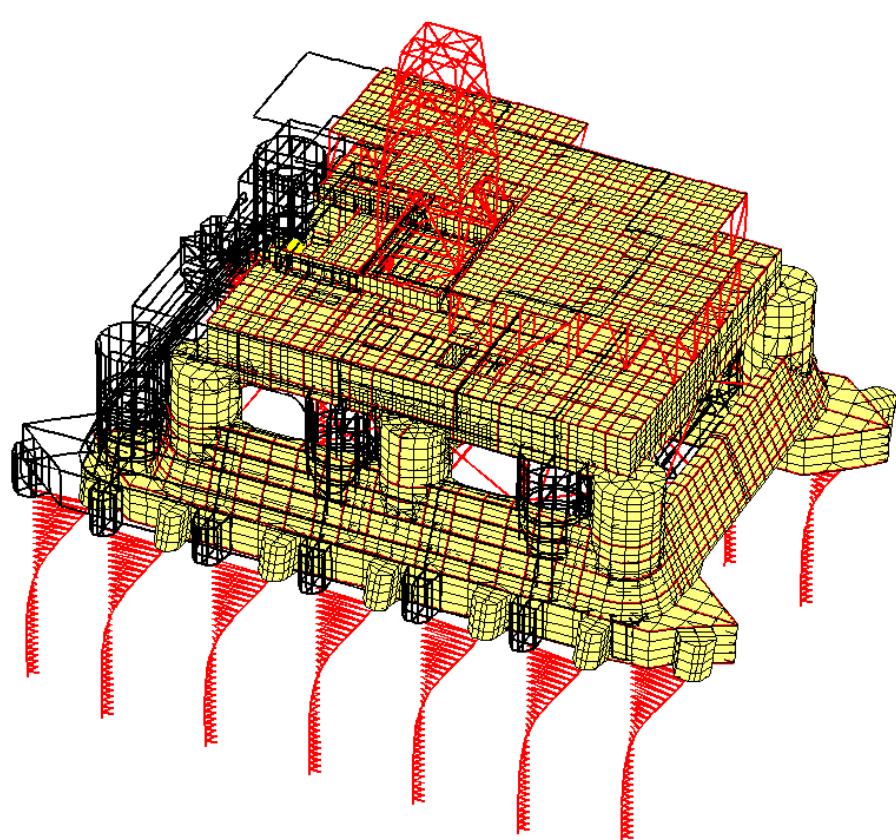


Iceberg collision with the stand of a fixed oil-extracting platform: plastic deformation value

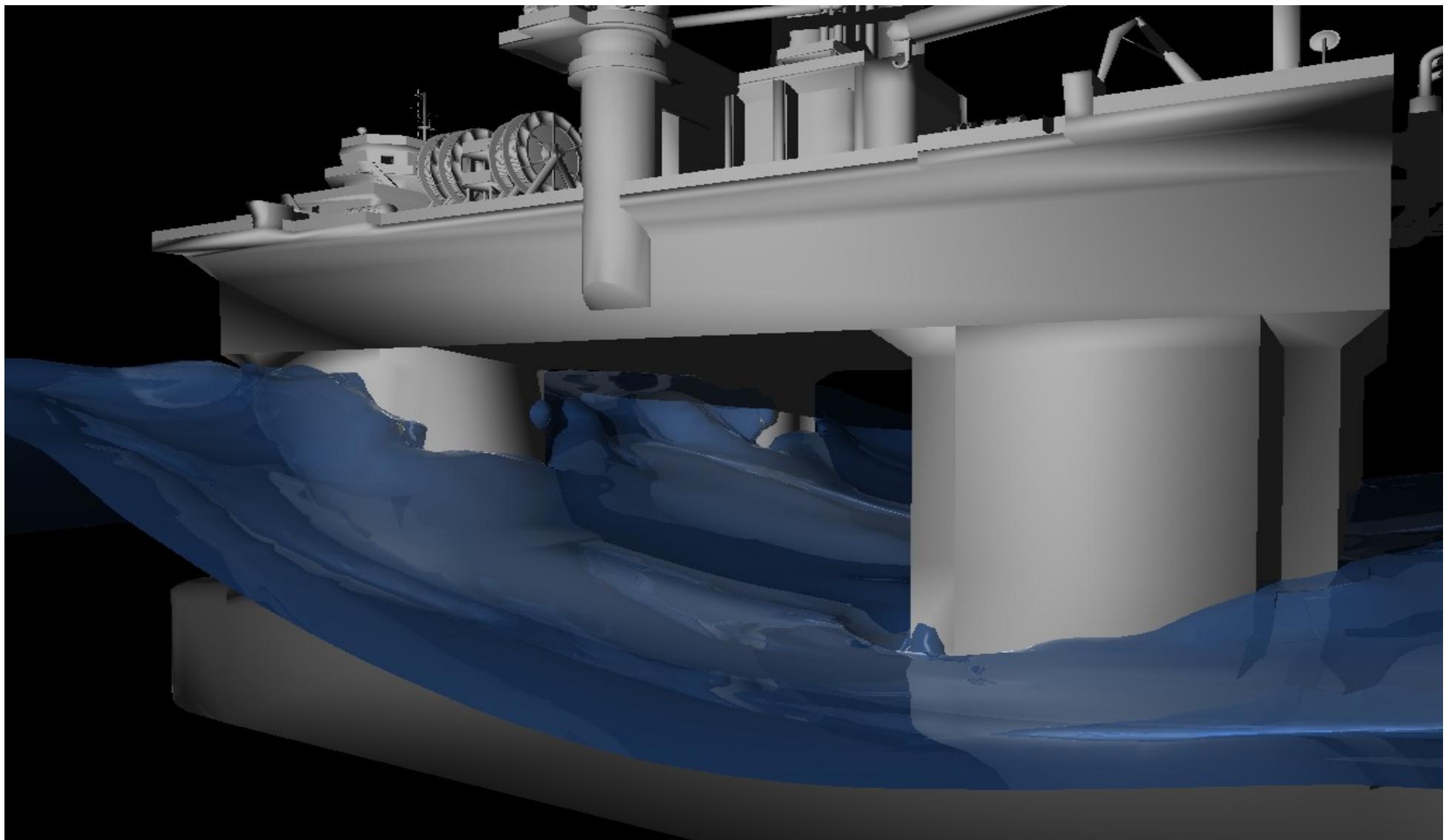


Пример задачи о деформировании в многосвязной области интегрирования

Морская ледостойкая стационарная платформа

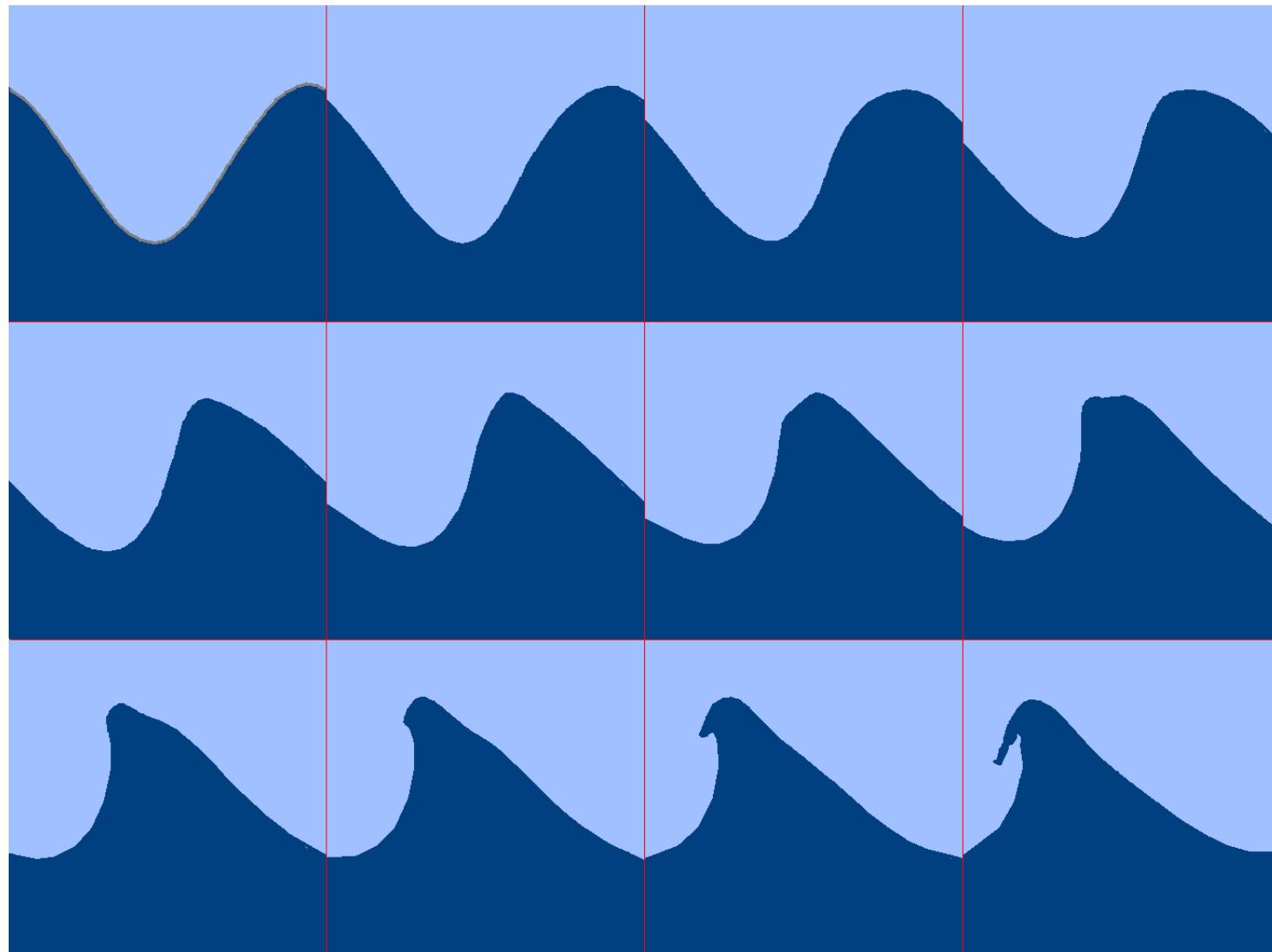


Штормовое воздействие на ледостойкую платформу (ИВМ РАН)

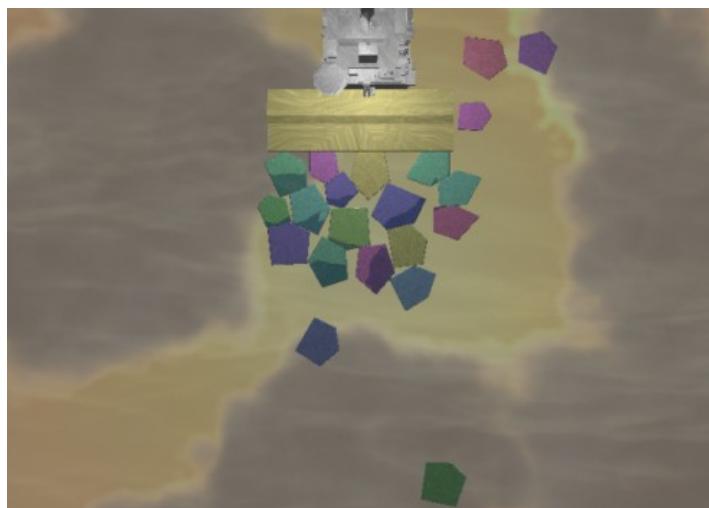
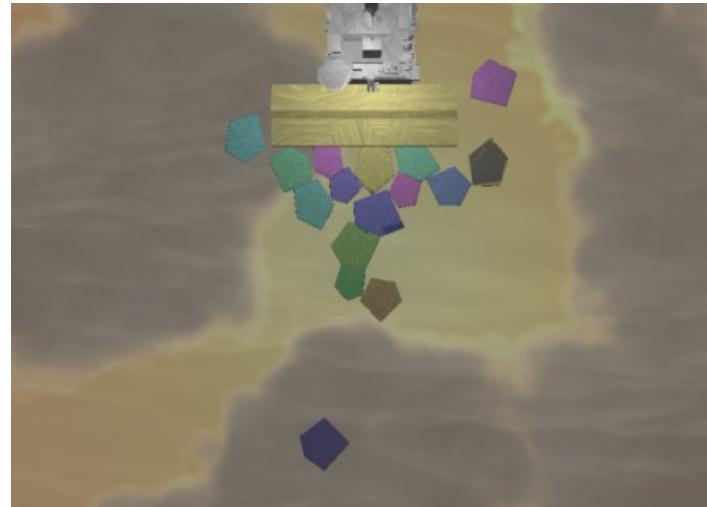
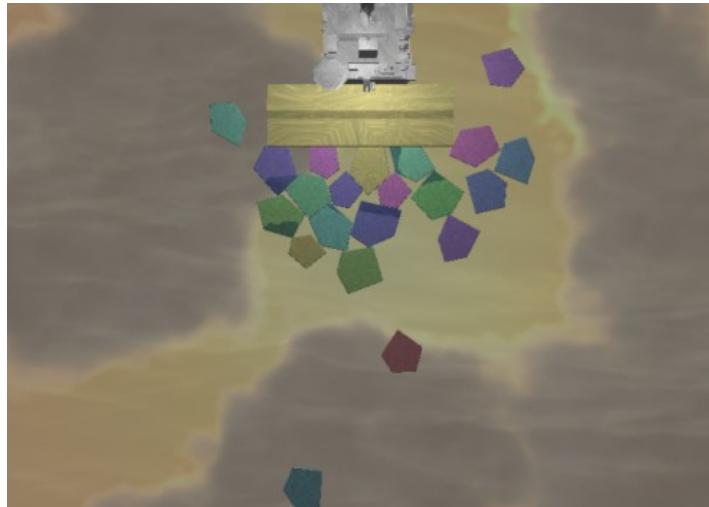


Эволюция формы морской волны, набегающей на берег.

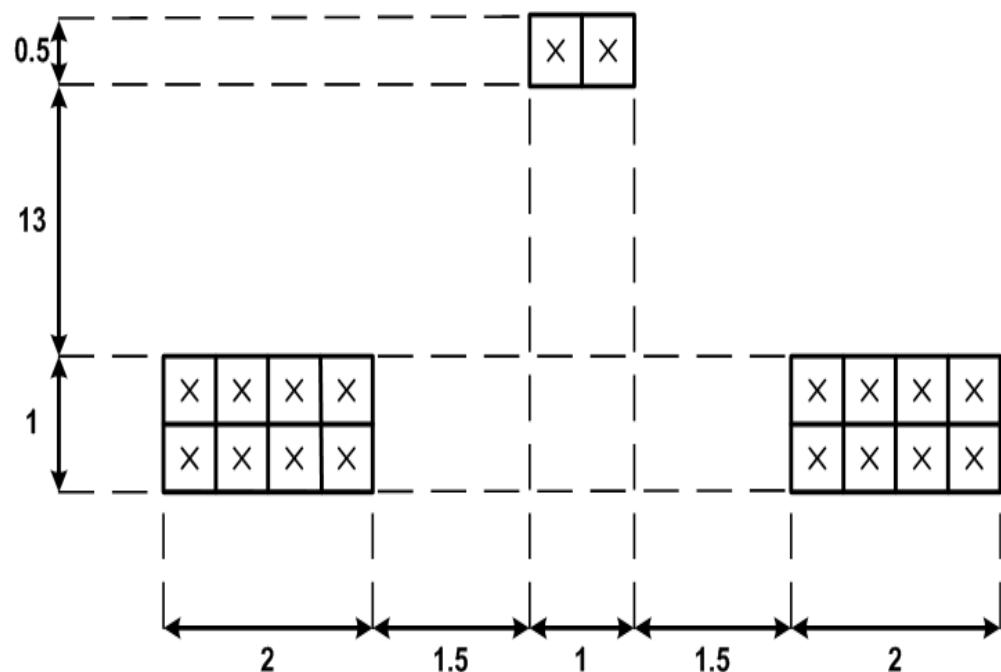
Л.А.Иншакова (Харина) Комплекс программ "Океан" моделирования динамики гравитационных волн



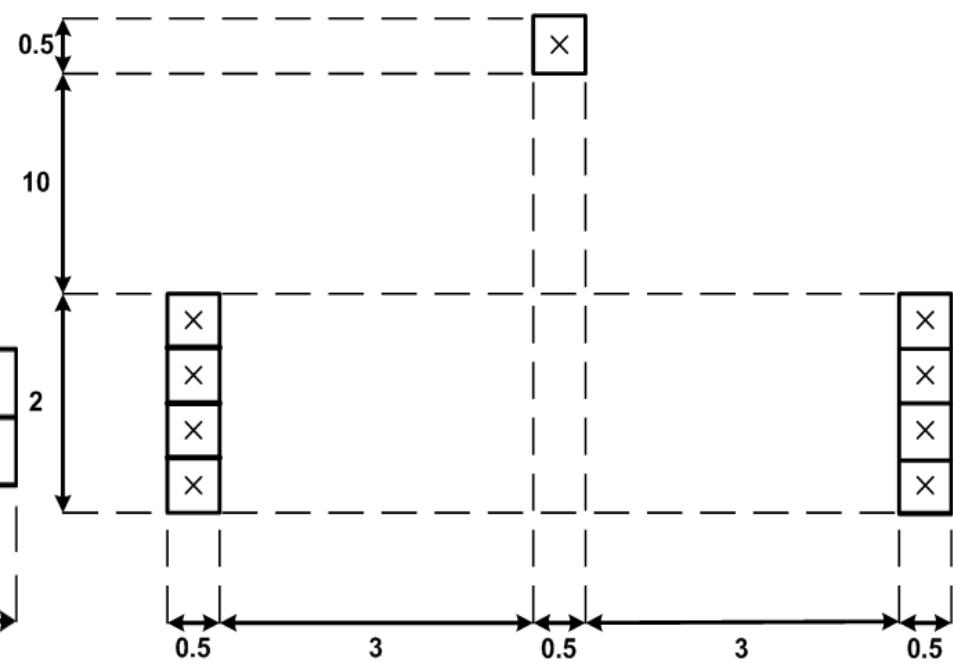
Торосы и нефтедобывающая платформа



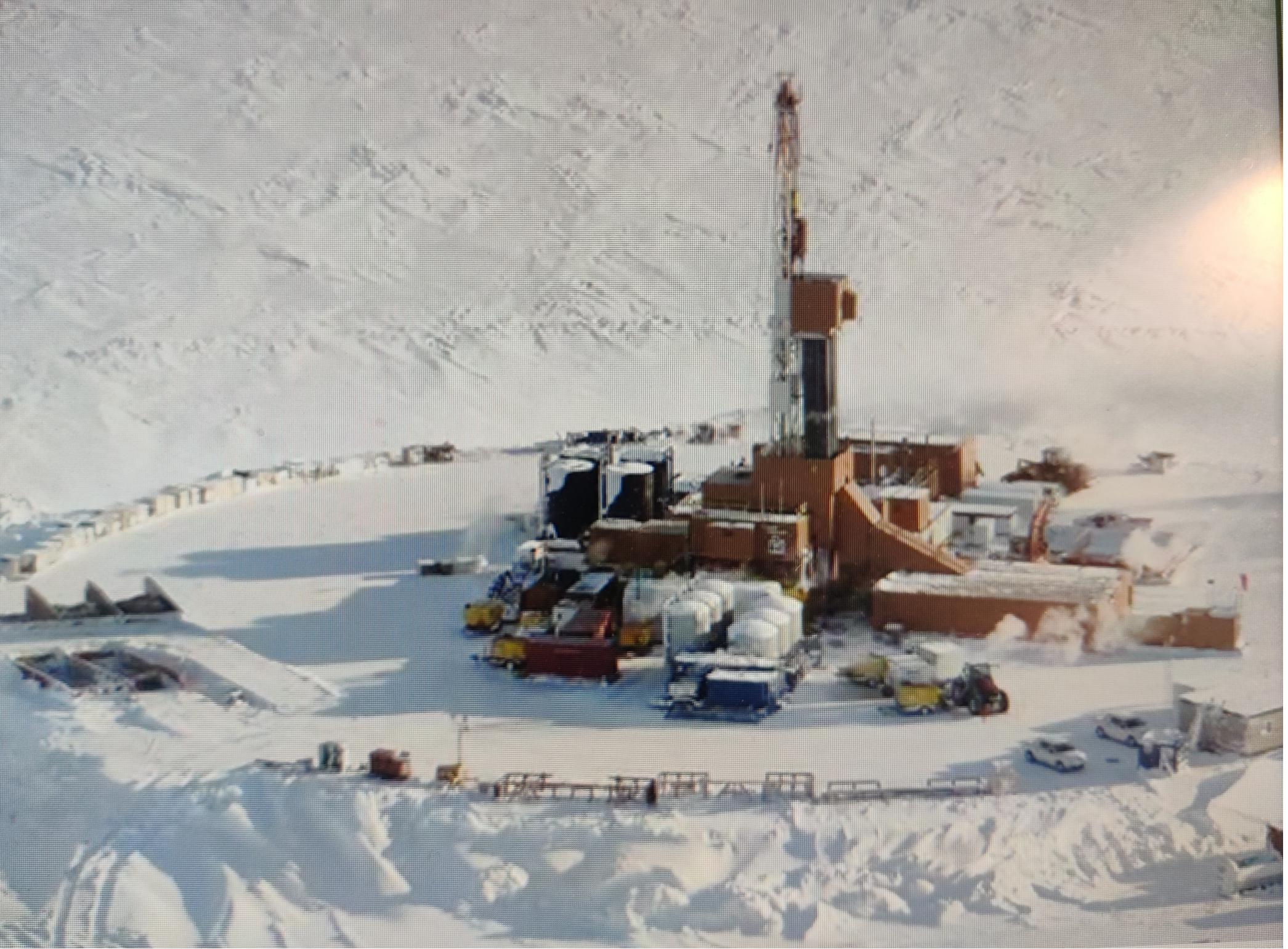
- Схема распределения нагрузки от шасси самолетов: а) ИЛ-76 ТД, б) С-130Н Hercules.

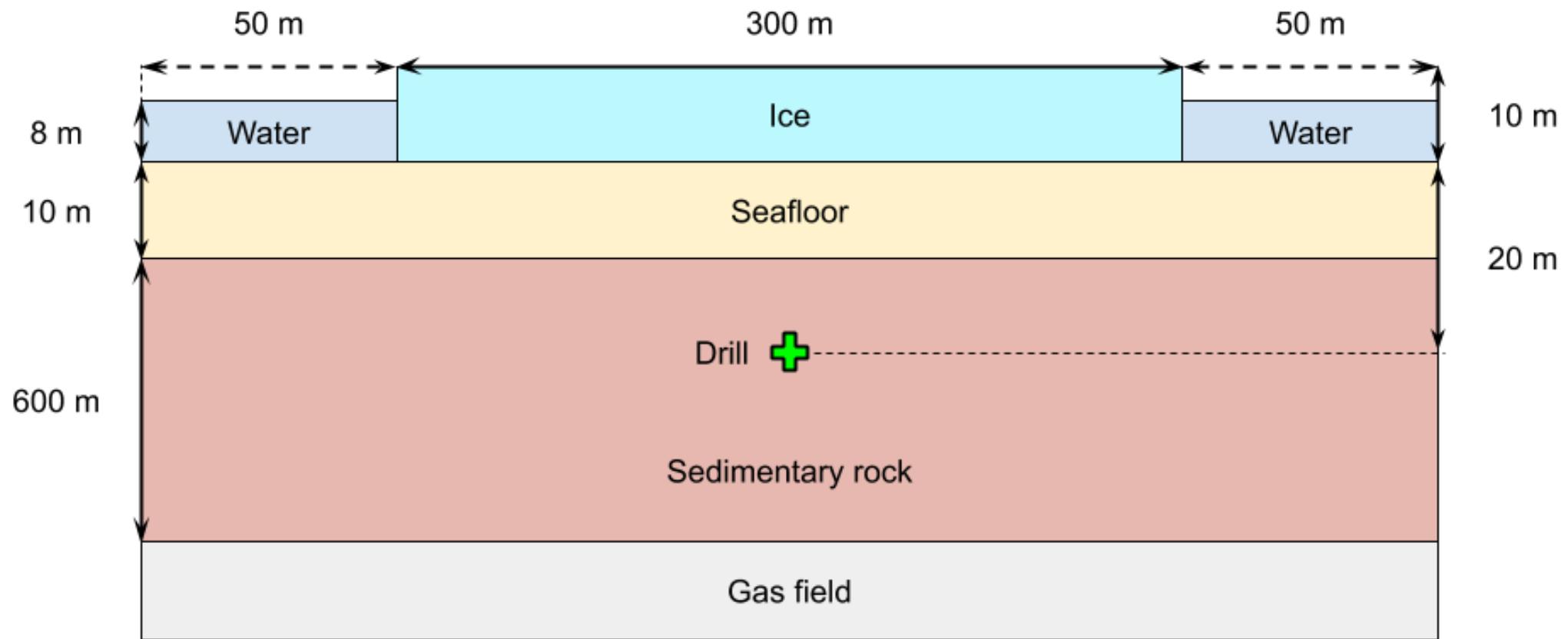


■ a)

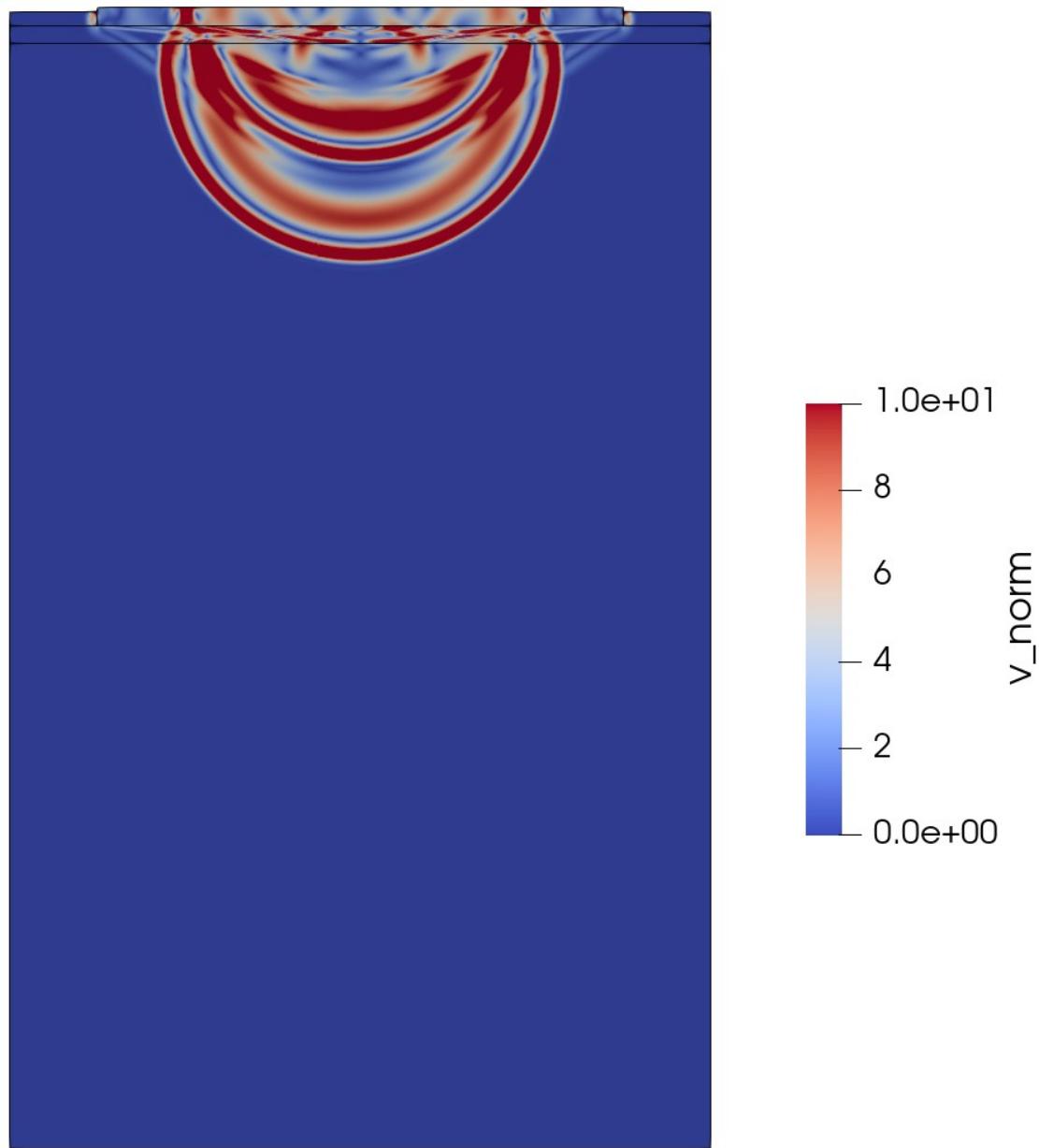
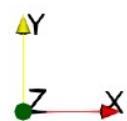


■ b)

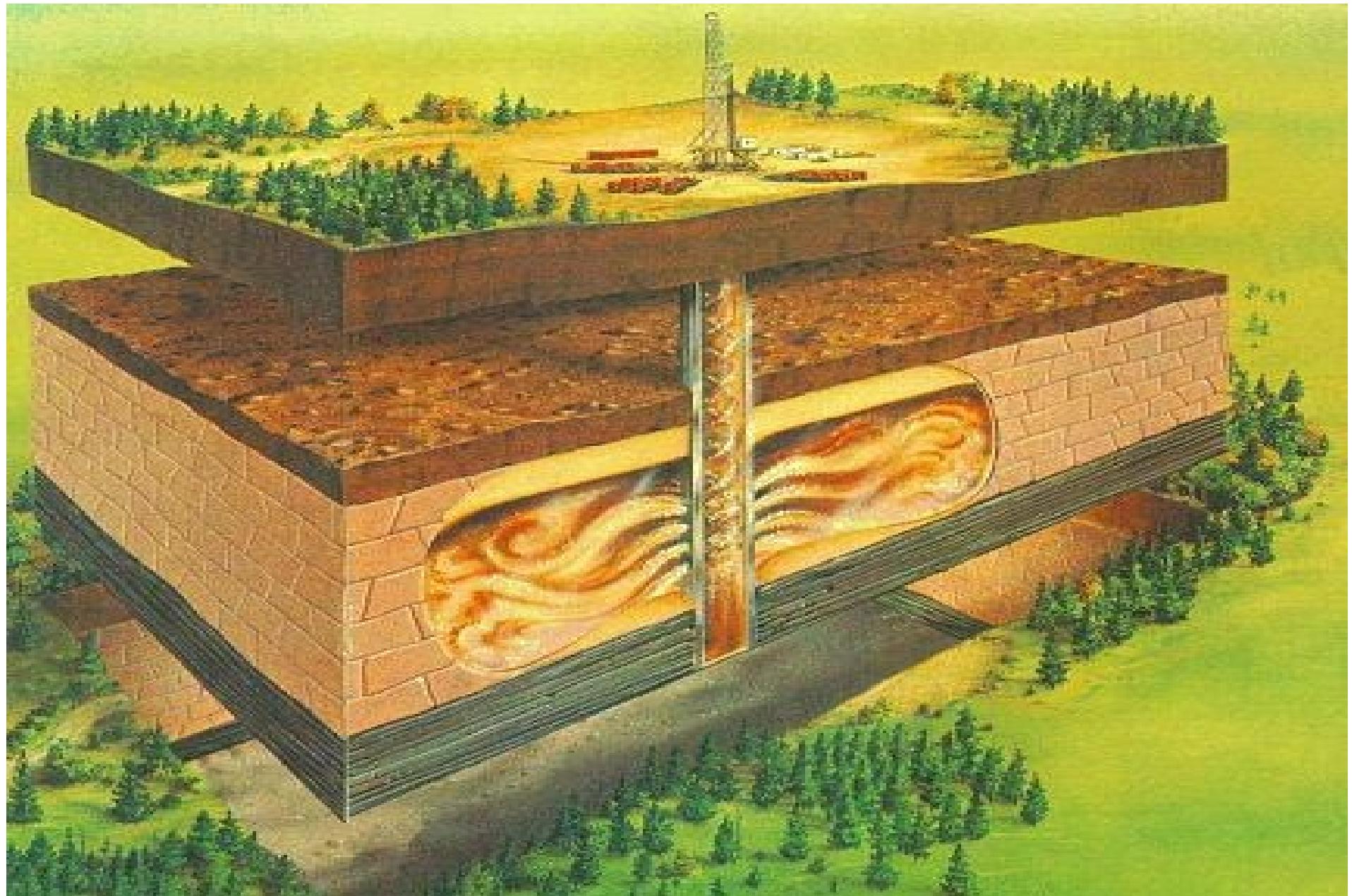


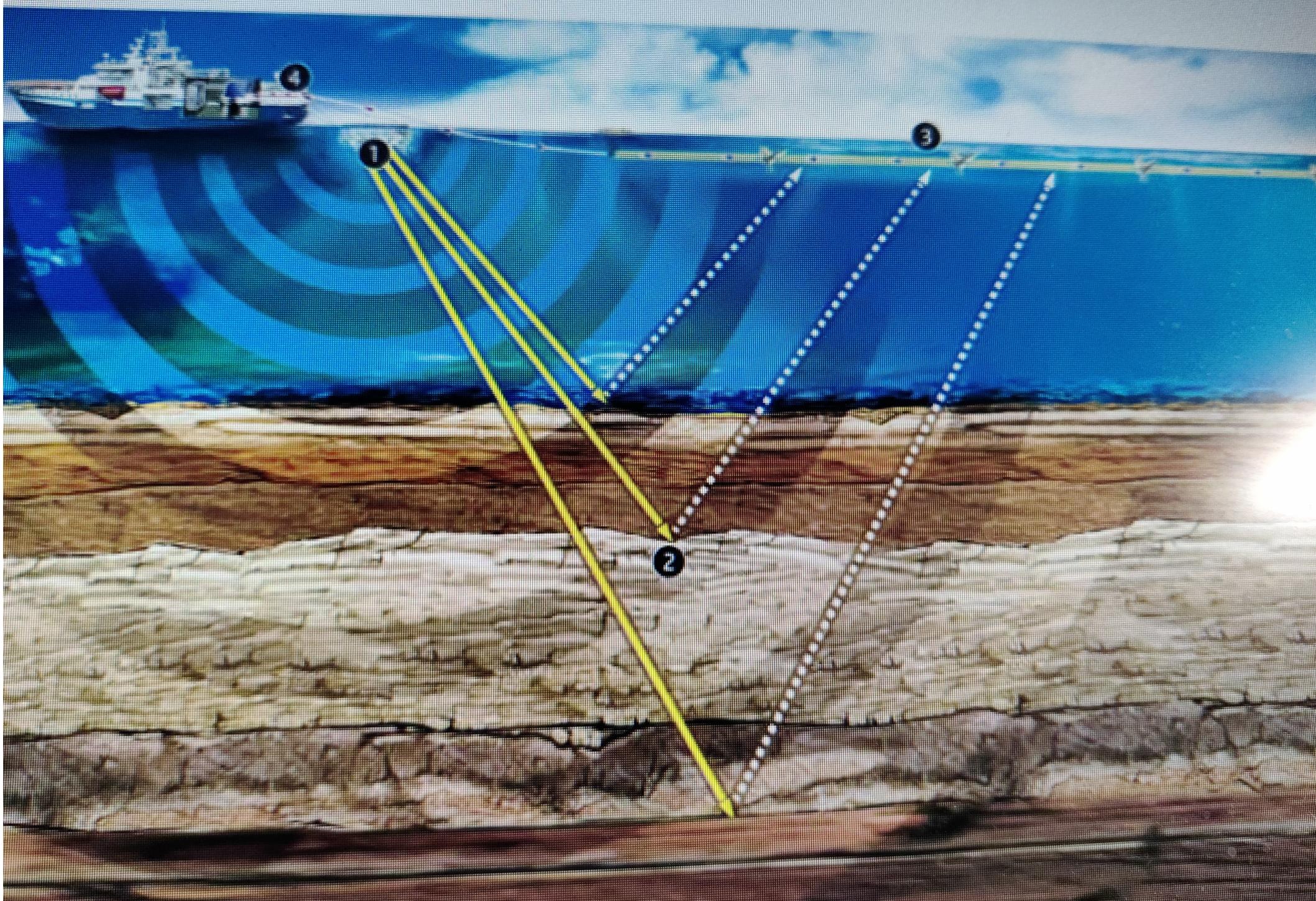


$t = 0.05$ (s)

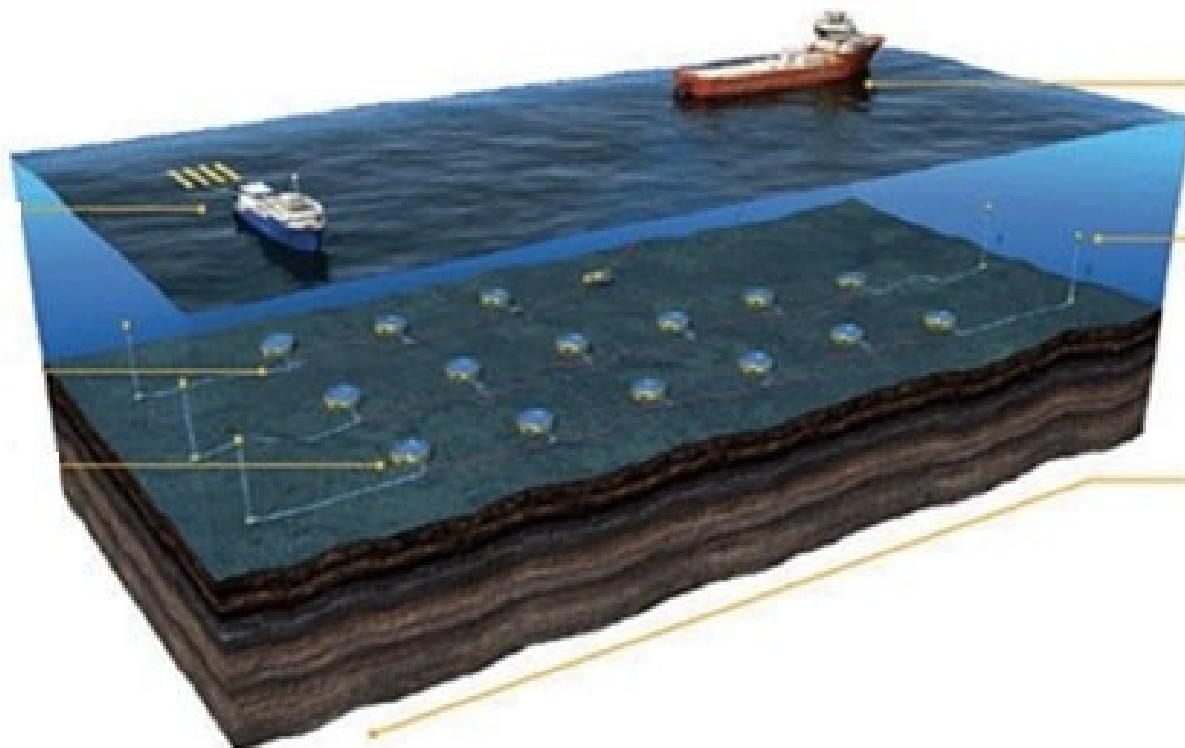


Численное моделирование в геологии





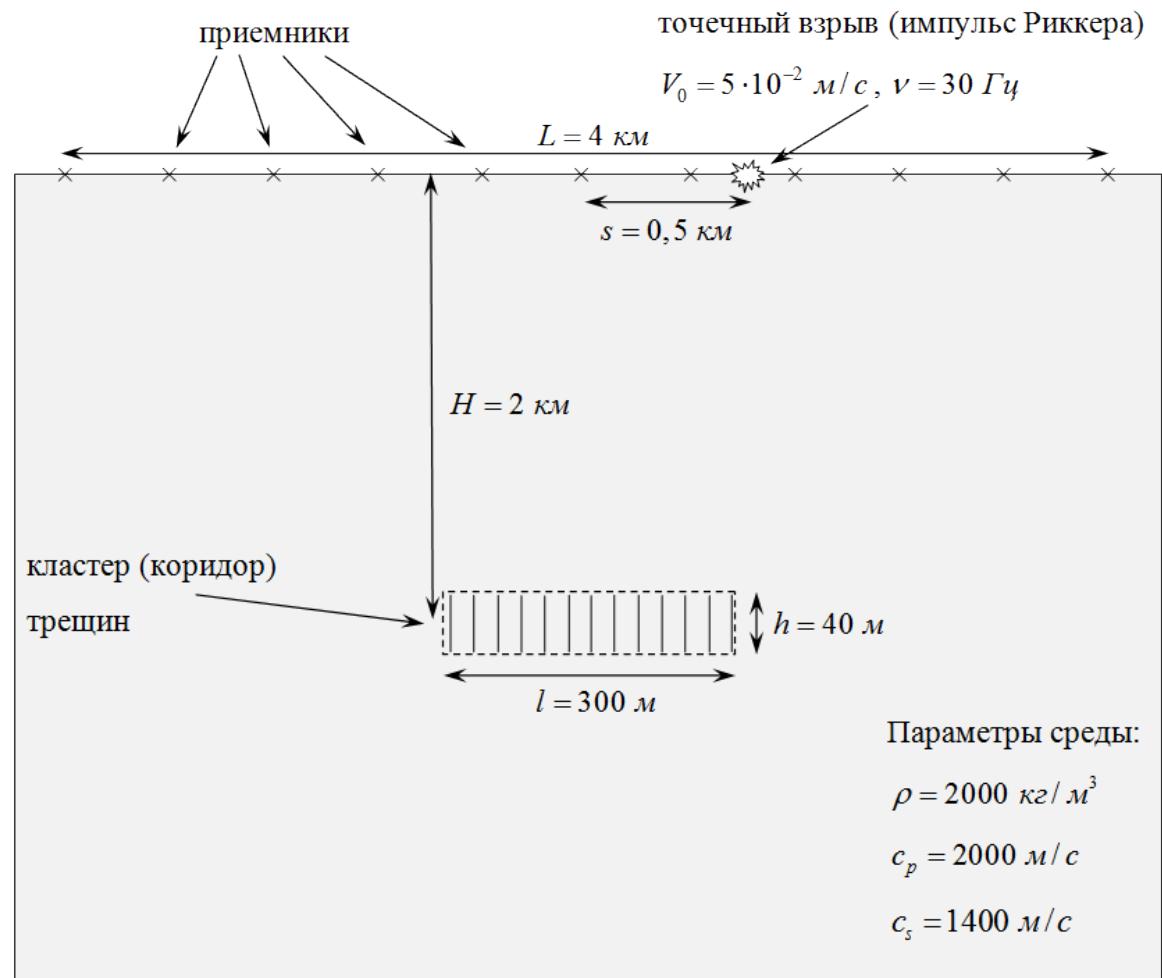
Сейсмика – донные станции

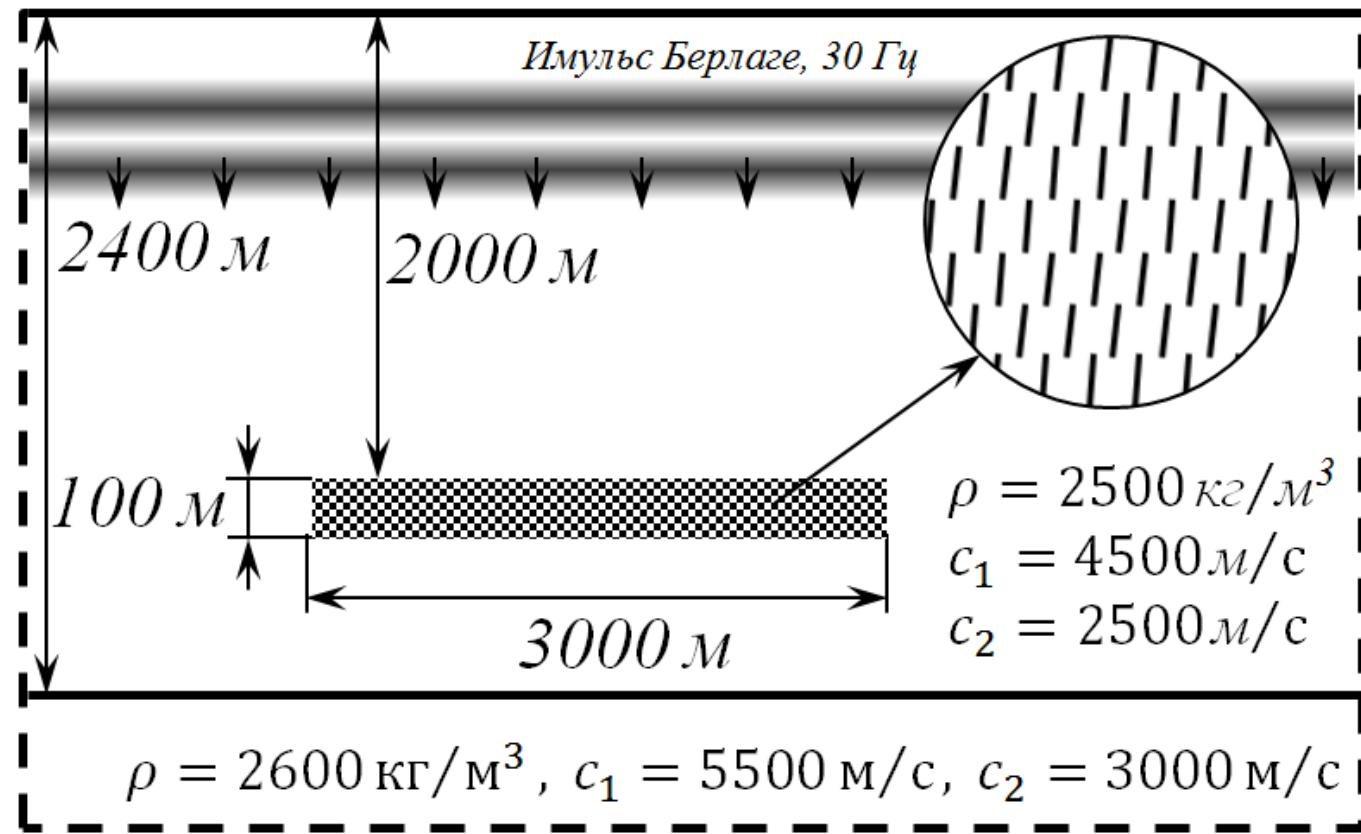


- 3D/4C
- Высокая стоимость
- Высокая информативность данных

Задачи численного моделирования

- Исследование свойств геологических сред
- Выявление закономерностей откликов
- Построение осредненных моделей сред
- Обратные задачи численного моделирования



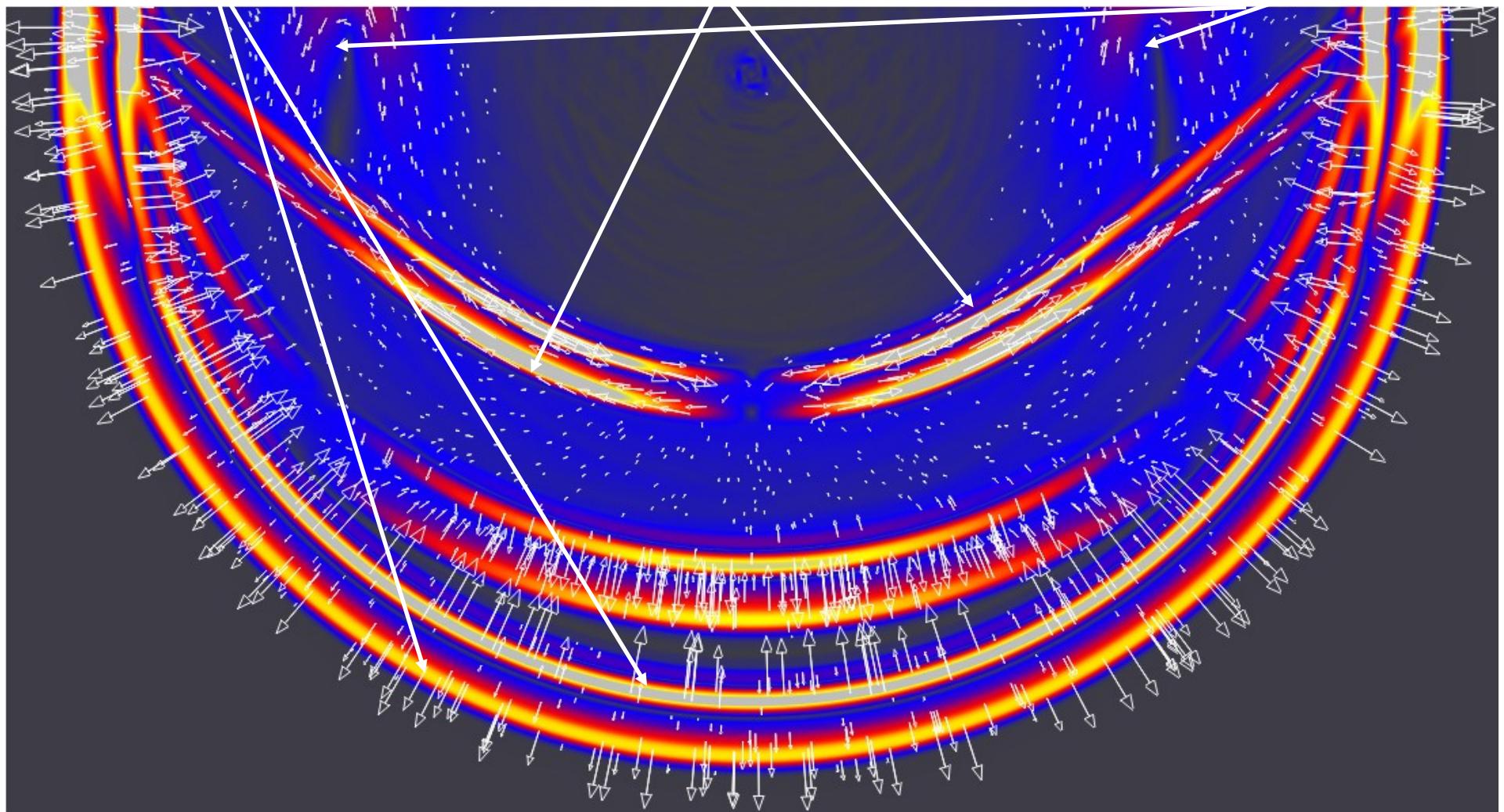


Взрыв рядом с поверхностью

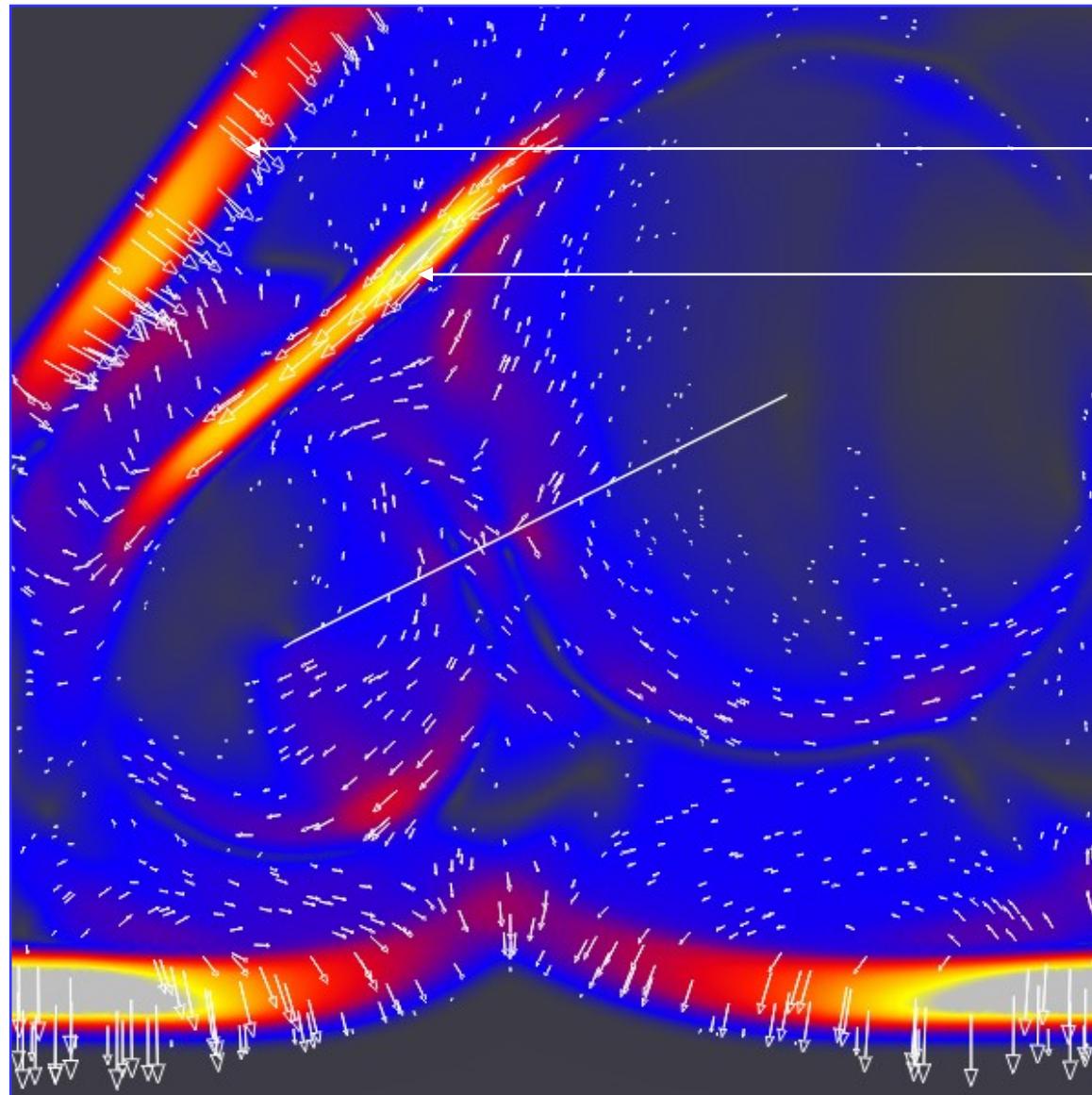
продольные волны

поперечные волны

Волна Релея



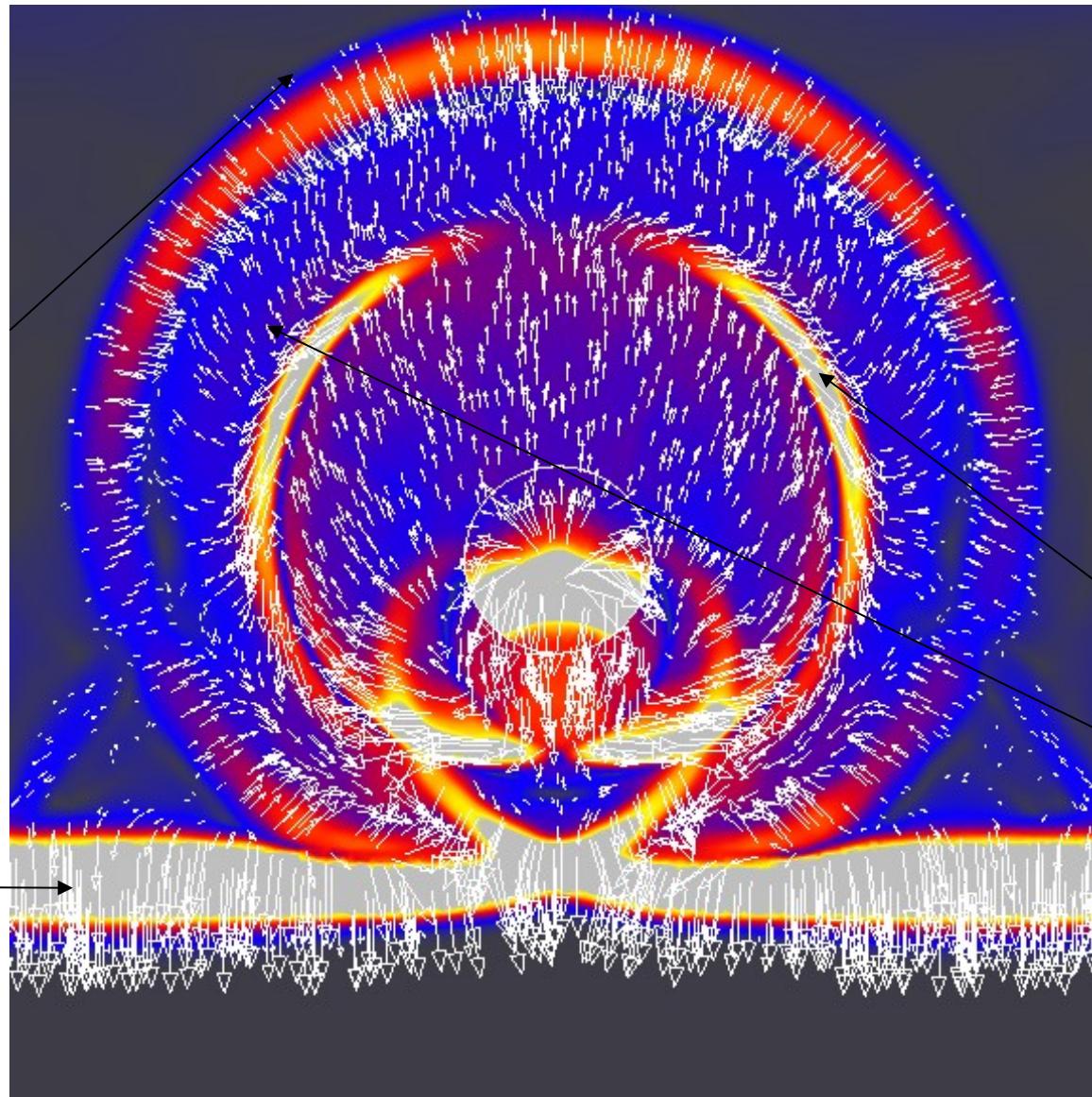
Газонасыщенная трещина



Простая флюидонасыщенная полость

Отраженная
продольная
волна

Прошедшая волна



Отраженная
волна

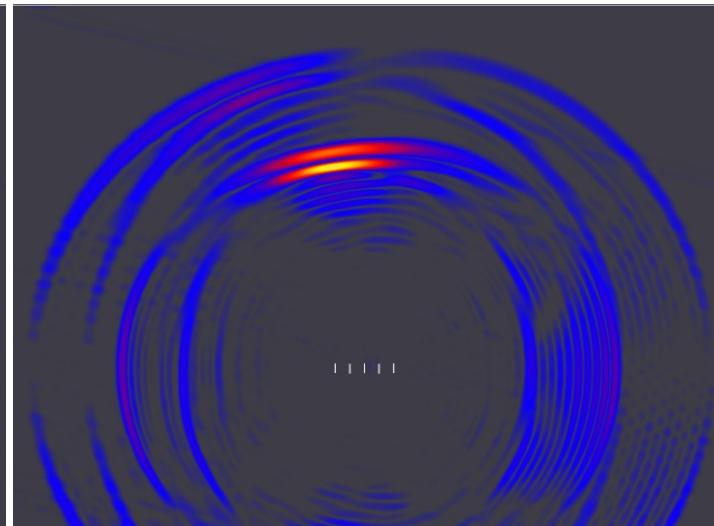
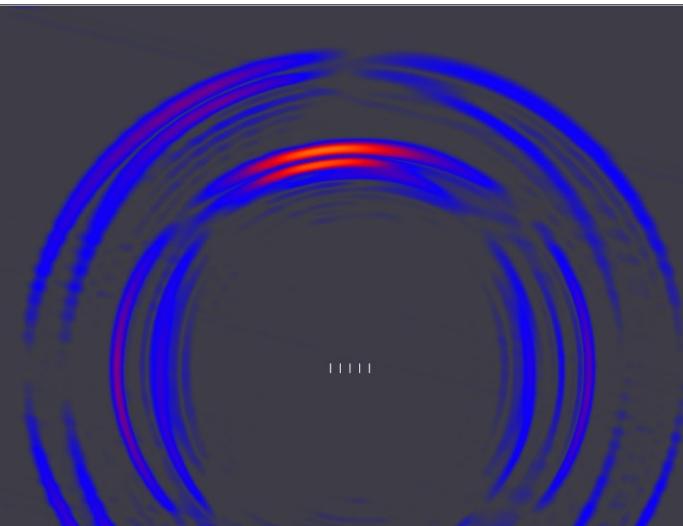
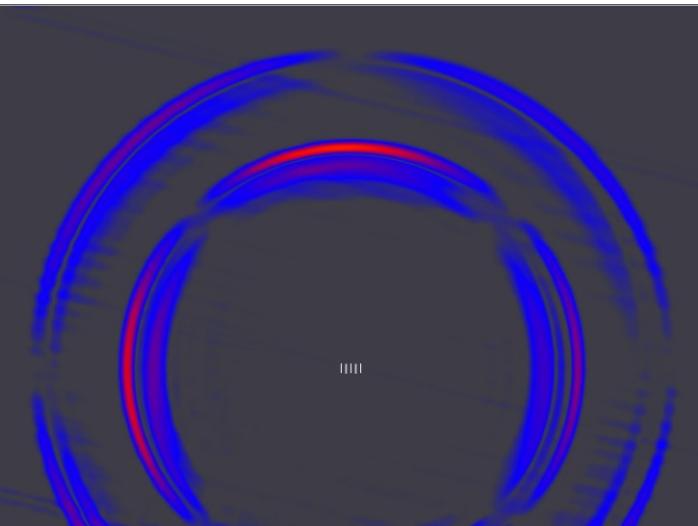
Коридор флюидонасыщенных вертикальных трещин

0,5

расстояние между трещинами / длина трещин

1,0

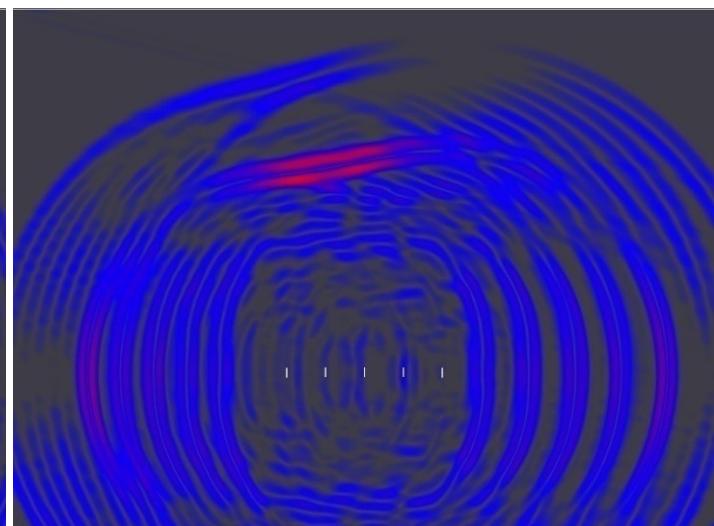
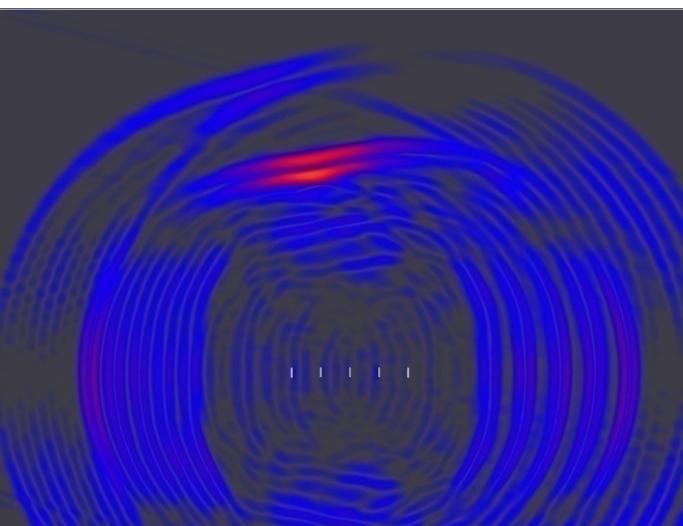
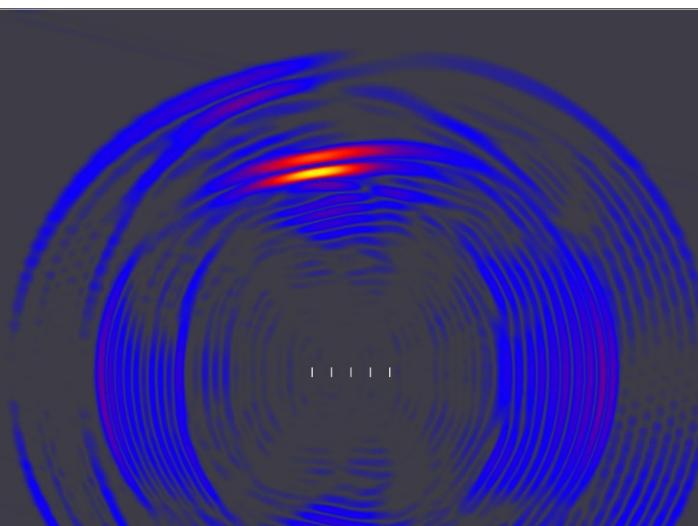
1,5



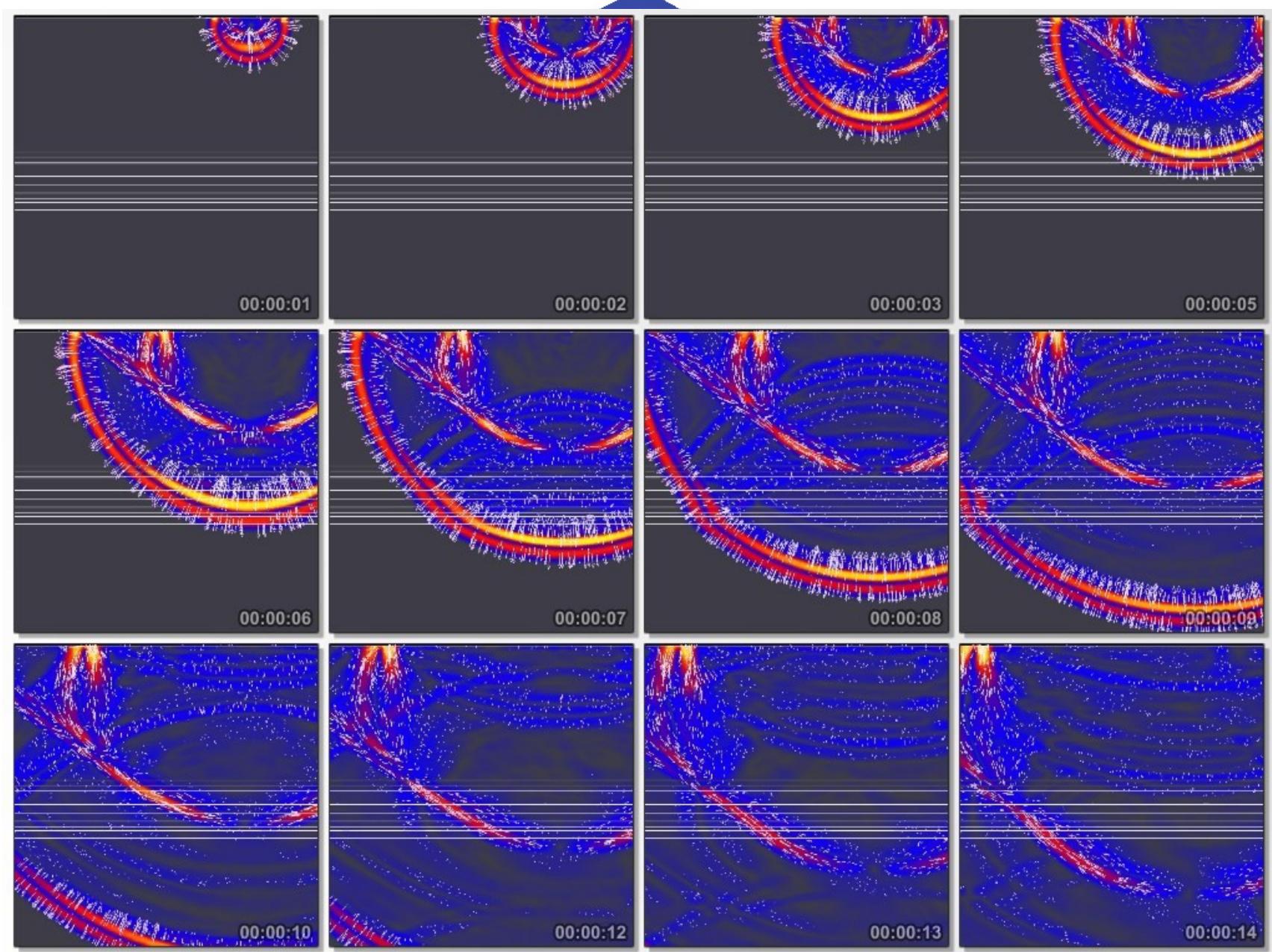
2,0

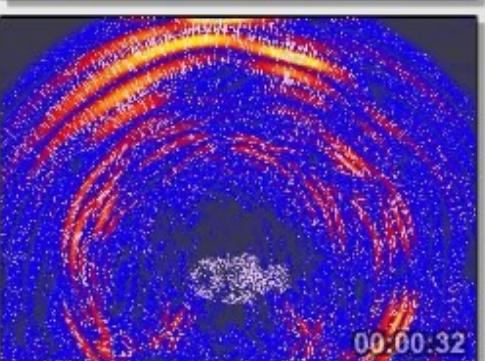
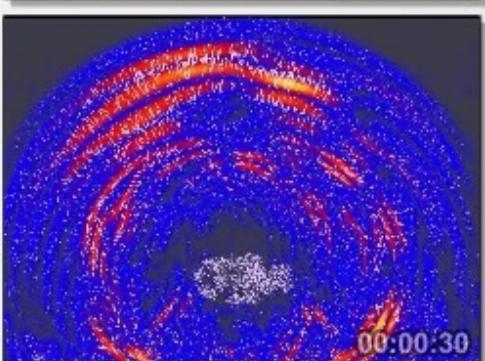
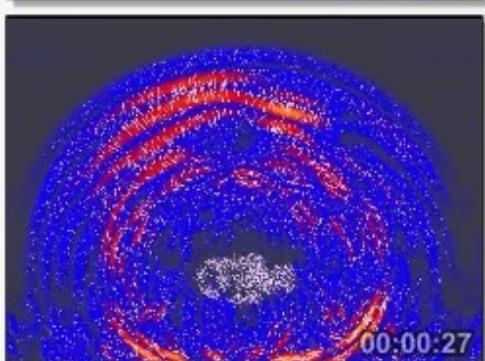
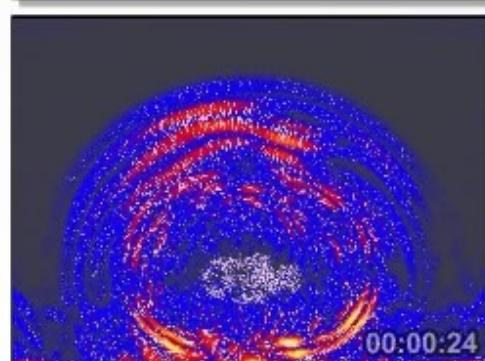
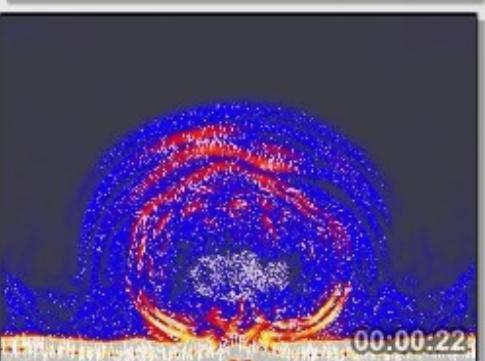
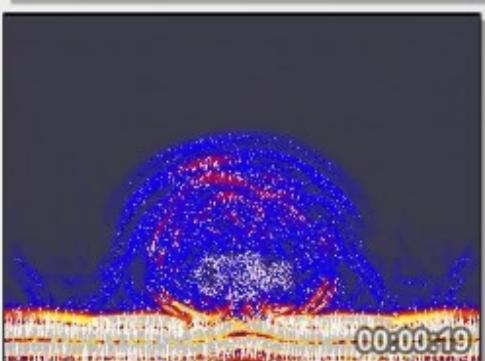
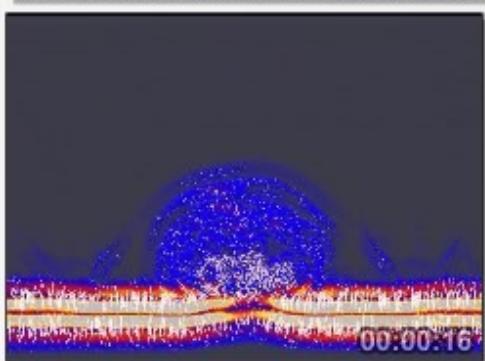
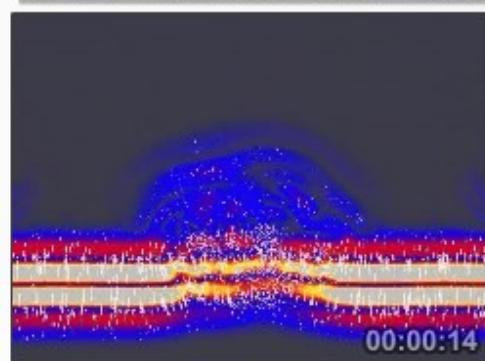
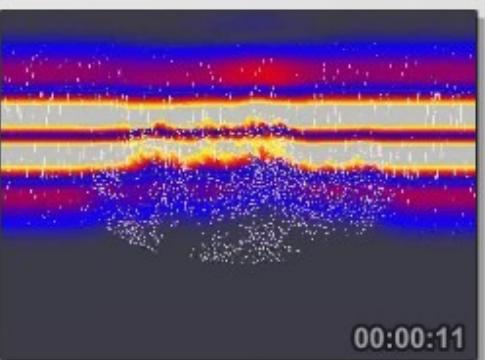
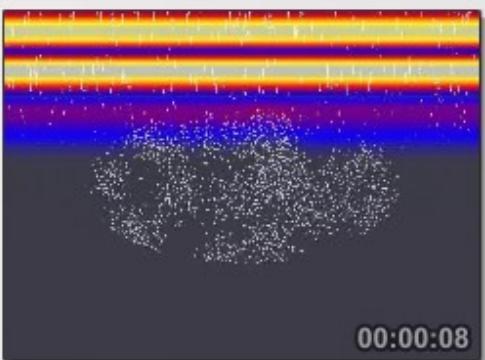
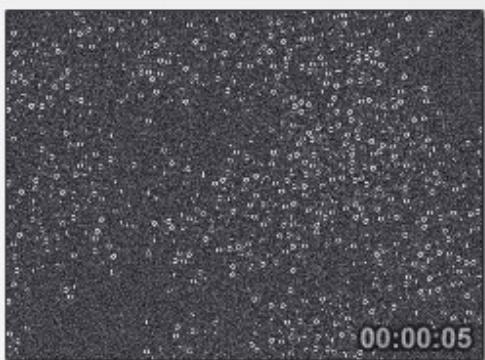
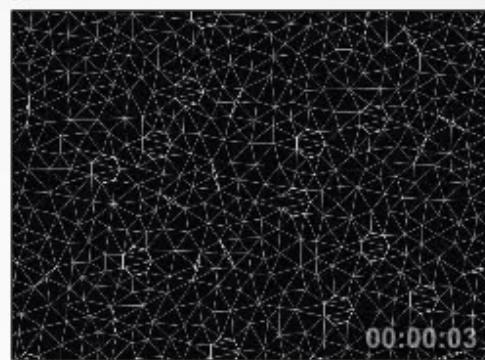
3,0

4,0

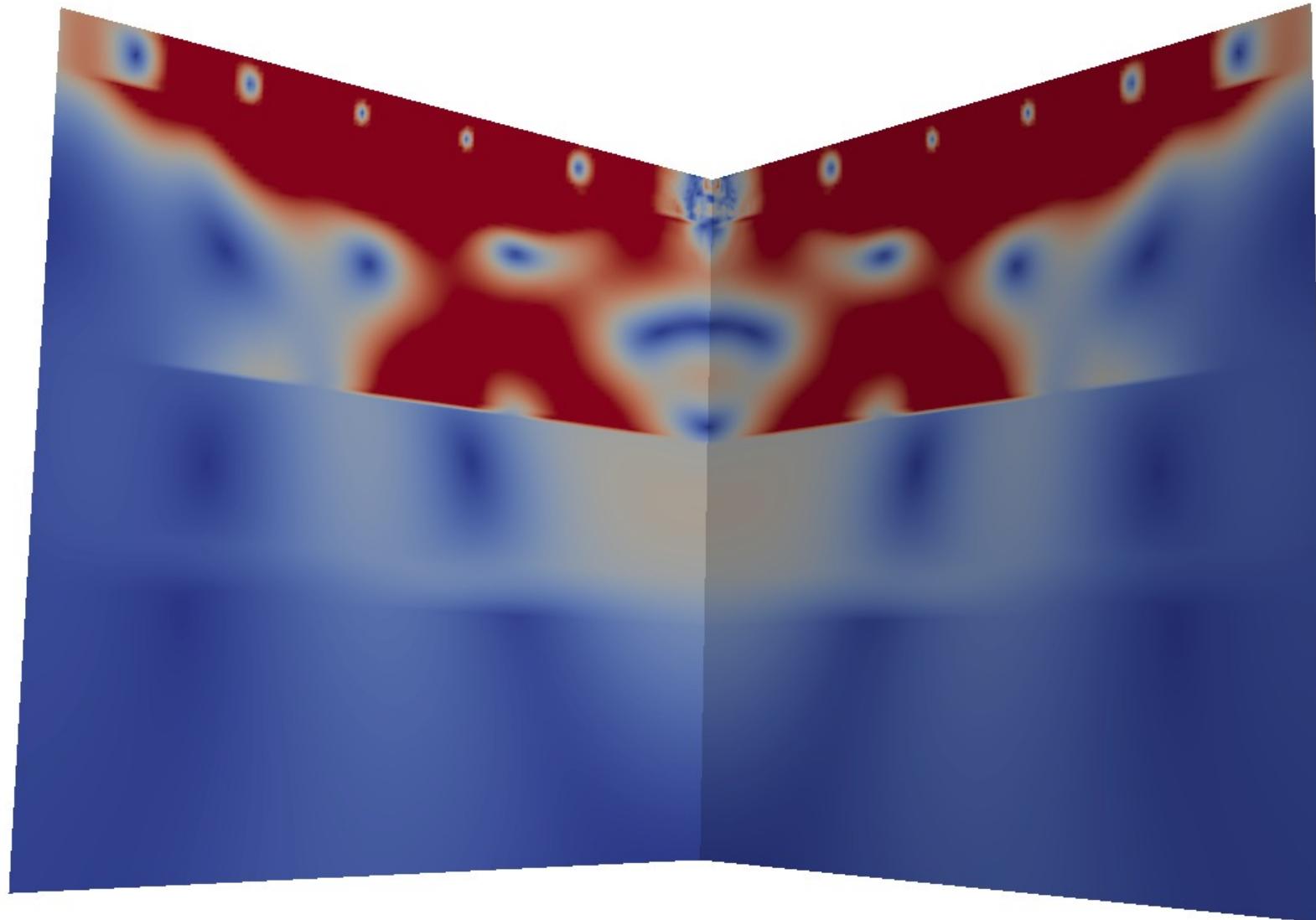


Волновая картина в слое льда

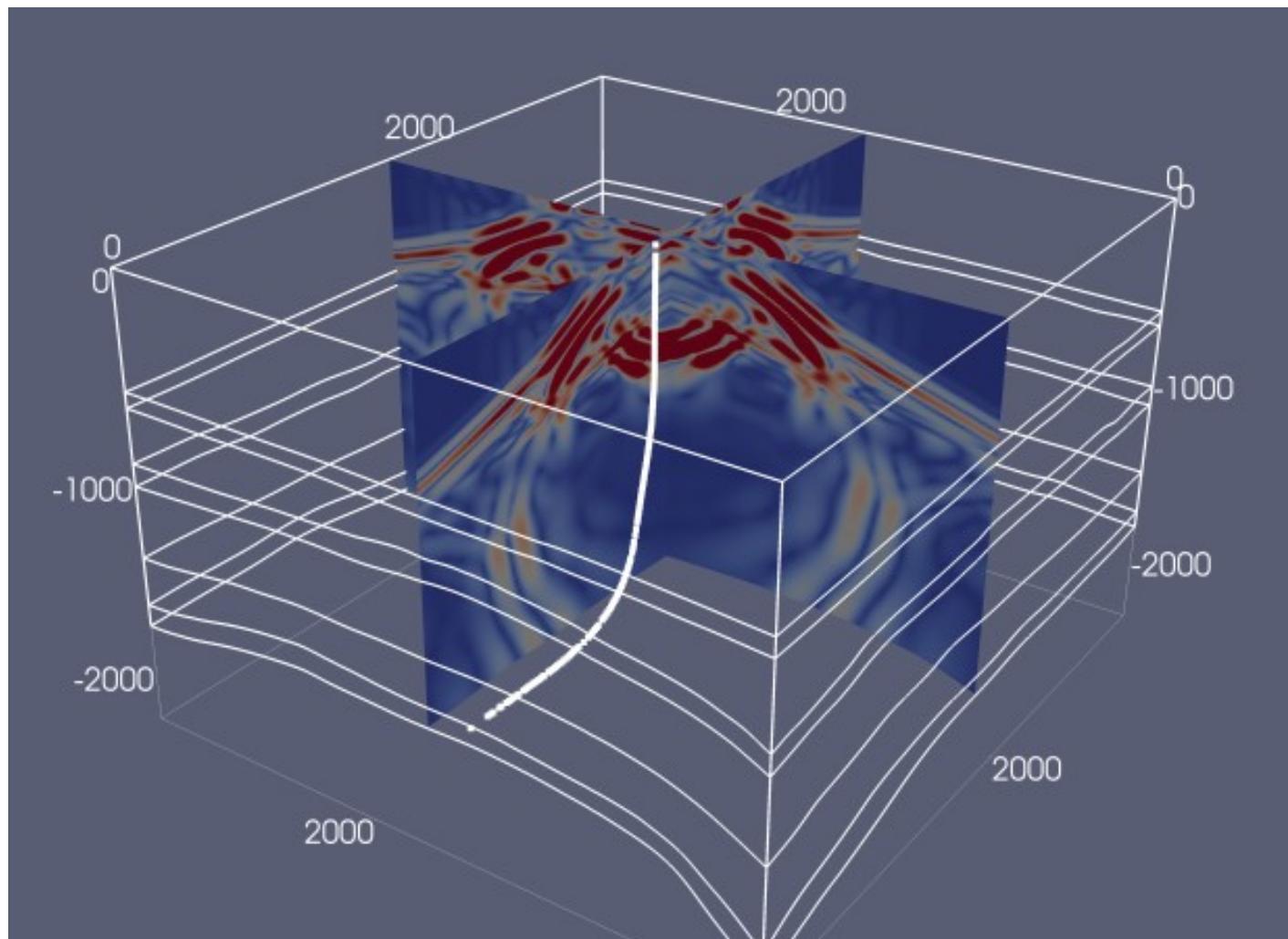




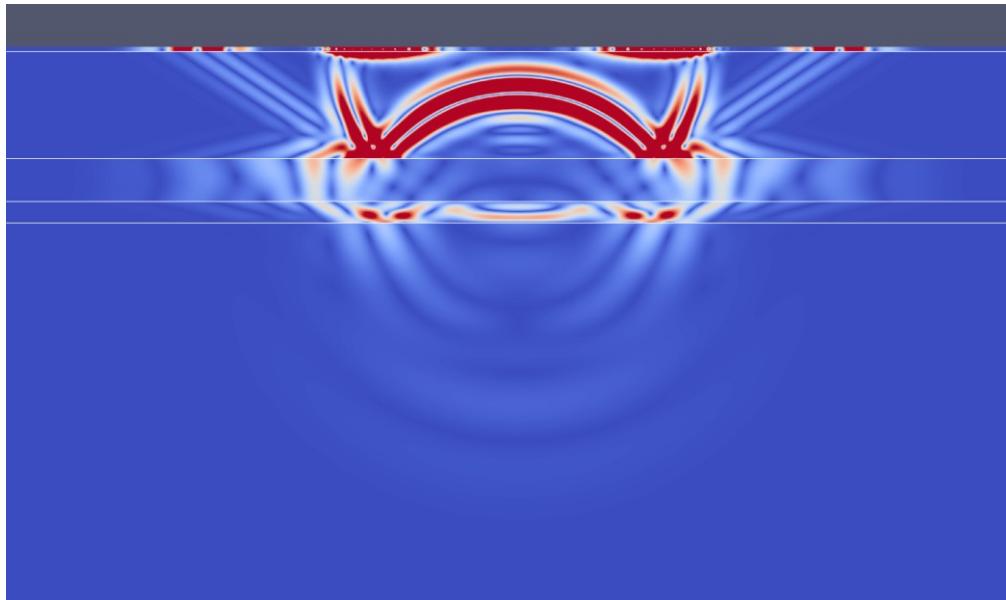
Сейсмическая разведка Арктического шельфа



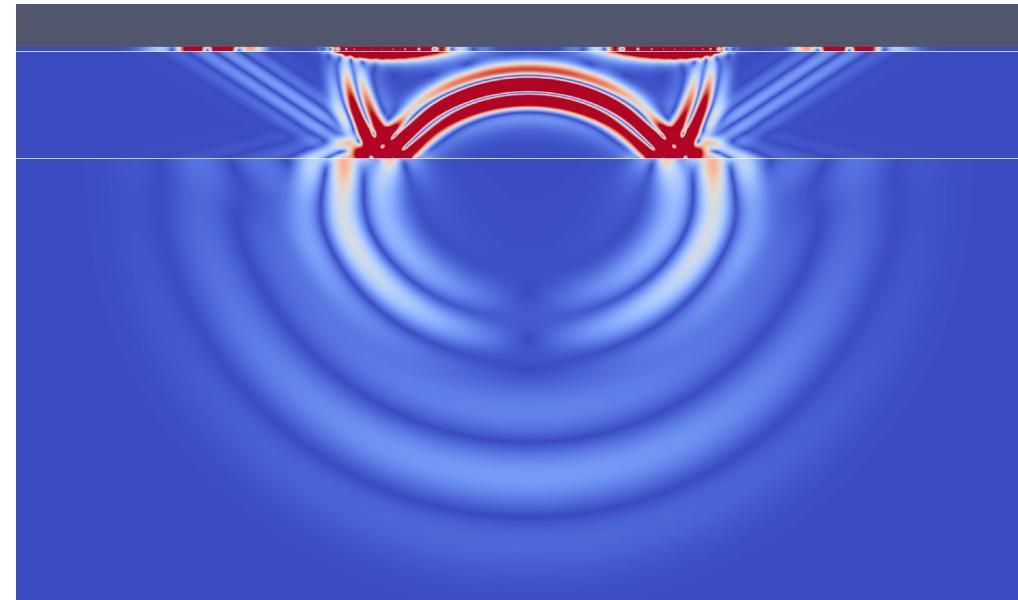
Волновое поле в гетерогенной модели



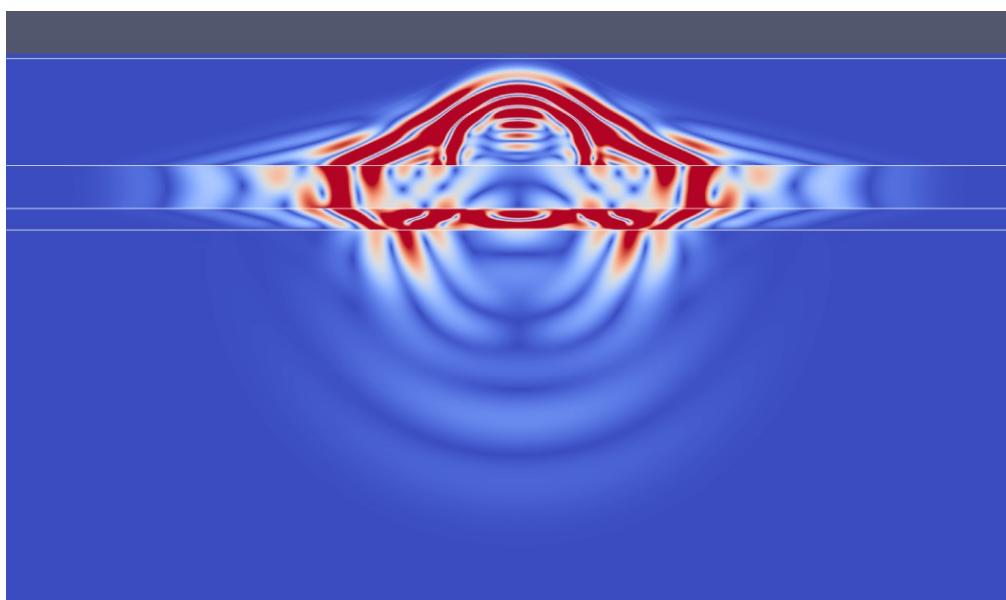
Волновые картины



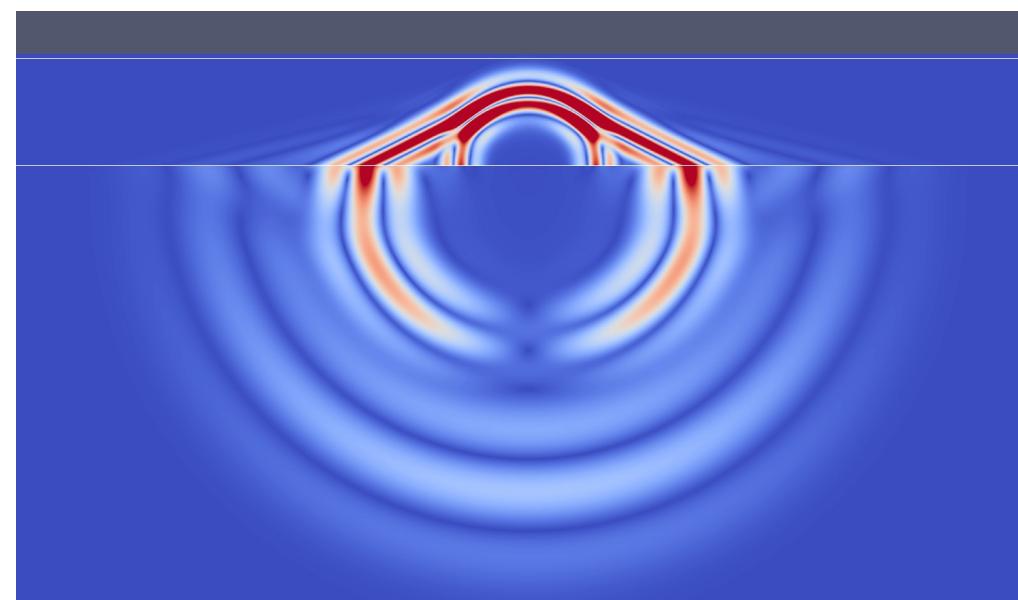
Источник во льду, 0.135 сек.



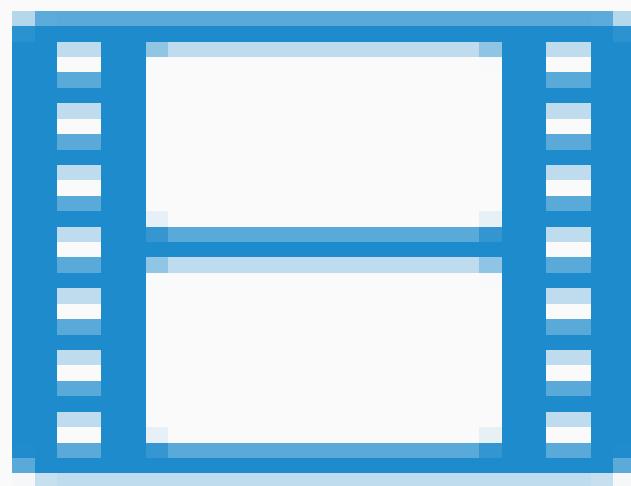
Источник во льду, без резервуара, 0.135 сек.



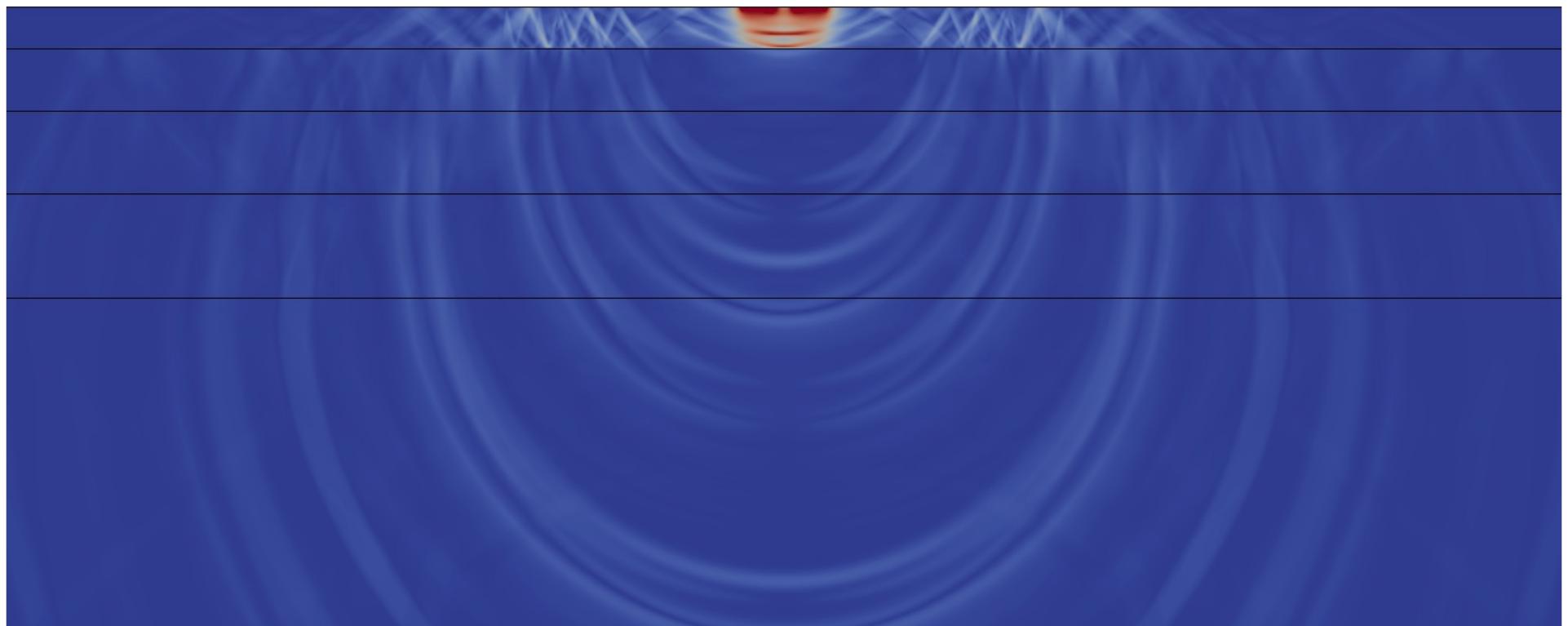
Источник на дне, 0.0675 сек.



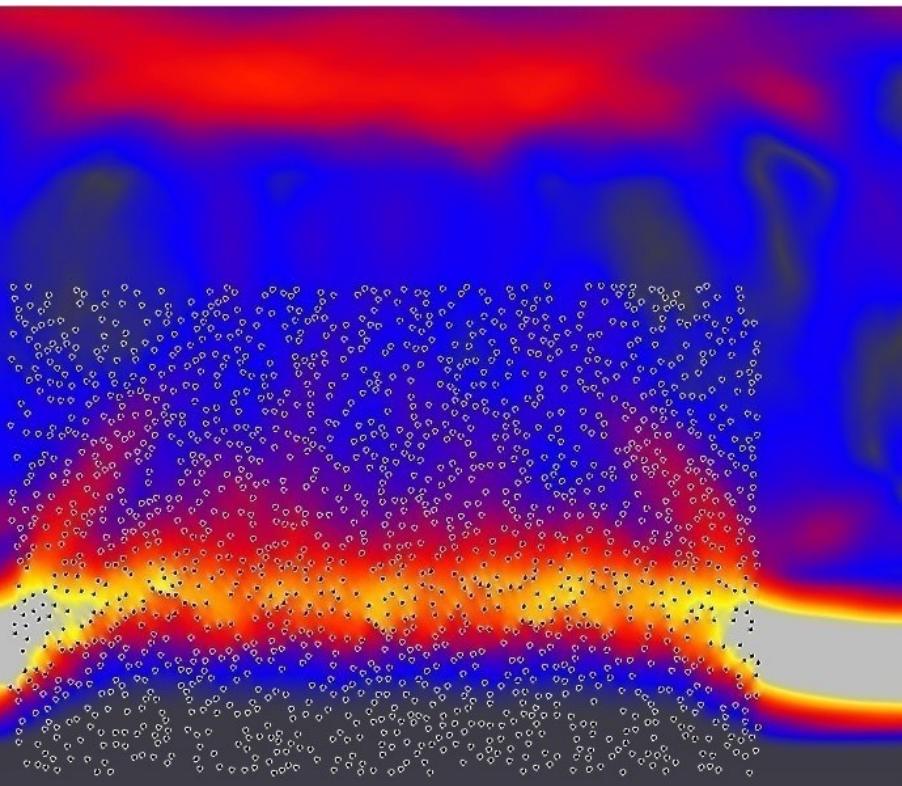
Источник в воде, без резервуара, 0.0675 сек.



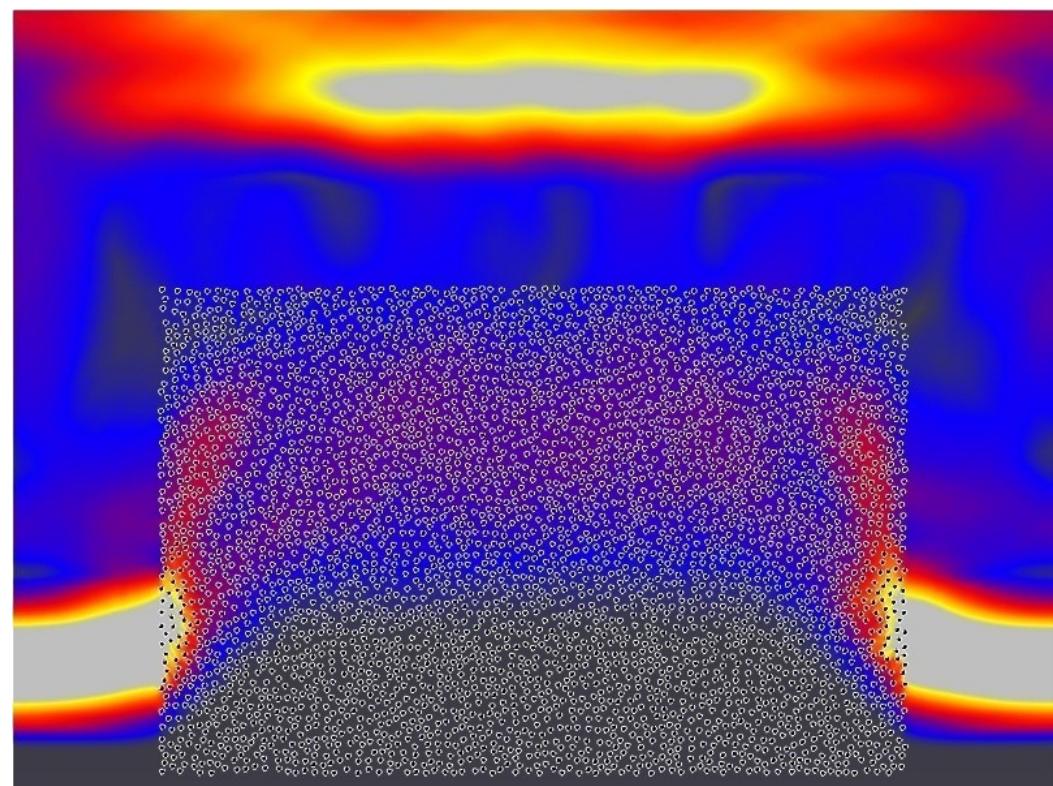
Многослойная порода



Сравнение сред с разной пористостью

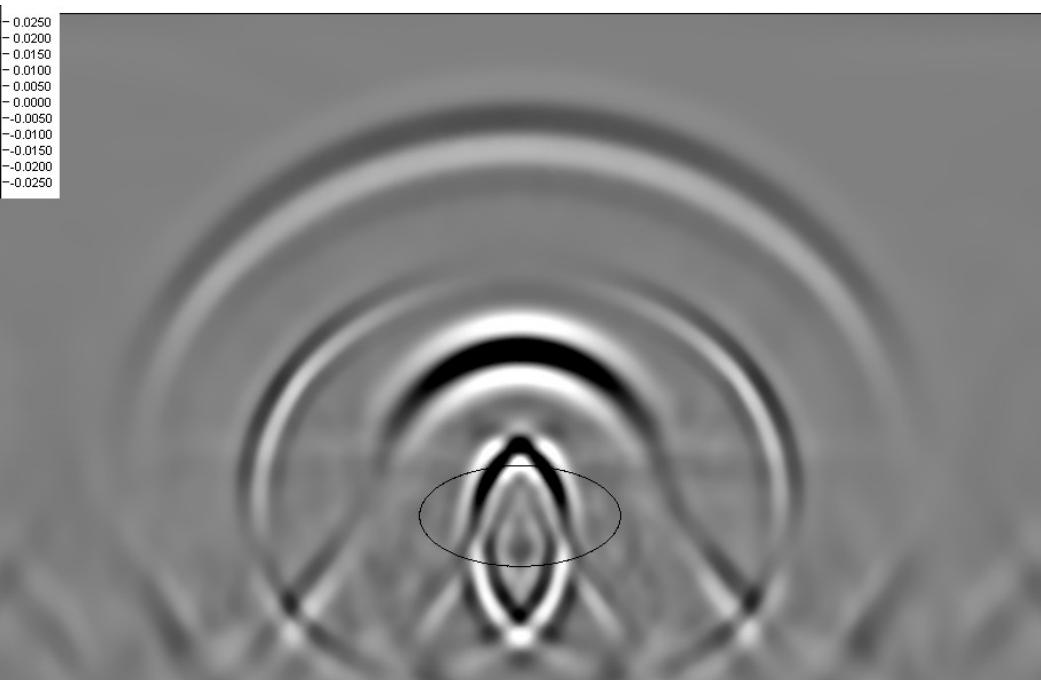


Porosity 10%

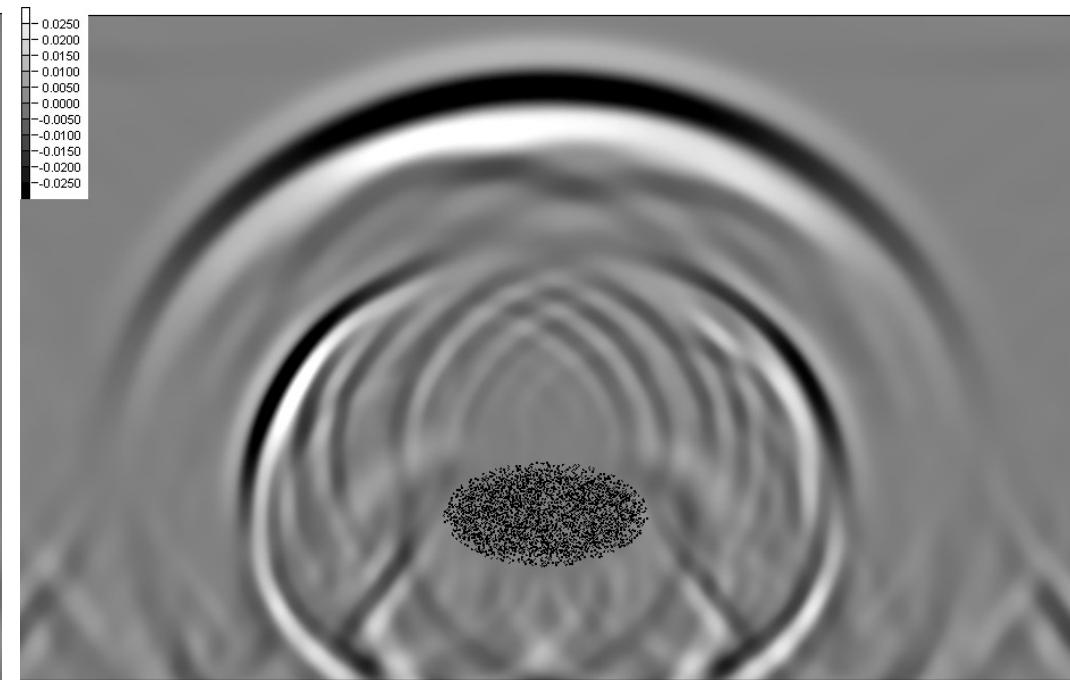


Porosity 40%

Сравнение с осредненной моделью

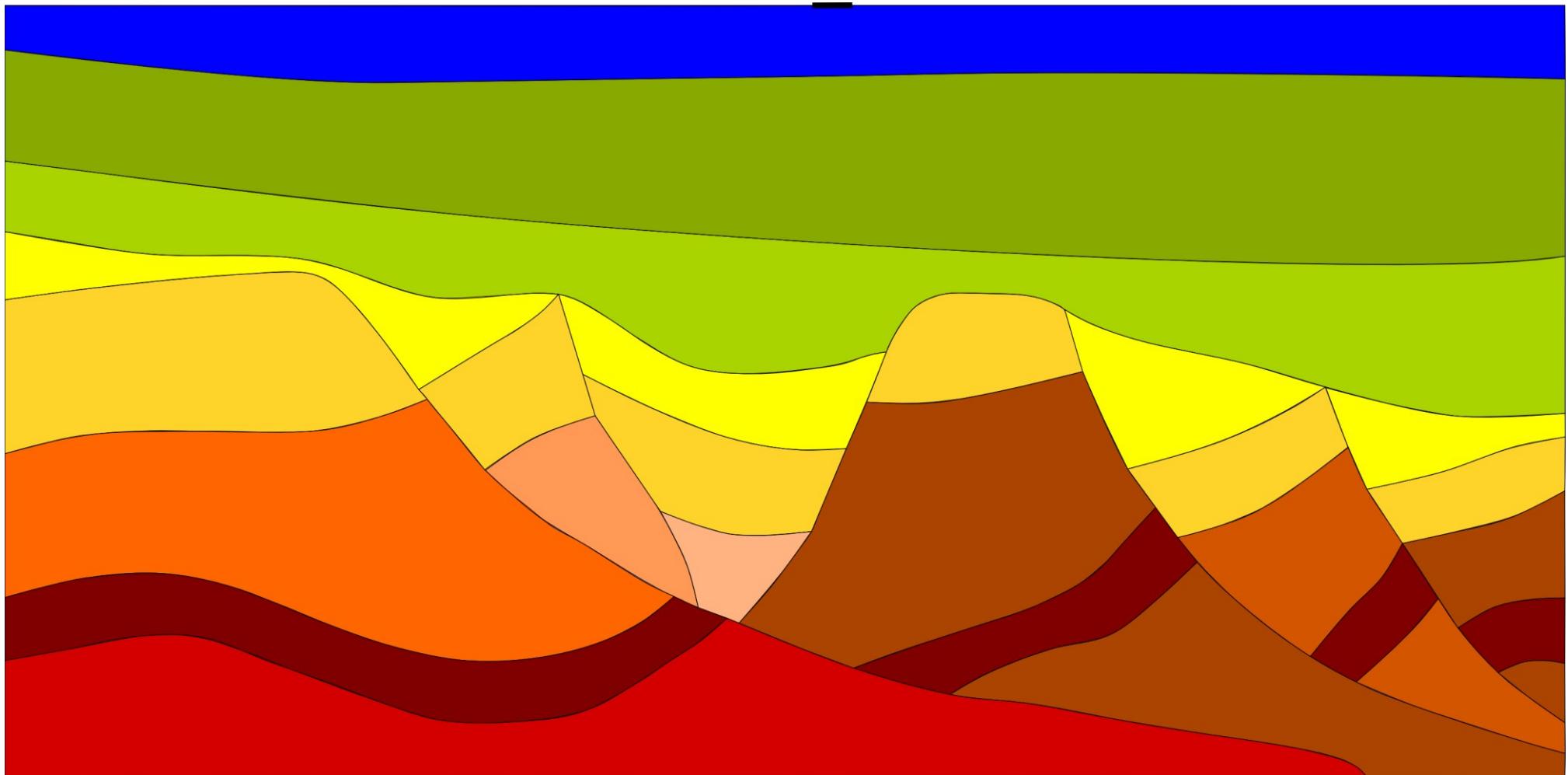


Averaged medium

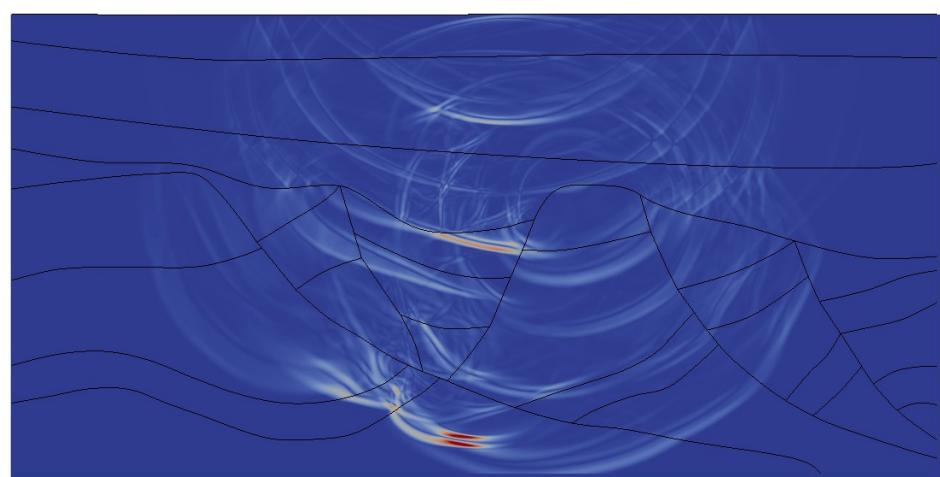
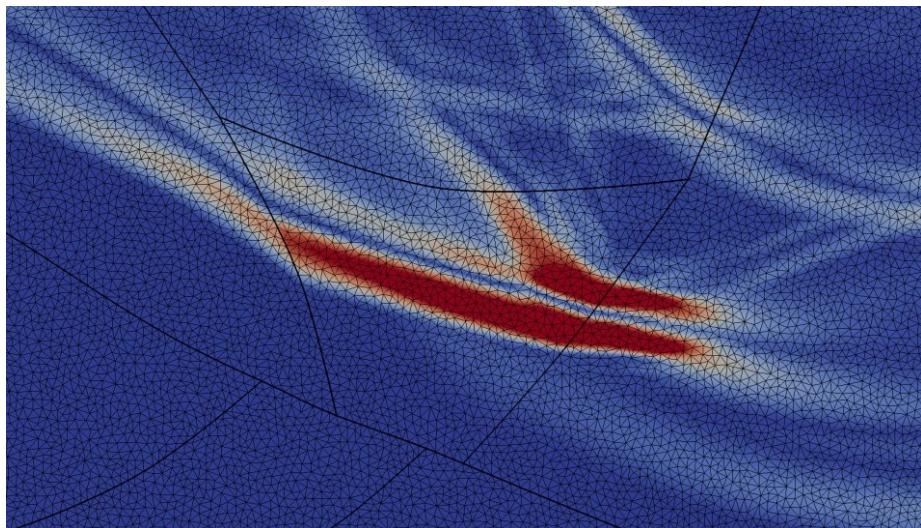
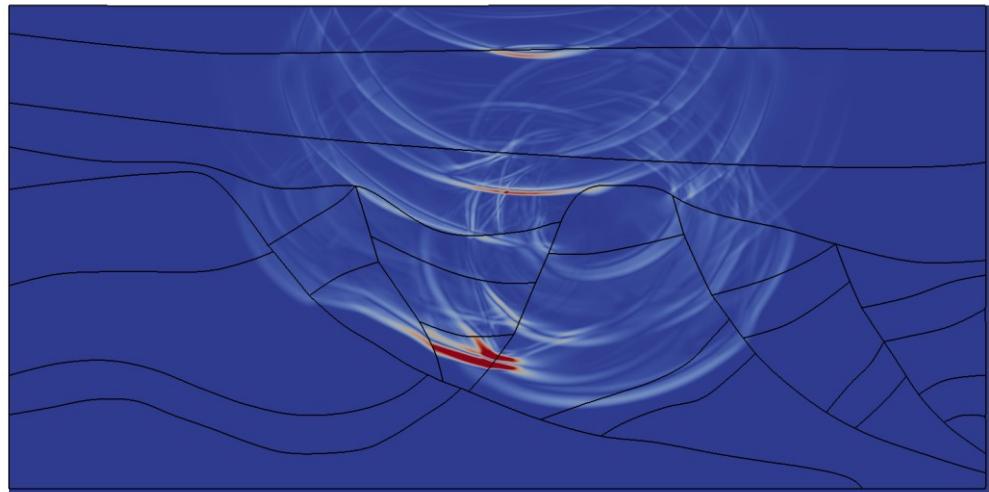
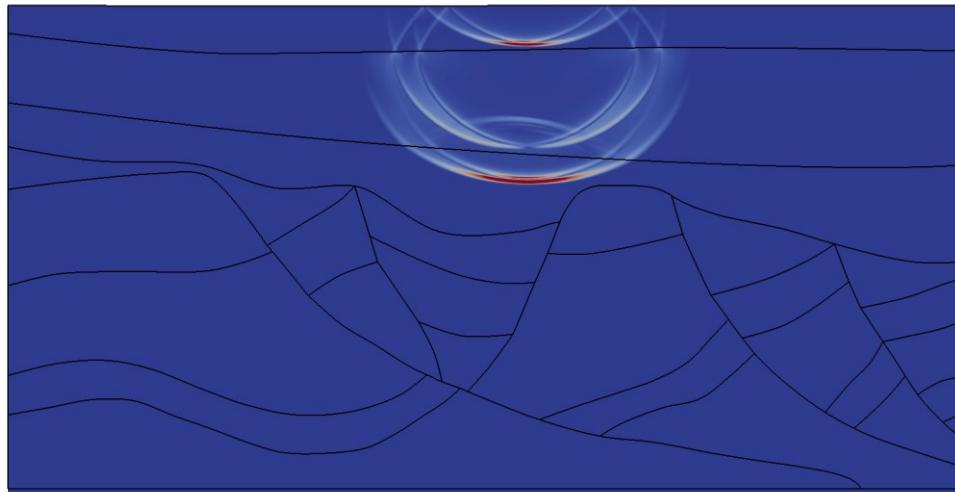


Cluster of cracks and cavities

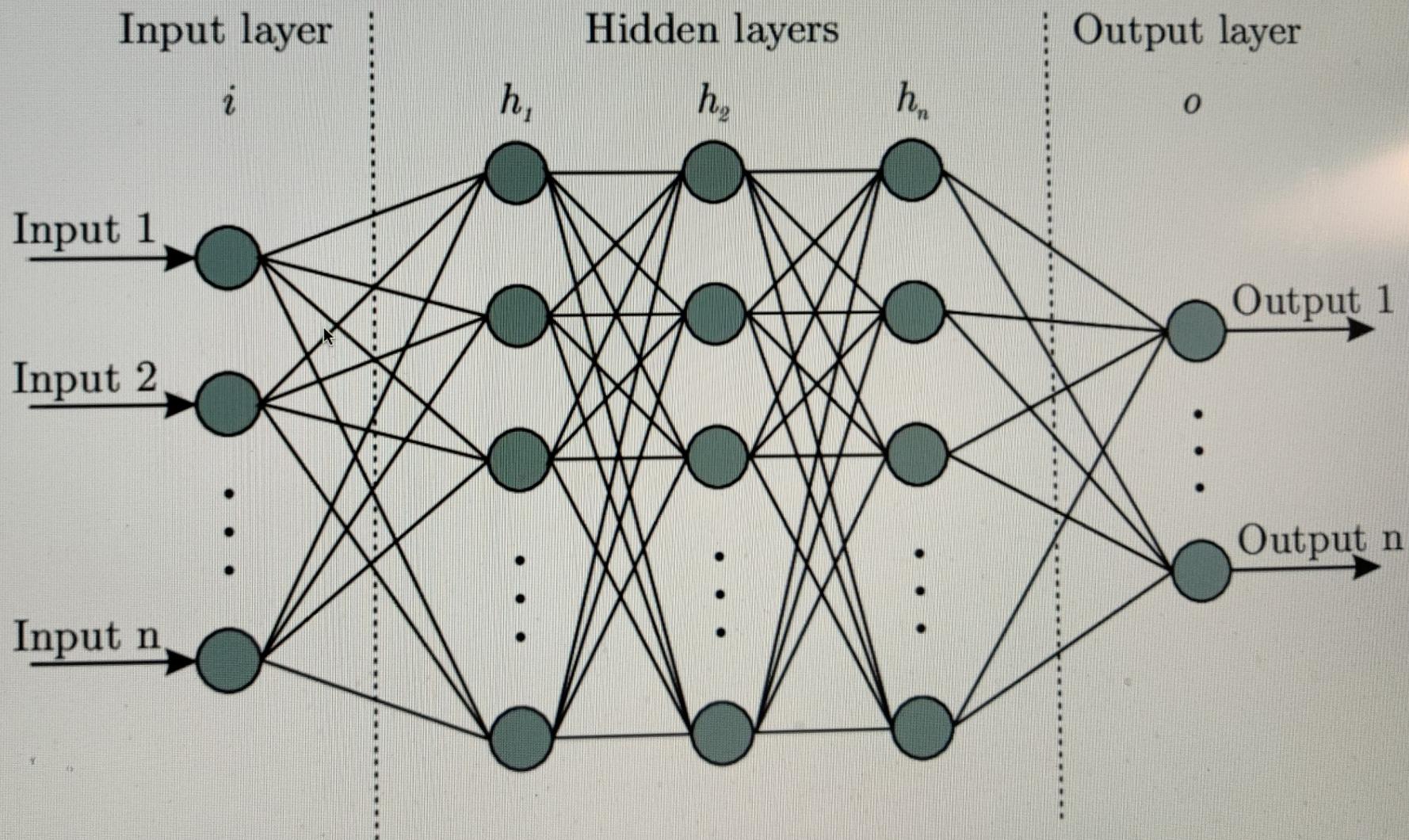
Геология со сложными границами



Геология со сложными границами

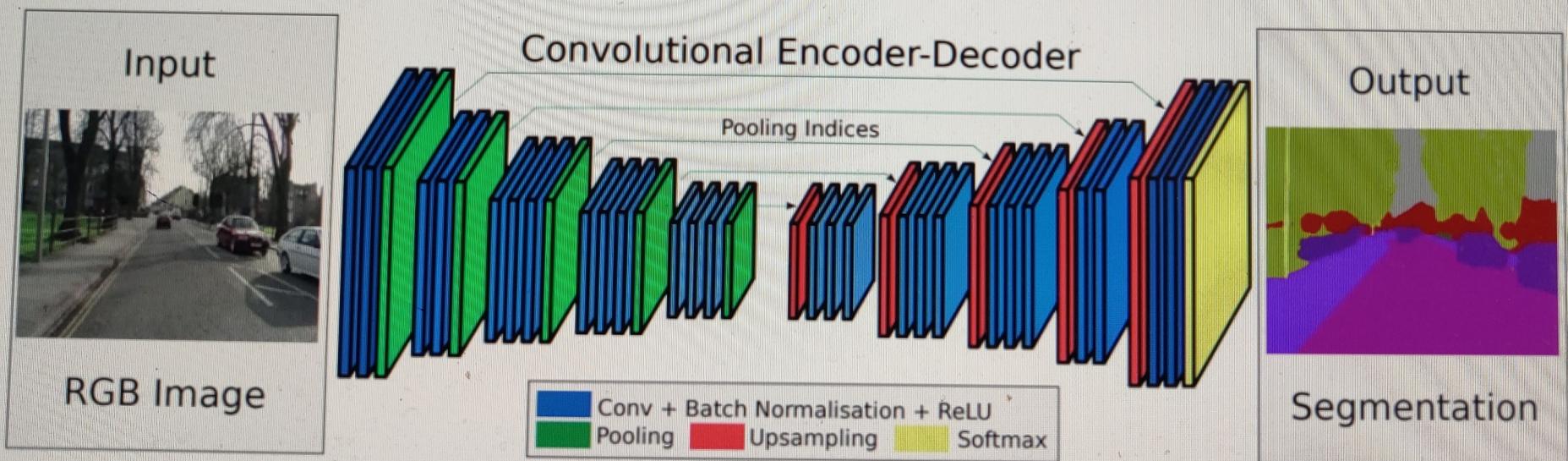


The structure of neural network

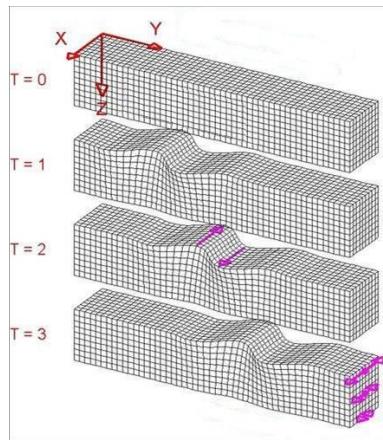


Определение формы аберратора в 3D.

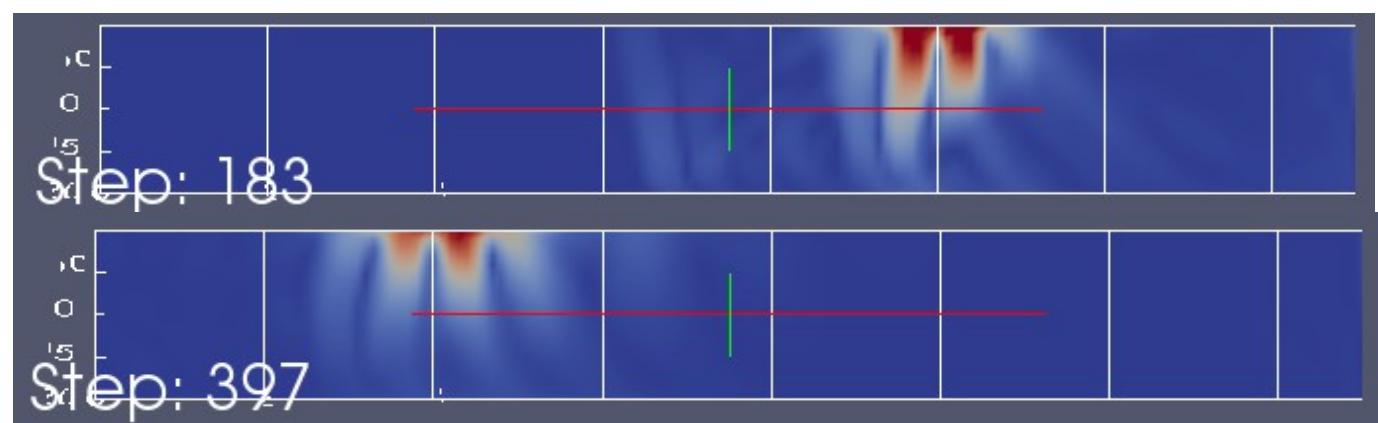
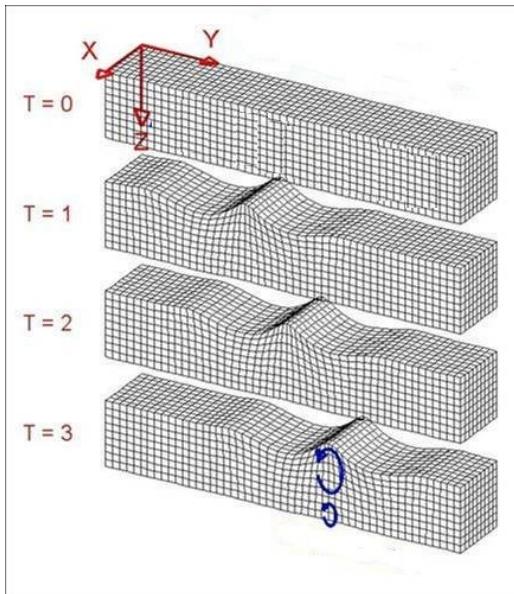
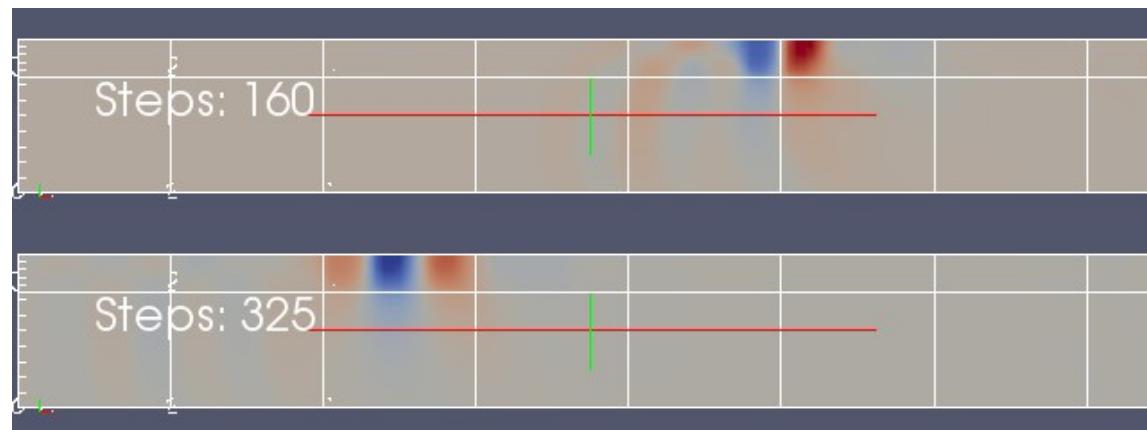
- Задача сегментации сформированного В-скана или uncompounded pre-beamformed данных.
- Свёрточная сеть архитектуры UNet.
- Обучение на расчётных данных.
- BCE в качестве функционала потерь, оптимизация Adam с постоянной скоростью обучения.



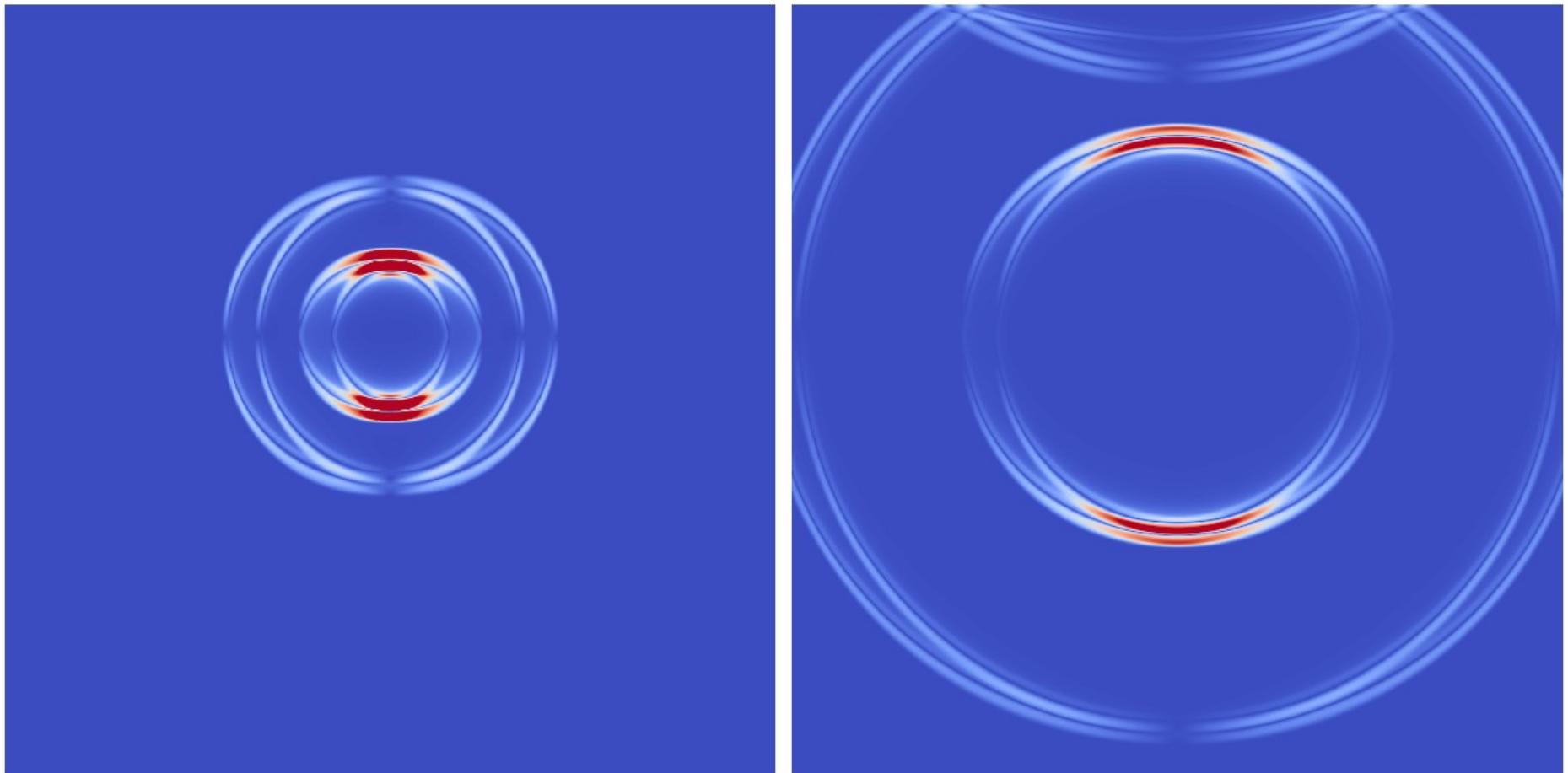
Волны Лява и Релея



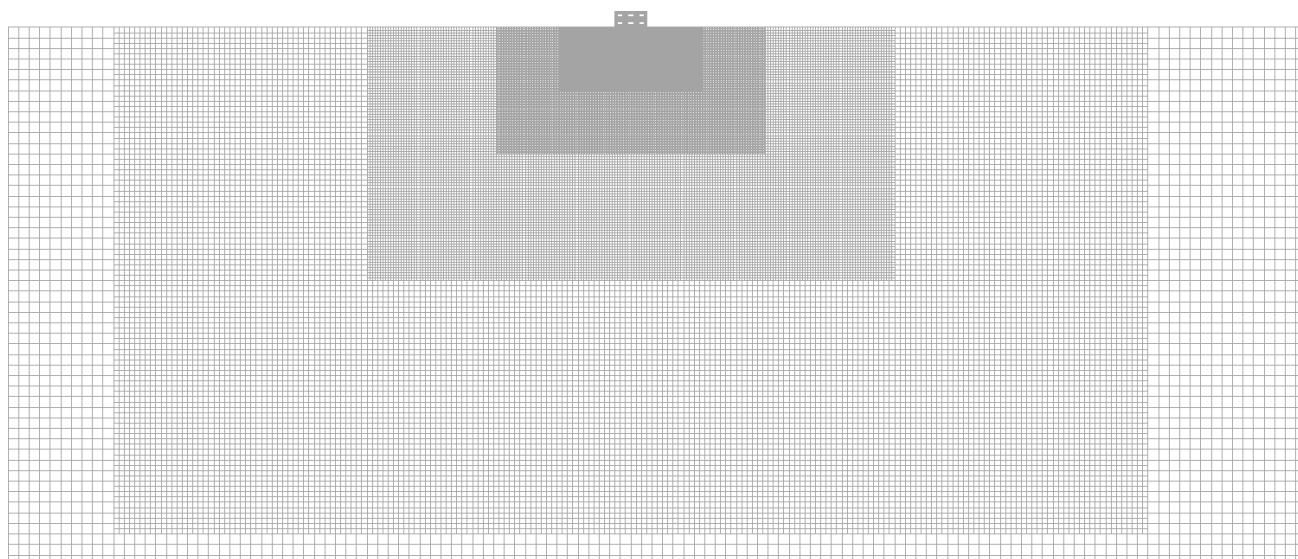
Волны Лява



Расчет воздействия на наземное сооружение сейсмических волн от эпицентра землетрясения



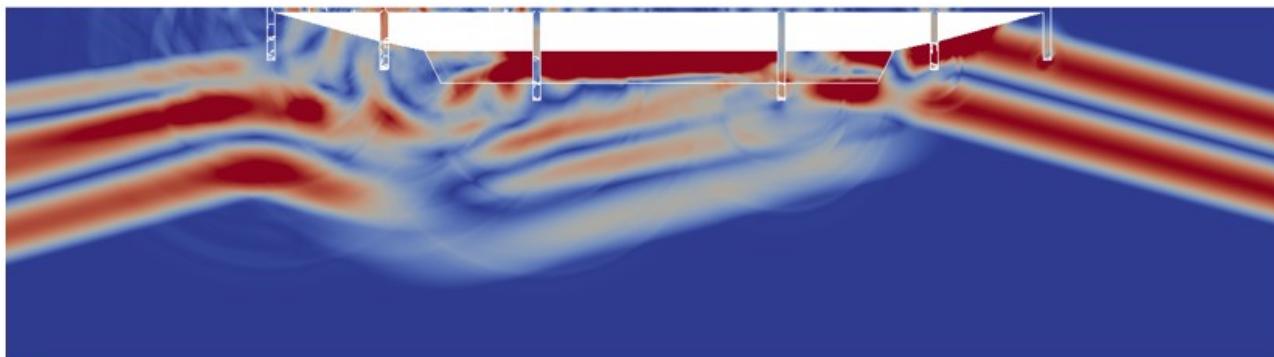
Seismic stability of the building



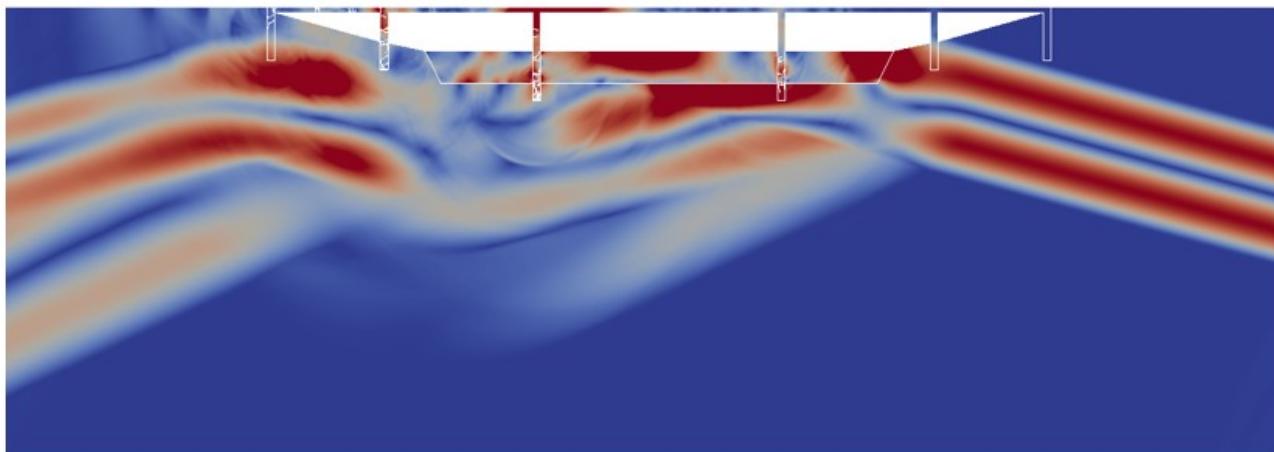
Прочность конструкций

Bridge over a River

River Width, Wave Patterns



❖ Plane P-wave initial conditions



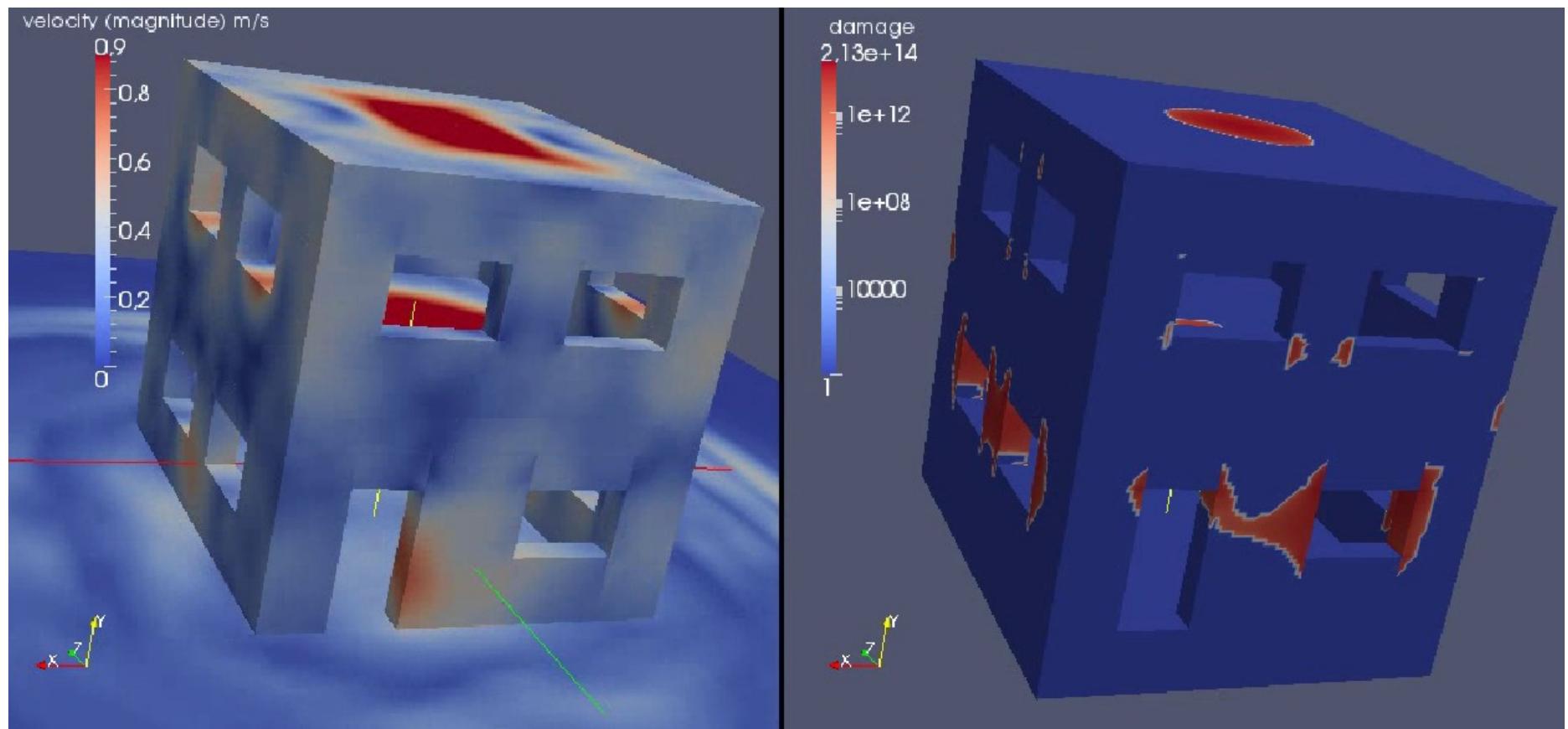
❖ Plane S-wave initial conditions

Dr Alena
FAVORSKAYA
idt20-15

32/34

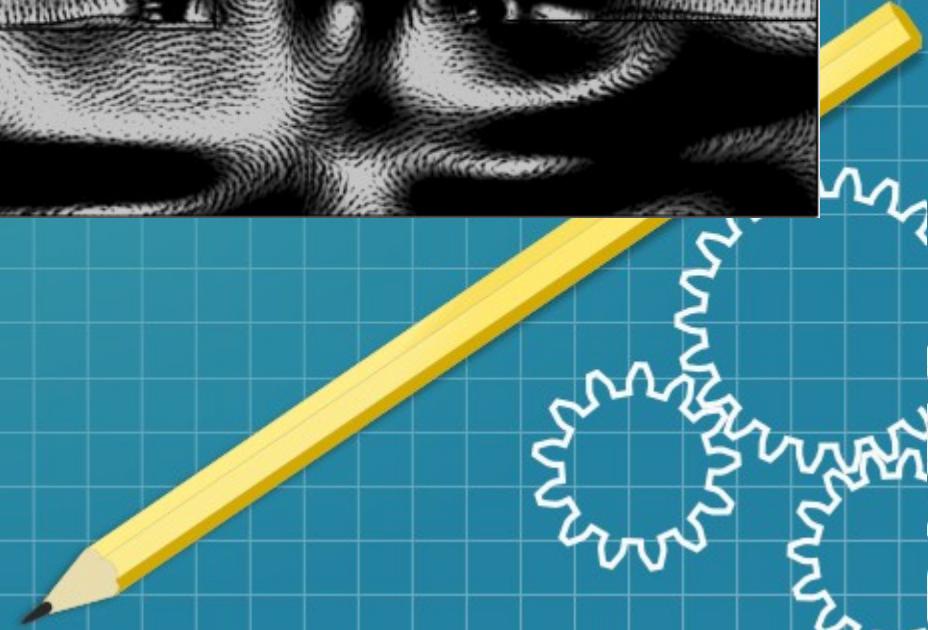
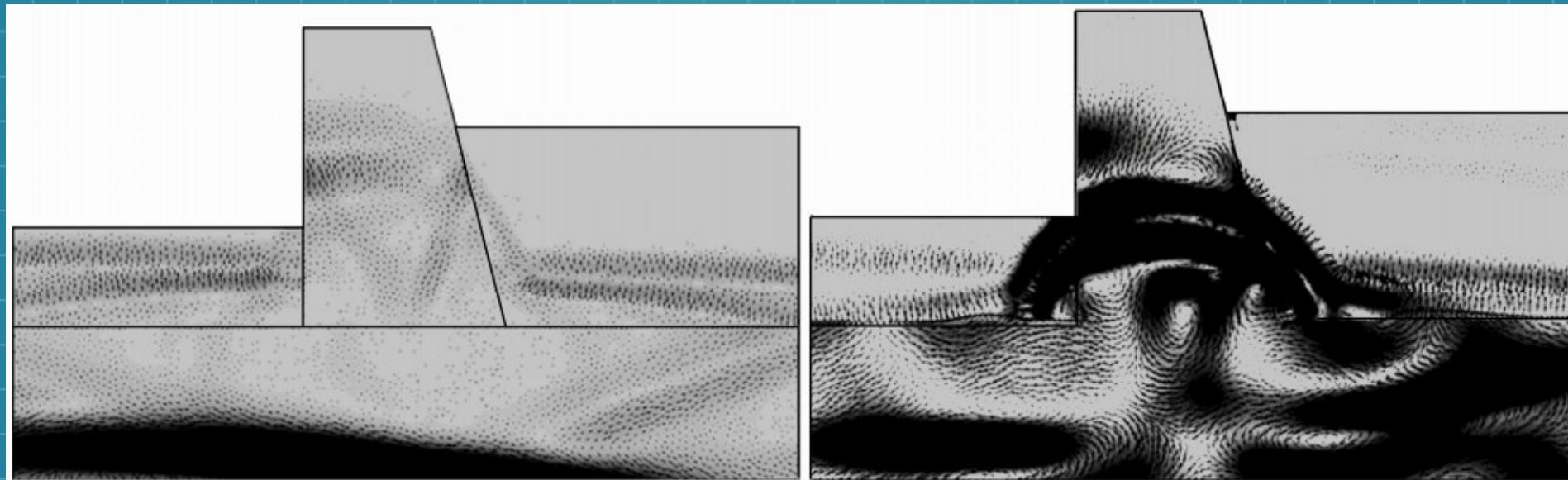
KES
IDT
2020

Seismic stability of the building

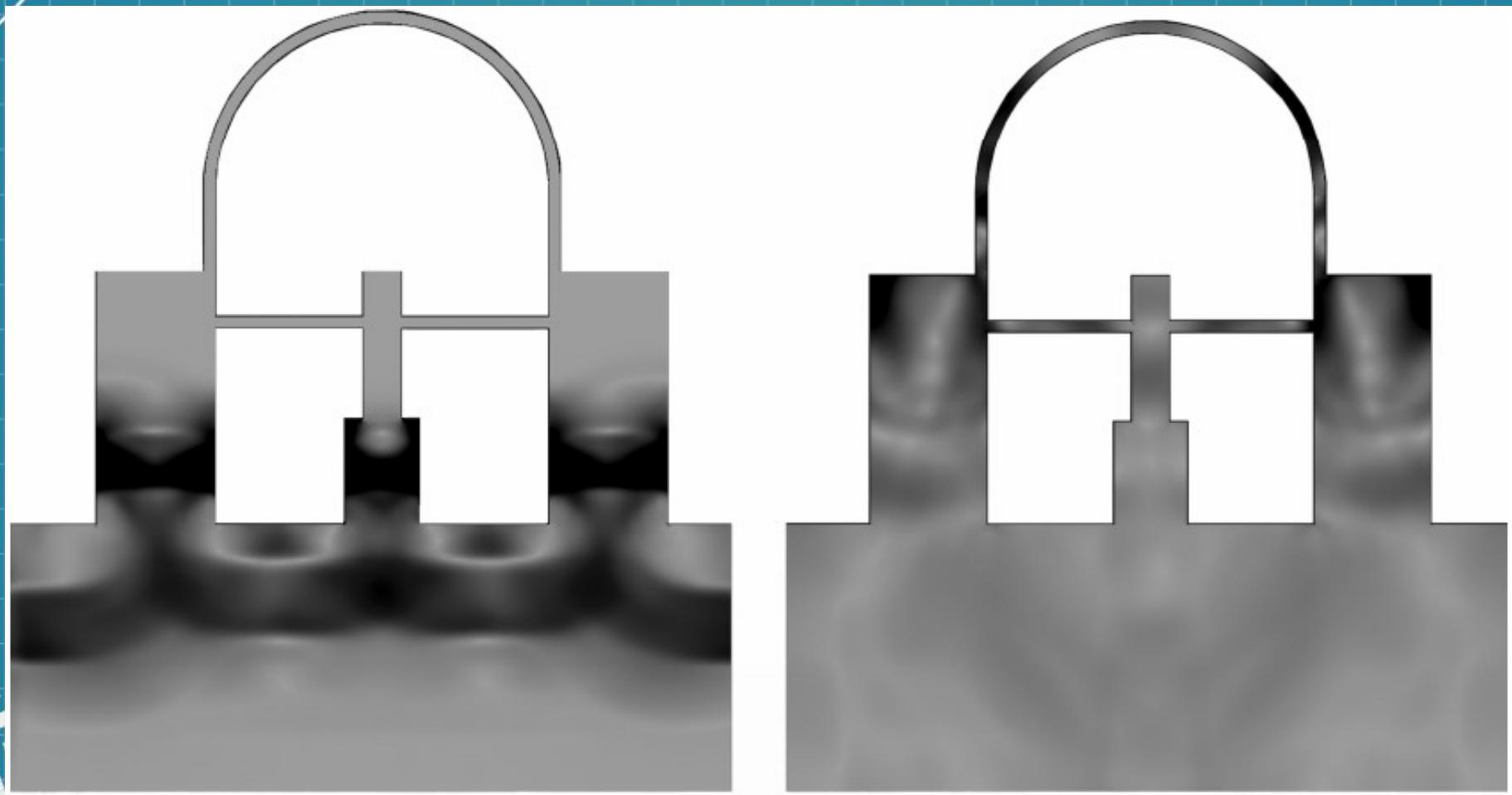


Absolute velocity (left) and destruction zones (right) in red

Динамические процессы в наземных сооружениях

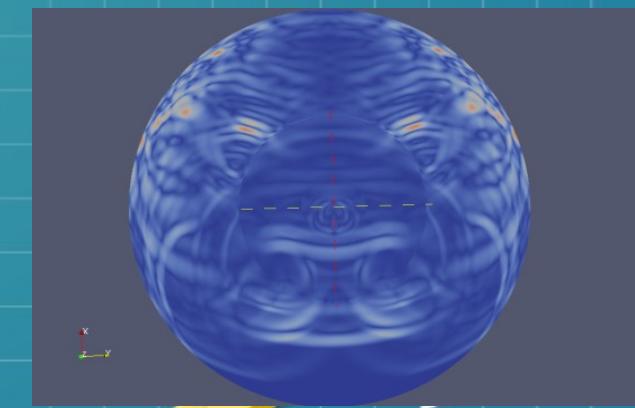
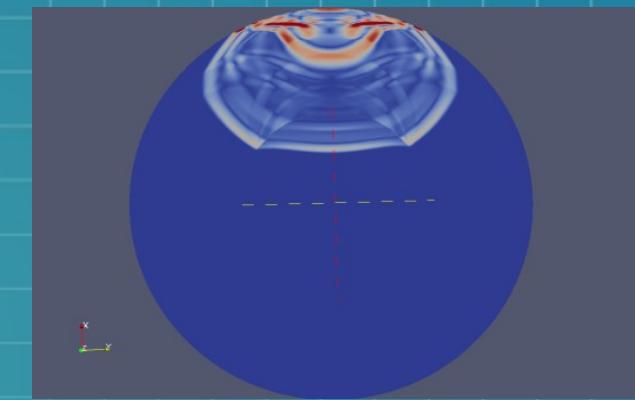


Динамические процессы в наземных сооружениях

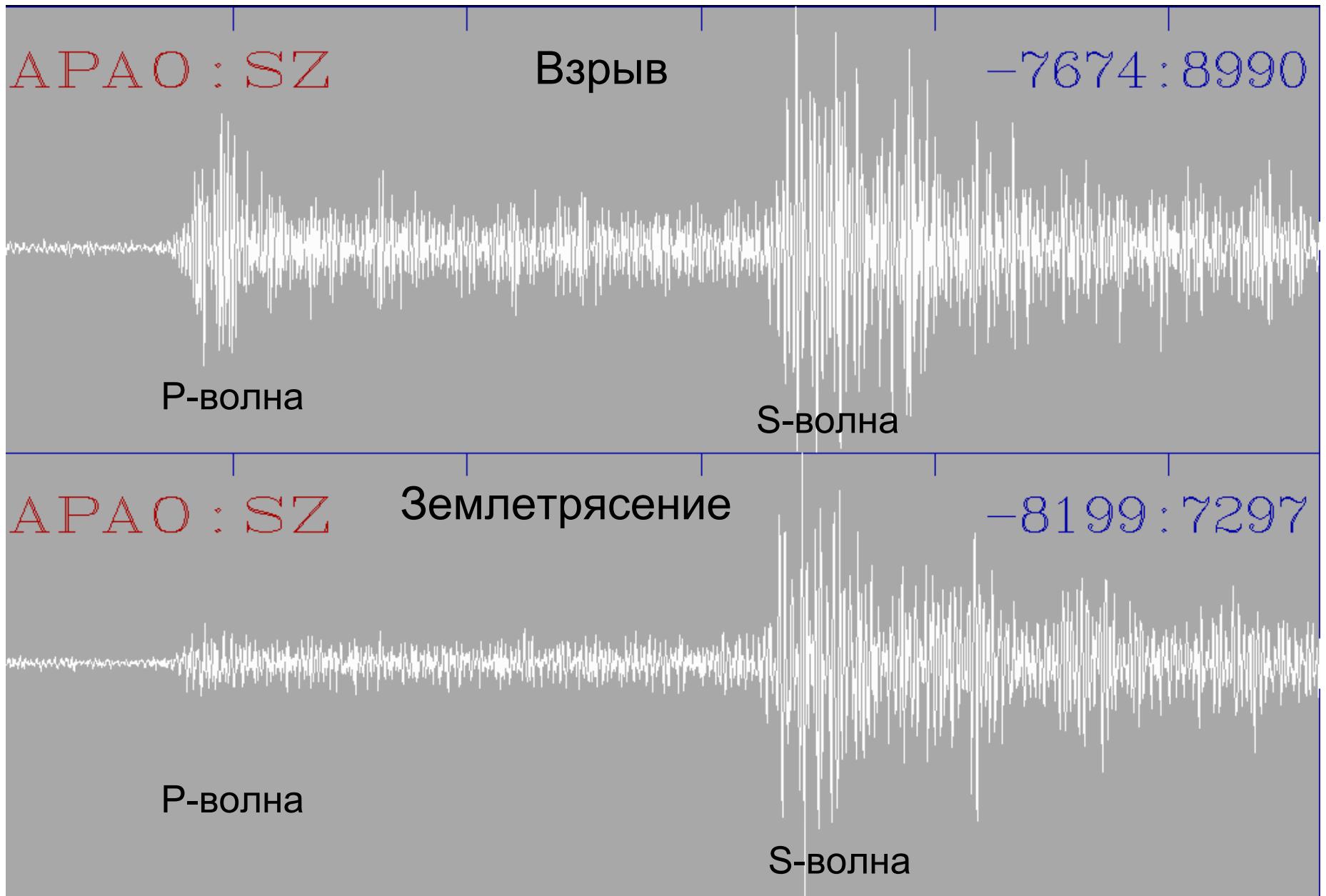


Сейсмические процессы в недрах планеты

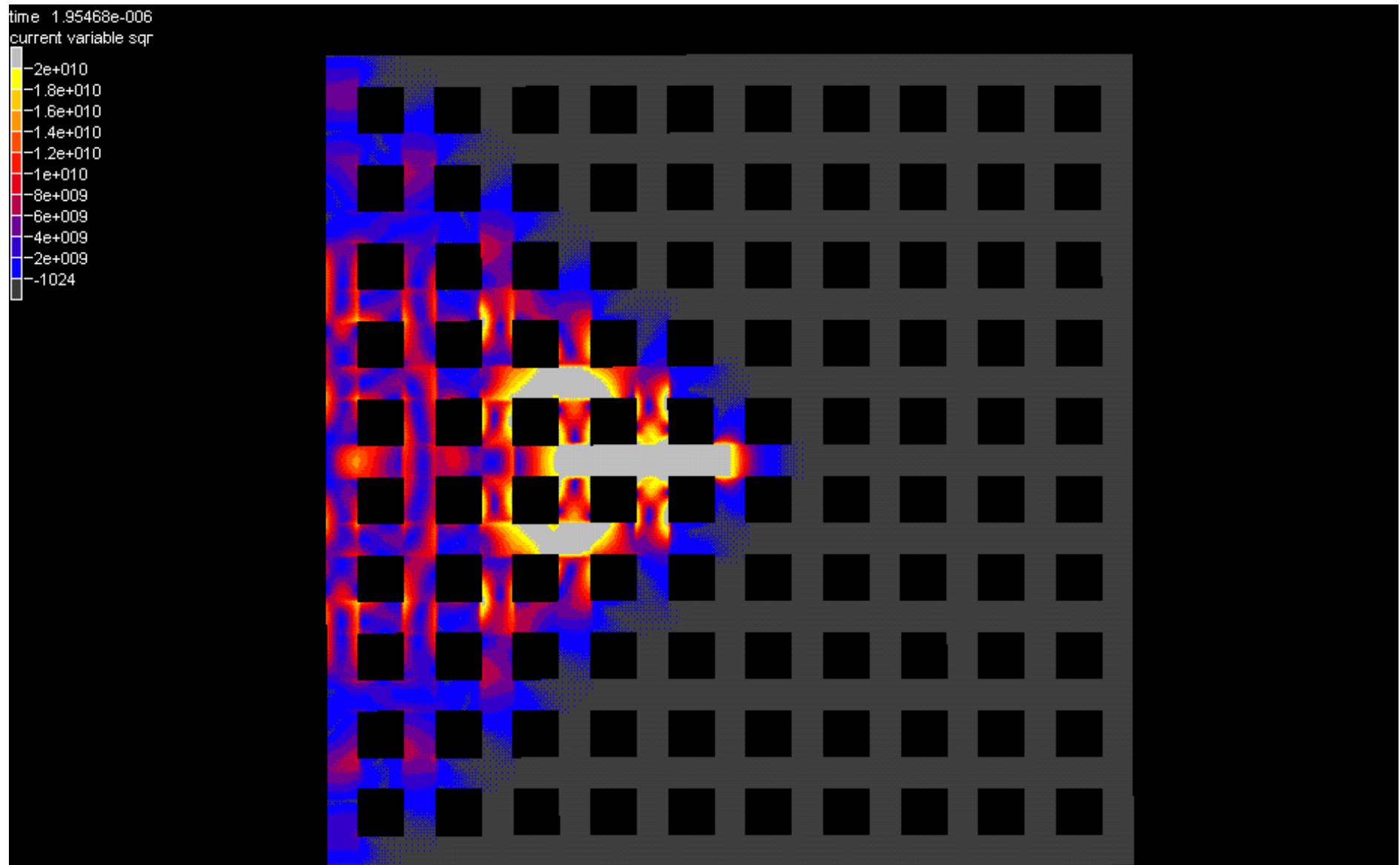
Слой	Внешний радиус	Внутренний радиус	Плотность среды	Продольная скорость	Поперечная скорость
1	6370	5870	4000	5000	3000
2	5870	5370	4000	10000	5100
3	5370	3000	5000	13000	6500
4	3000	1000	11000	9000	100
5	1000	0	12000	10200	3500



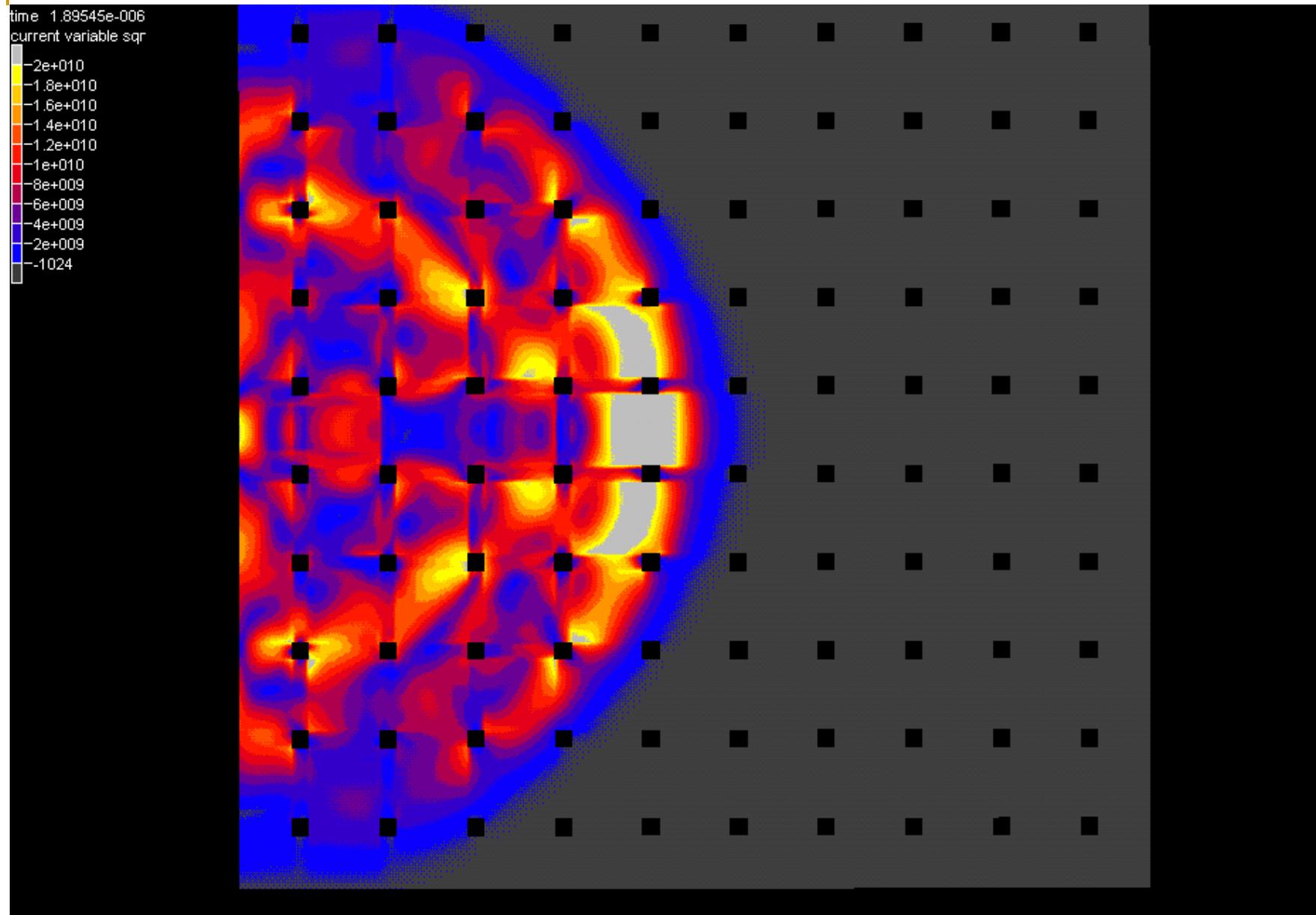
Сравнение реальных сейсмограмм взрыва и землетрясения



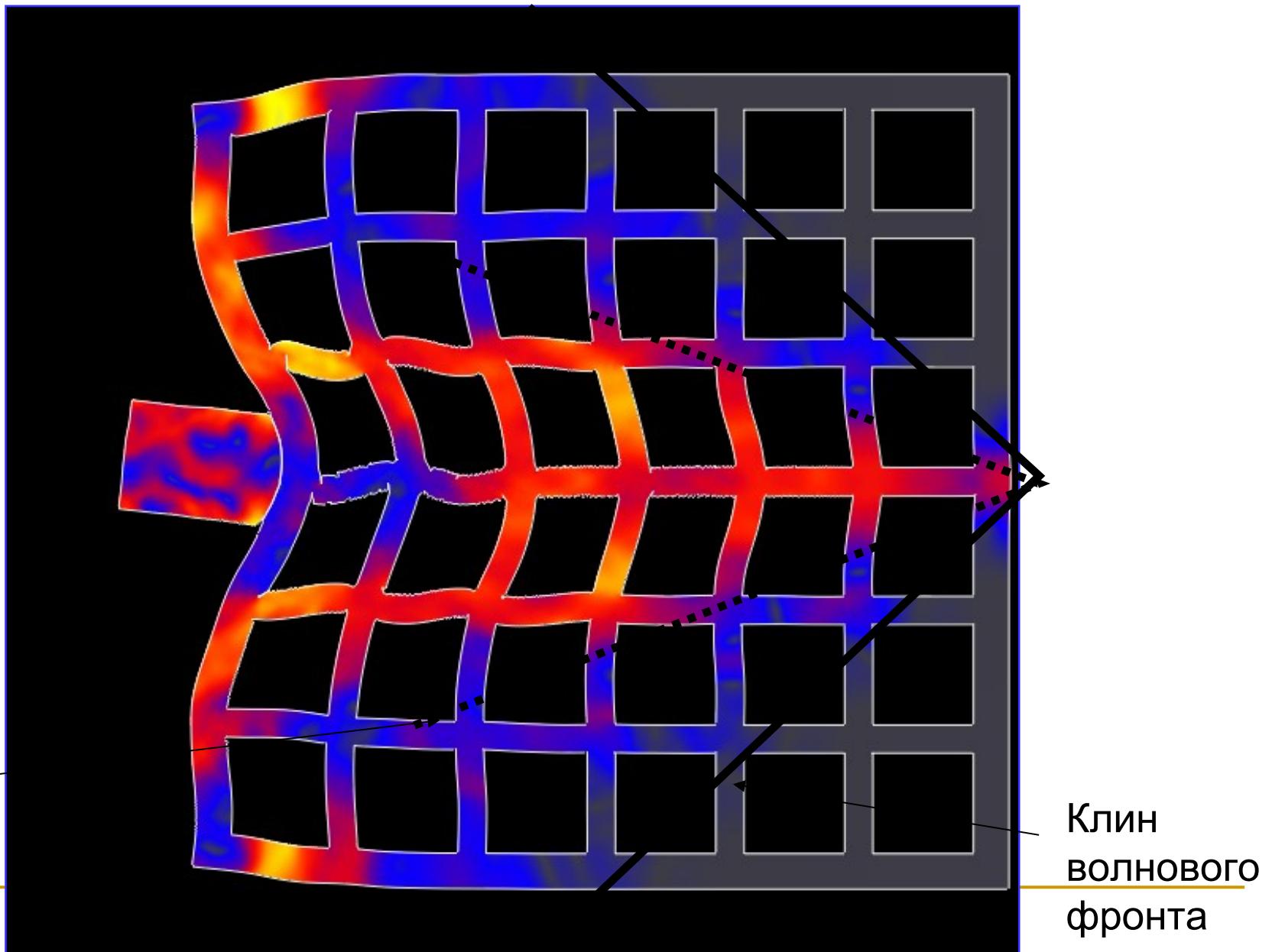
Взрыв в перфорированной конструкции



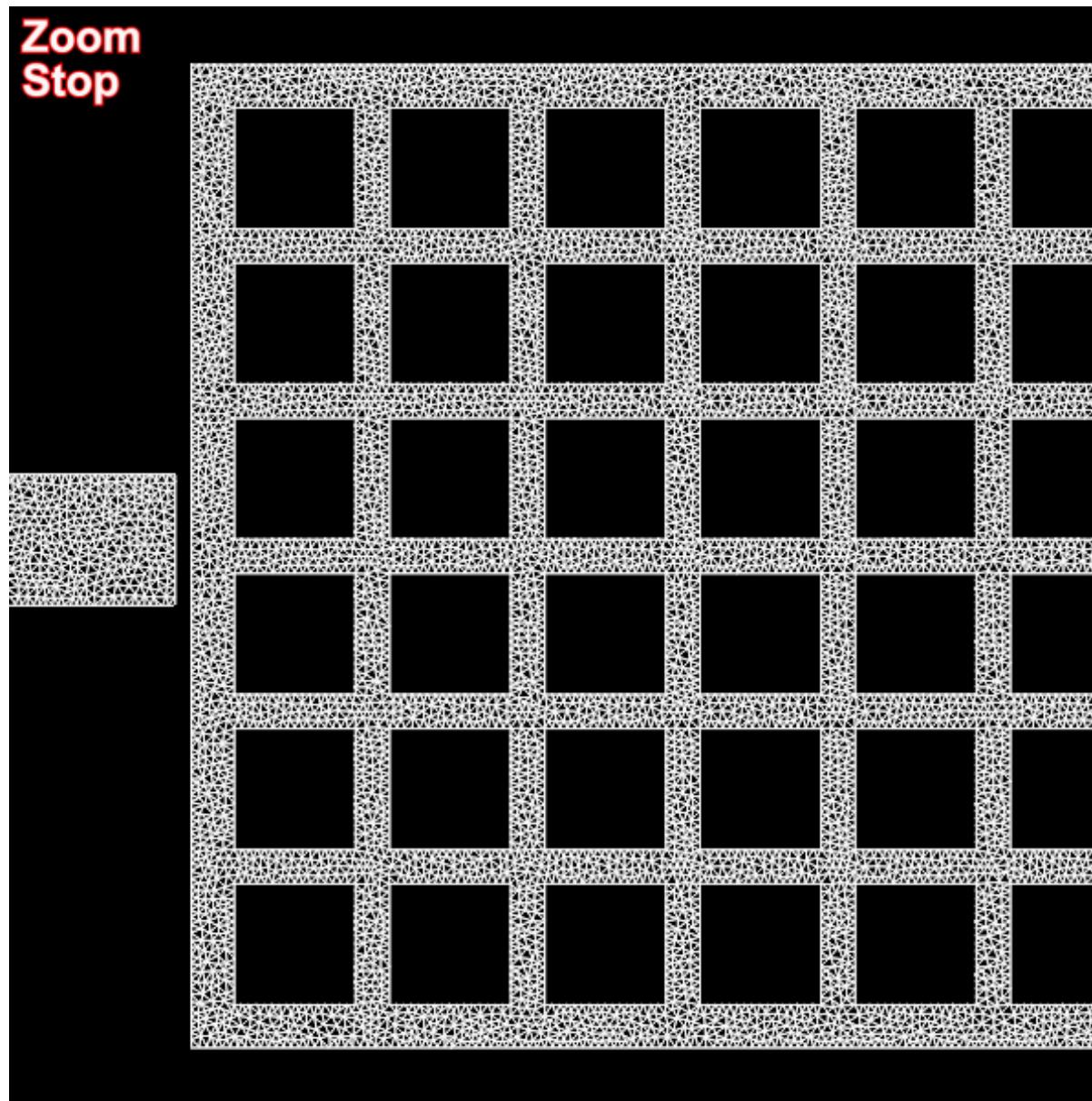
Взрыв в перфорированной конструкции



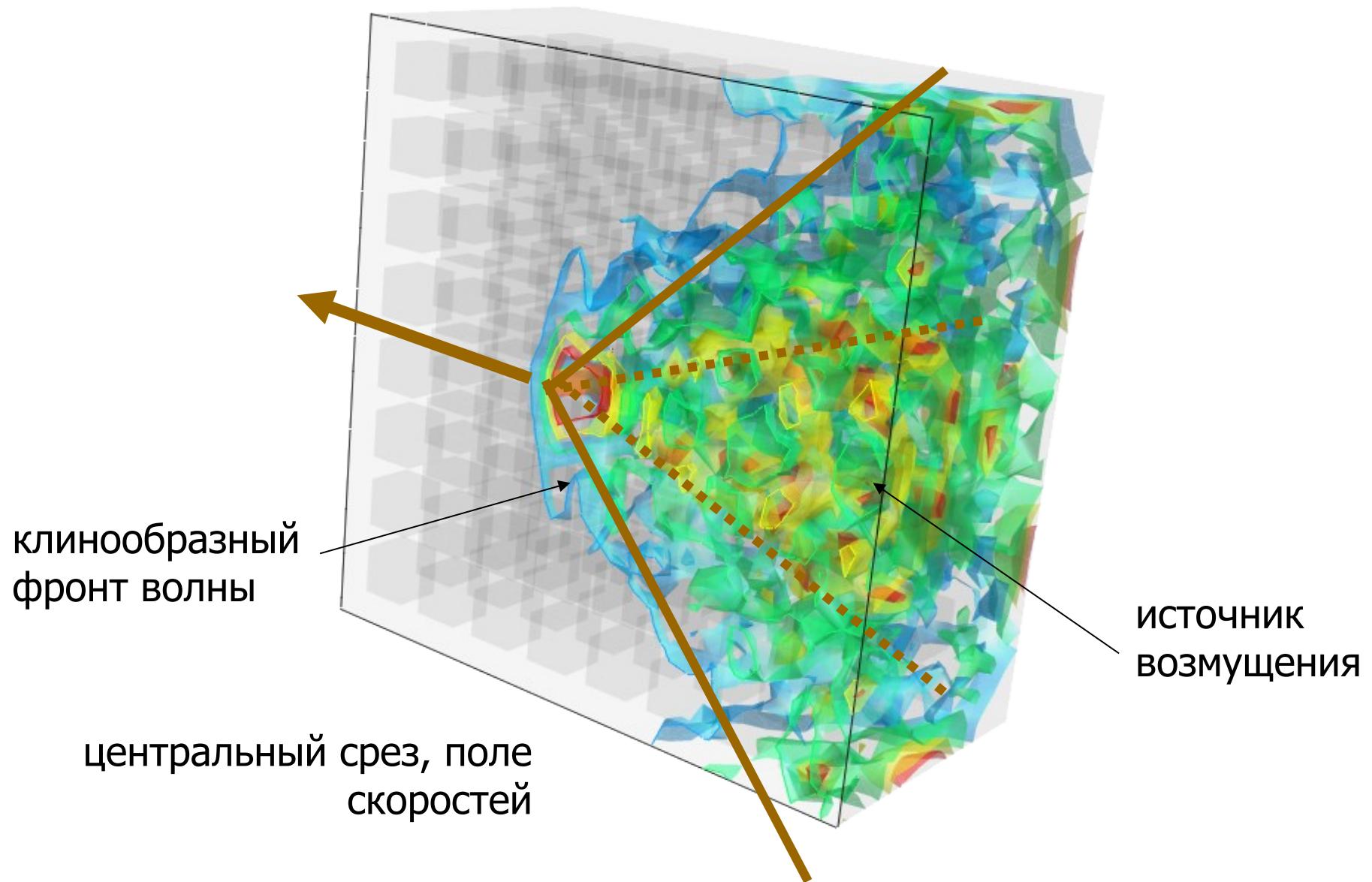
Задача о соударении с перфорированной конструкцией

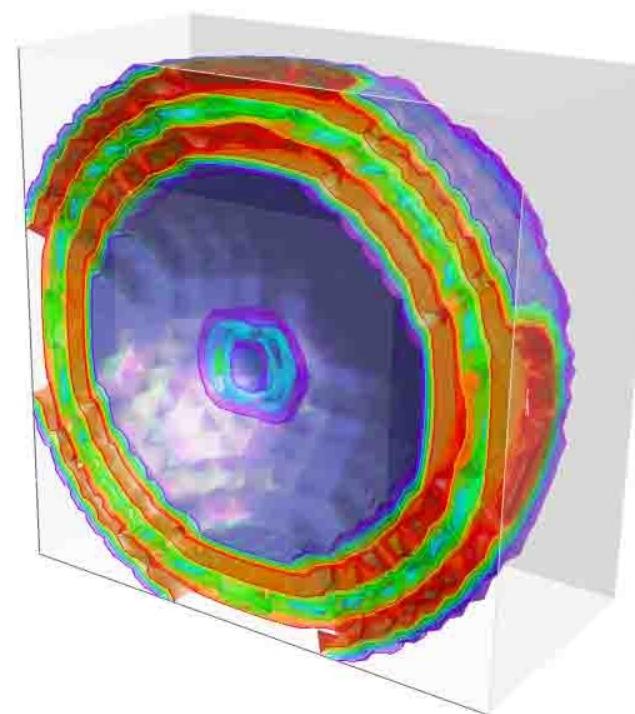
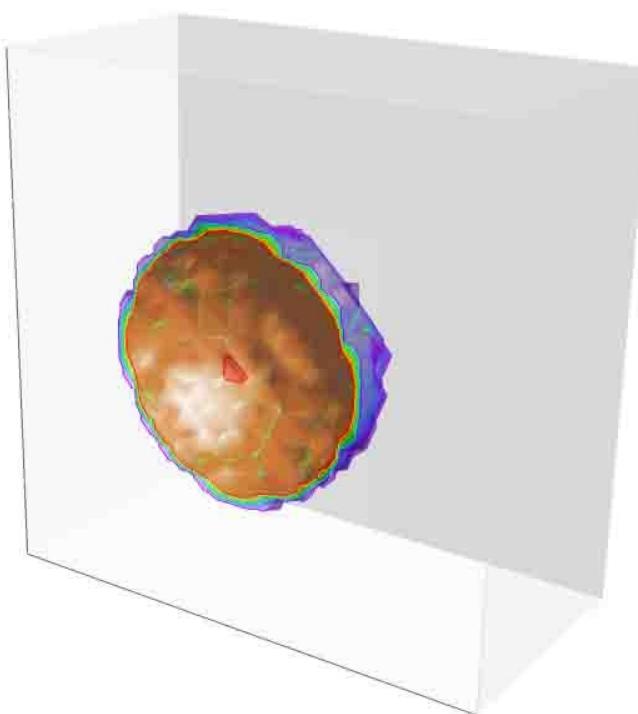


Столкновение с перфорированной структурой



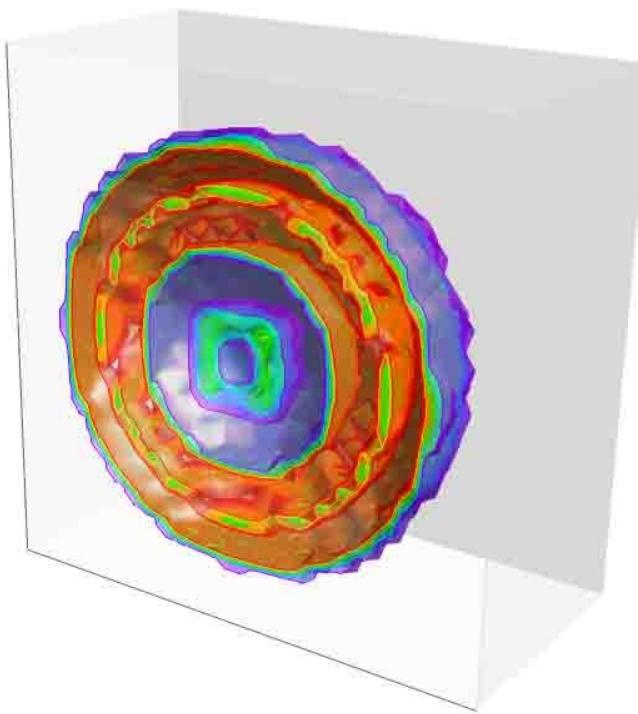
Перфорированная среда (3D)



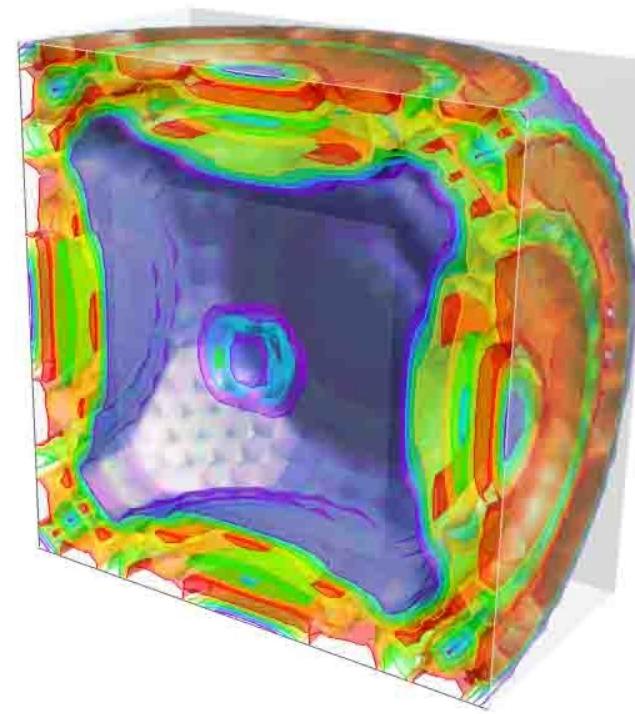


$t/t_{\max} = 0.15$

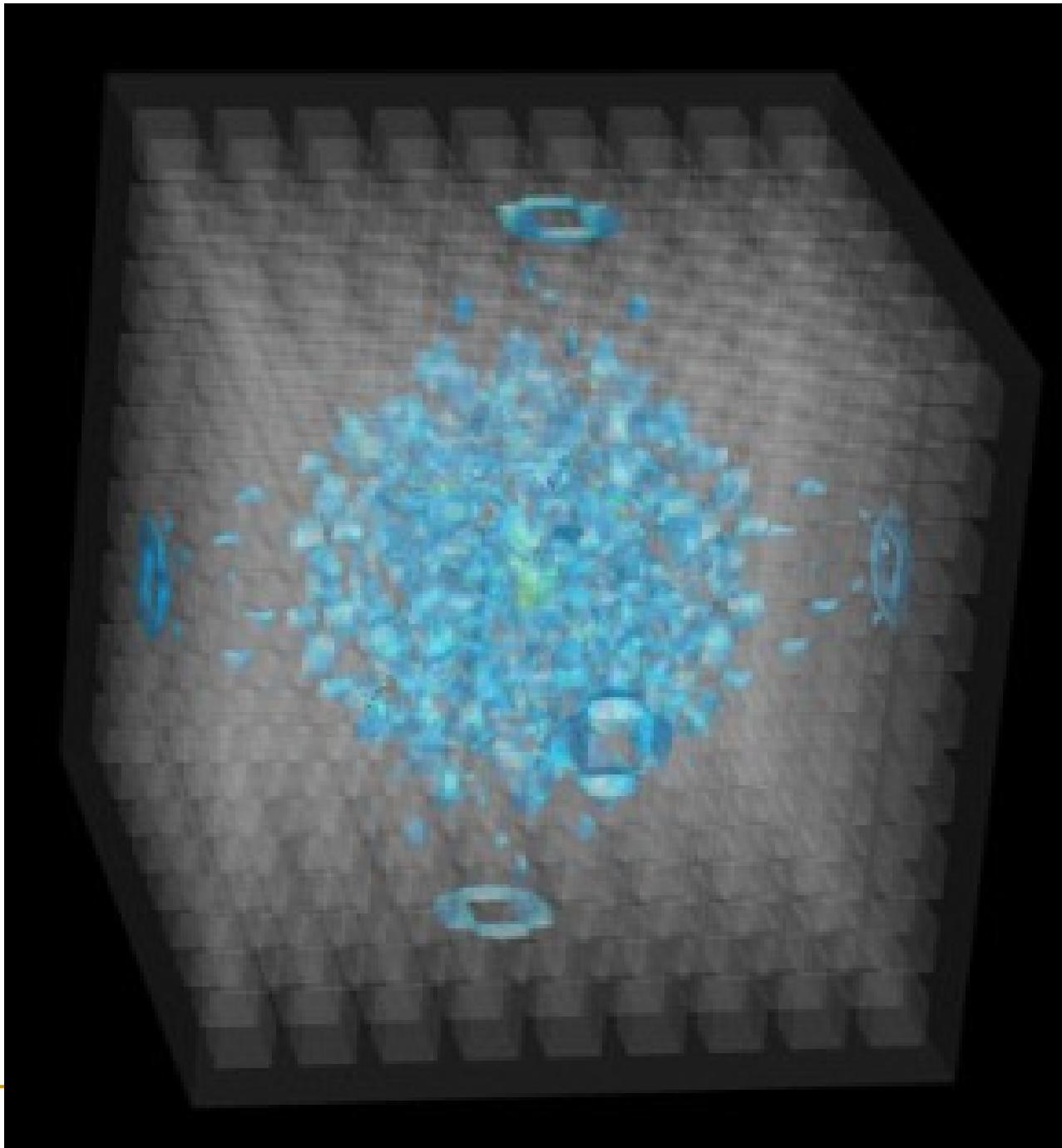
$t/t_{\max} = 0.45$



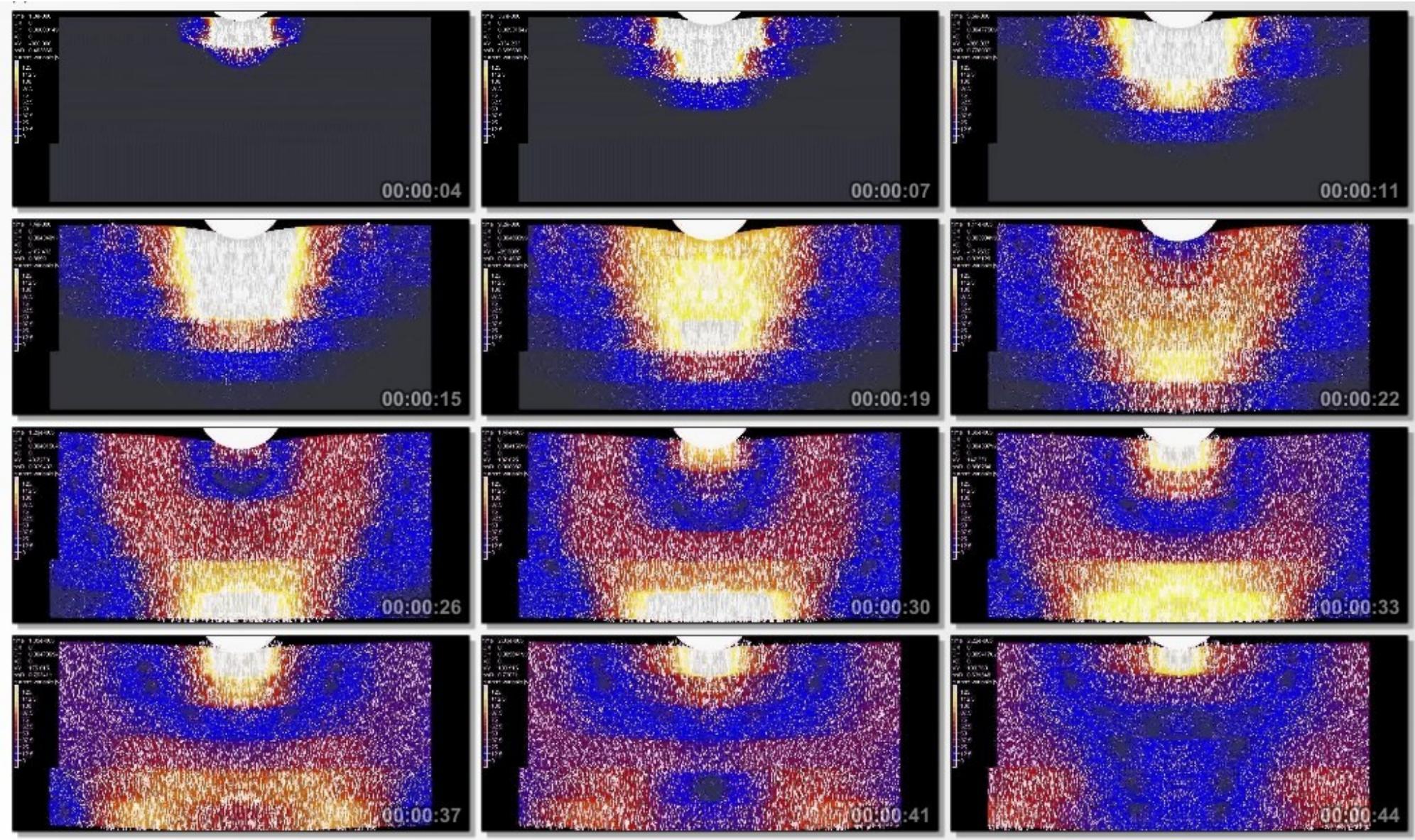
$t/t_{\max} = 0.30$



$t/t_{\max} = 0.60$



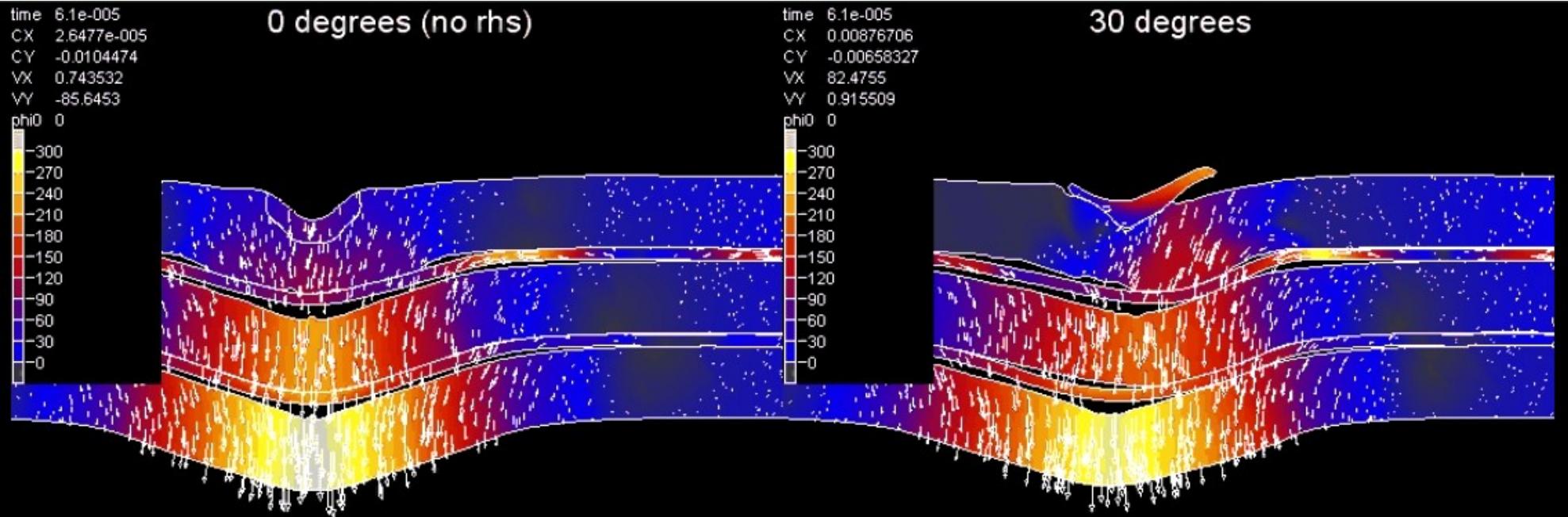
Multilayer glass



Многослойный композит: зависимость от угла соударения

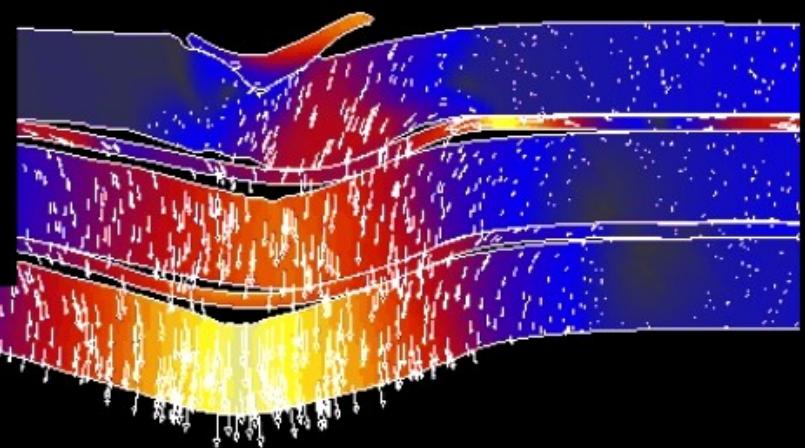
time 6.1e-005
CX 2.6477e-005
CY -0.0104474
VX 0.743532
VY -85.6453
phi0 0

0 degrees (no rhs)



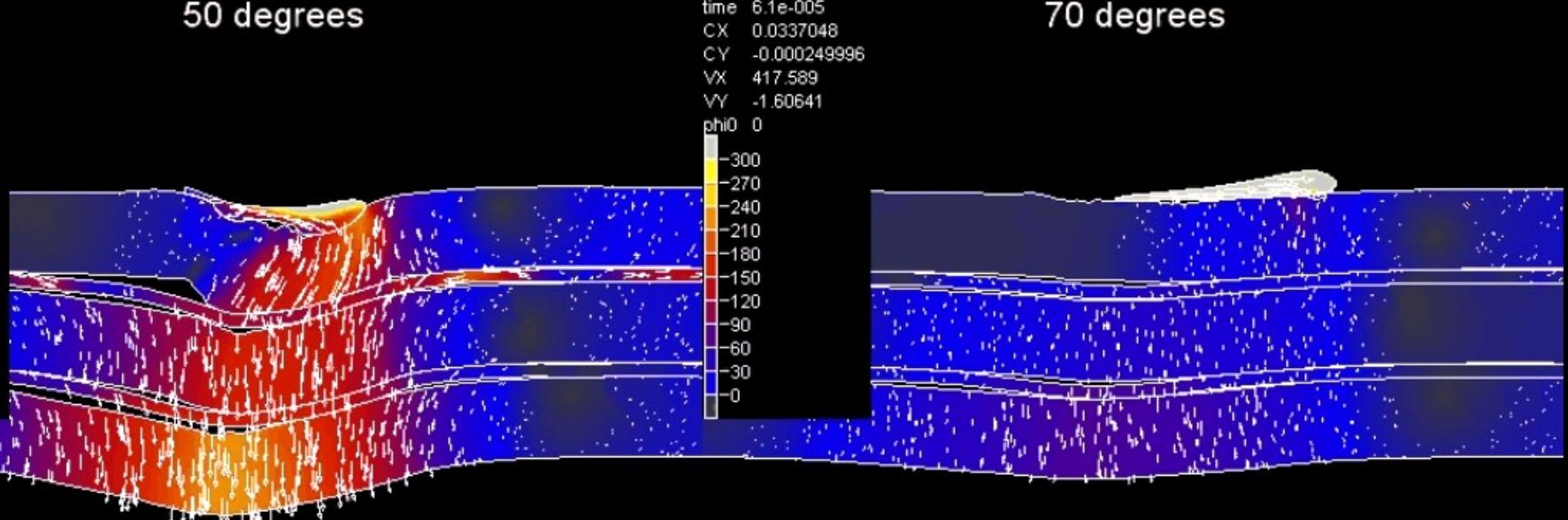
time 6.1e-005
CX 0.00876706
CY -0.00658327
VX 82.4755
VY 0.915509
phi0 0

30 degrees



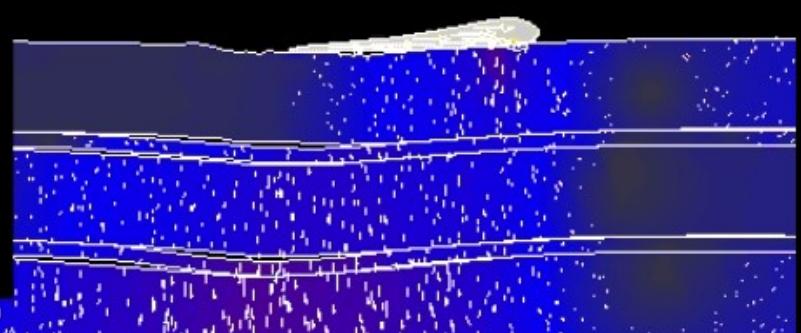
time 6.1e-005
CX 0.0150326
CY -0.00411879
VX 151.863
VY -10.2537
phi0 0

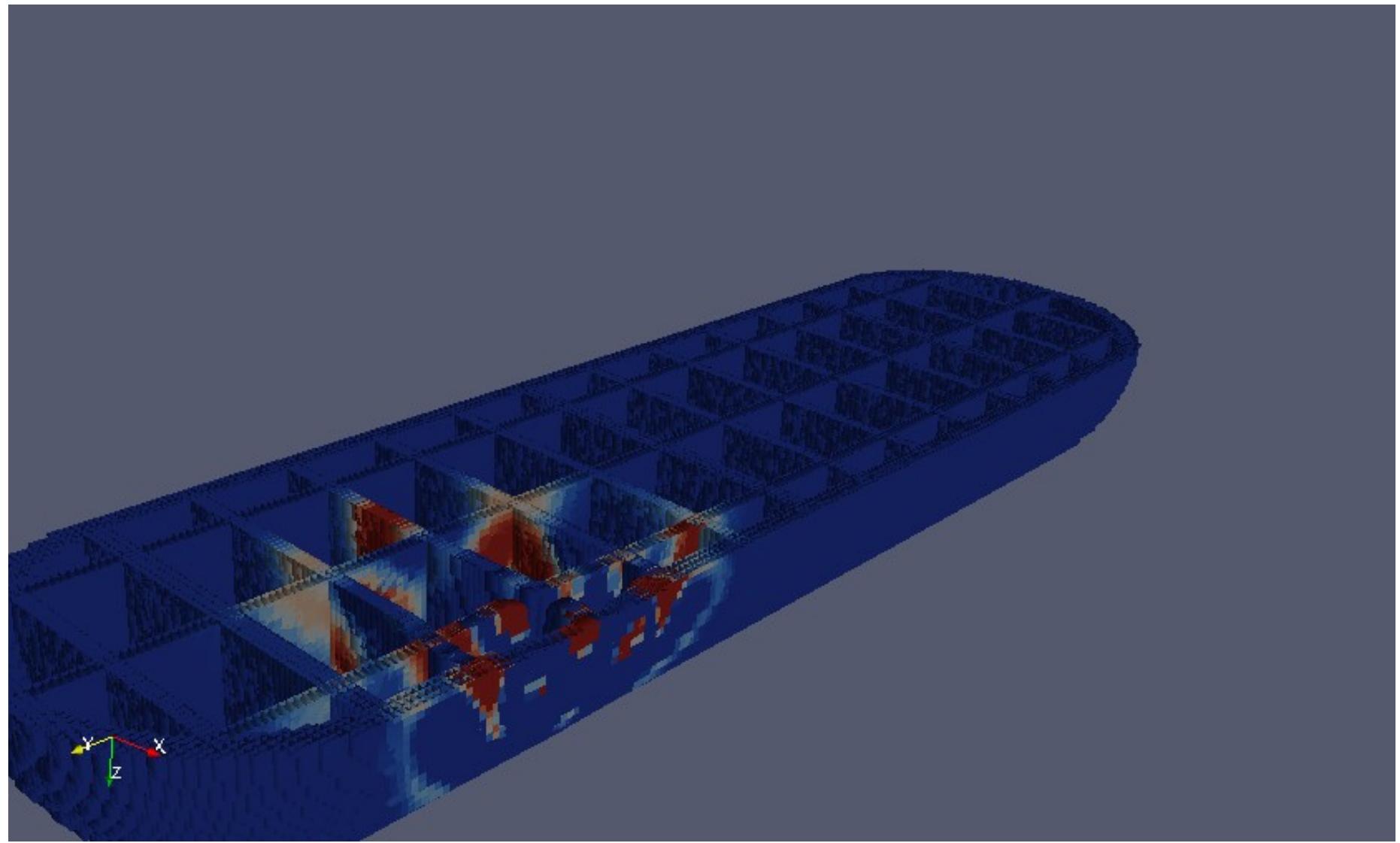
50 degrees



time 6.1e-005
CX 0.0337048
CY -0.000249996
VX 417.589
VY -1.60641
phi0 0

70 degrees





Моделирование структуры (матрицы и волокон

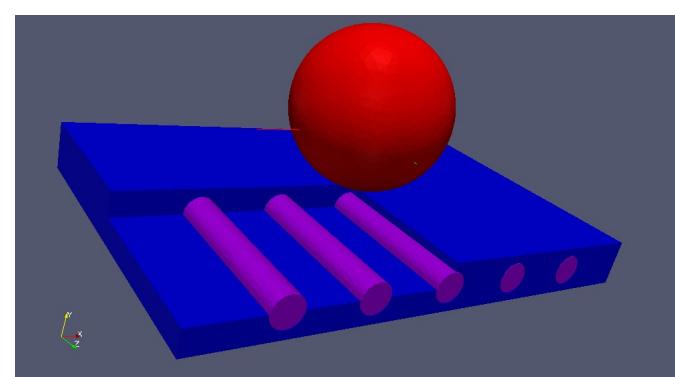
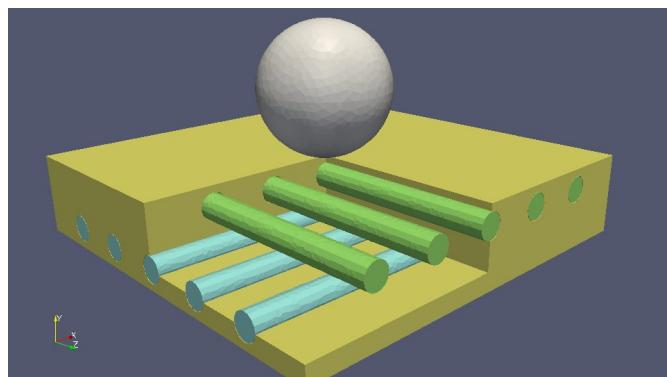
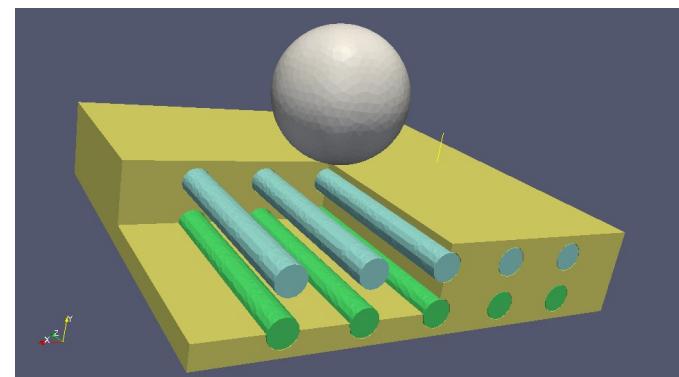
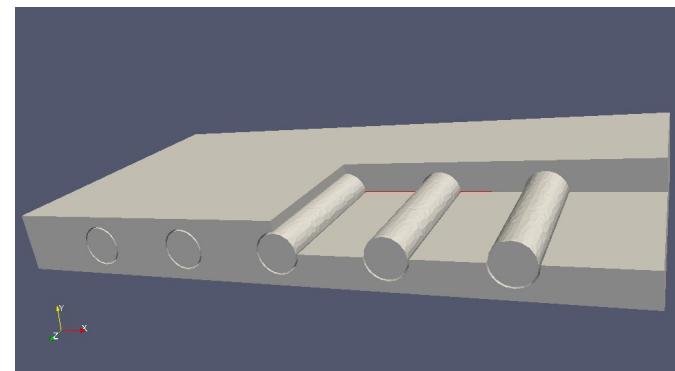
- Начальные условия — напряжения отсутствуют, конструкция покойится.
- Границные условия — свободная граница.
- Контактные условия — трение между ударником и конструкцией, $k=0.1$.
- Внутренние границы — полное слипание с возможностью разрушения.
- Энергия удара — 1.25, 12.5 и 125 Дж.

Один слой волокон:

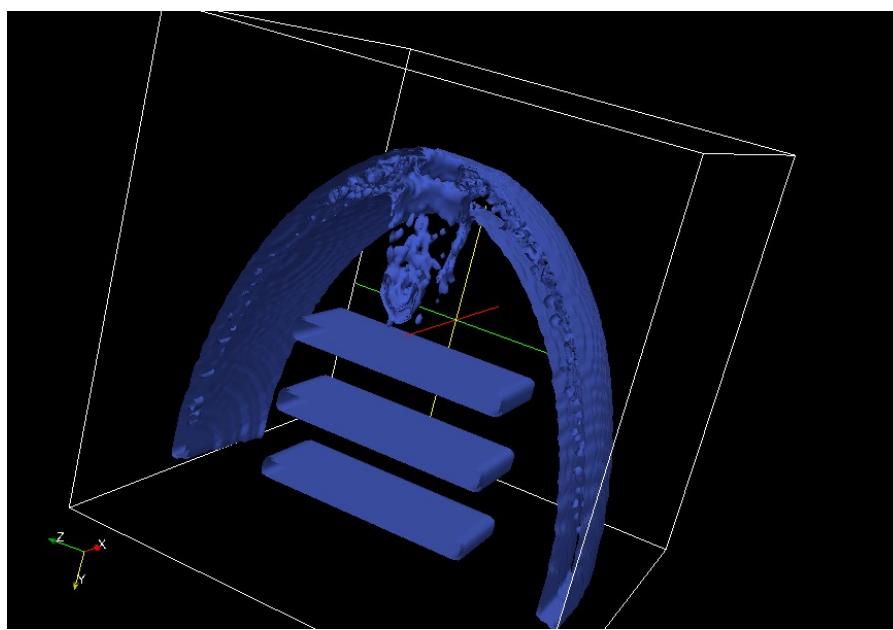
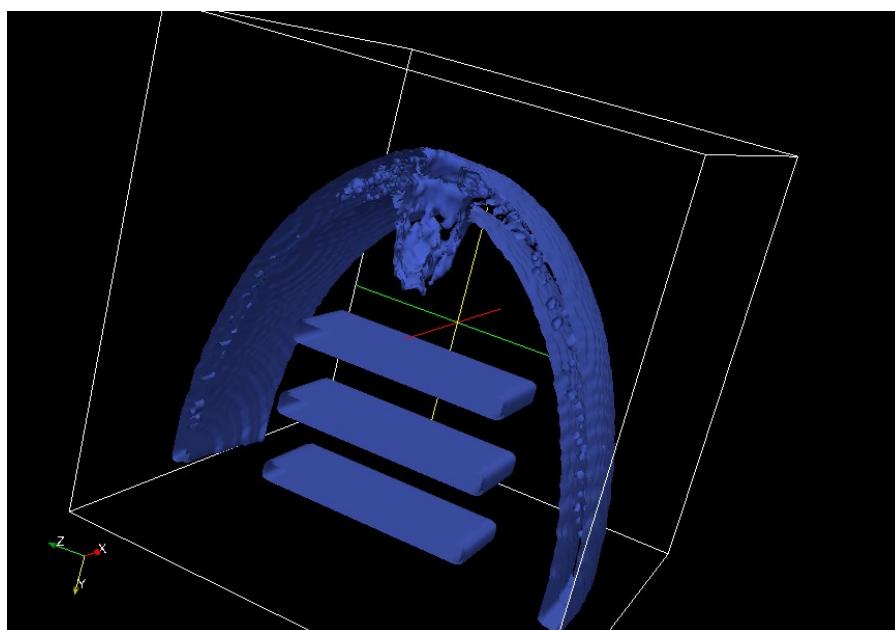
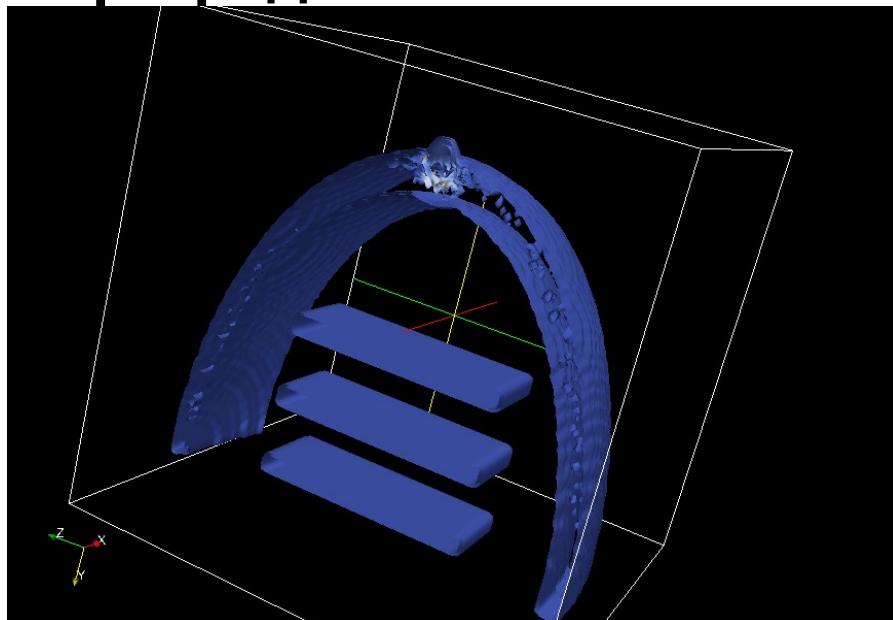
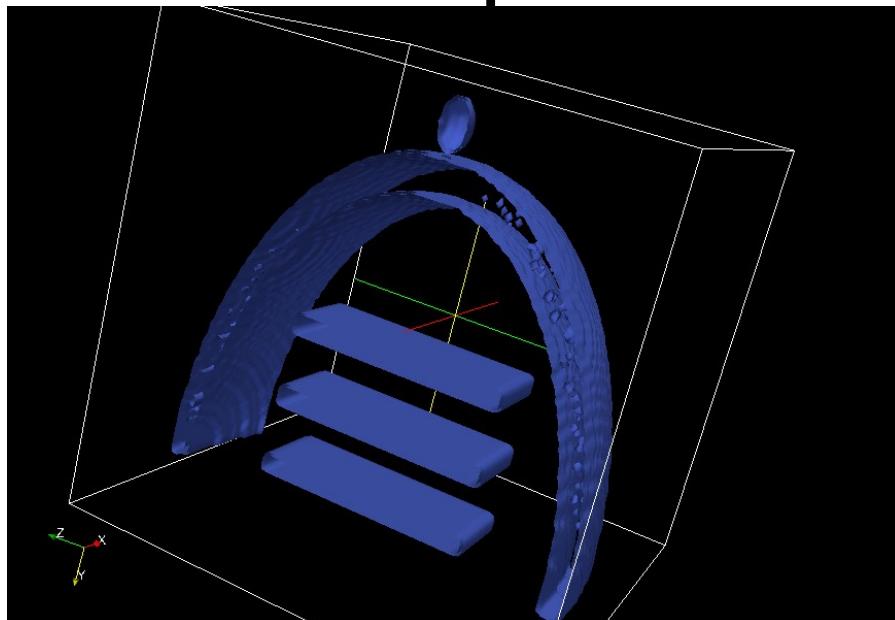
- a. реальные параметры материала;
- b. однородный материал.

Два слоя волокон:

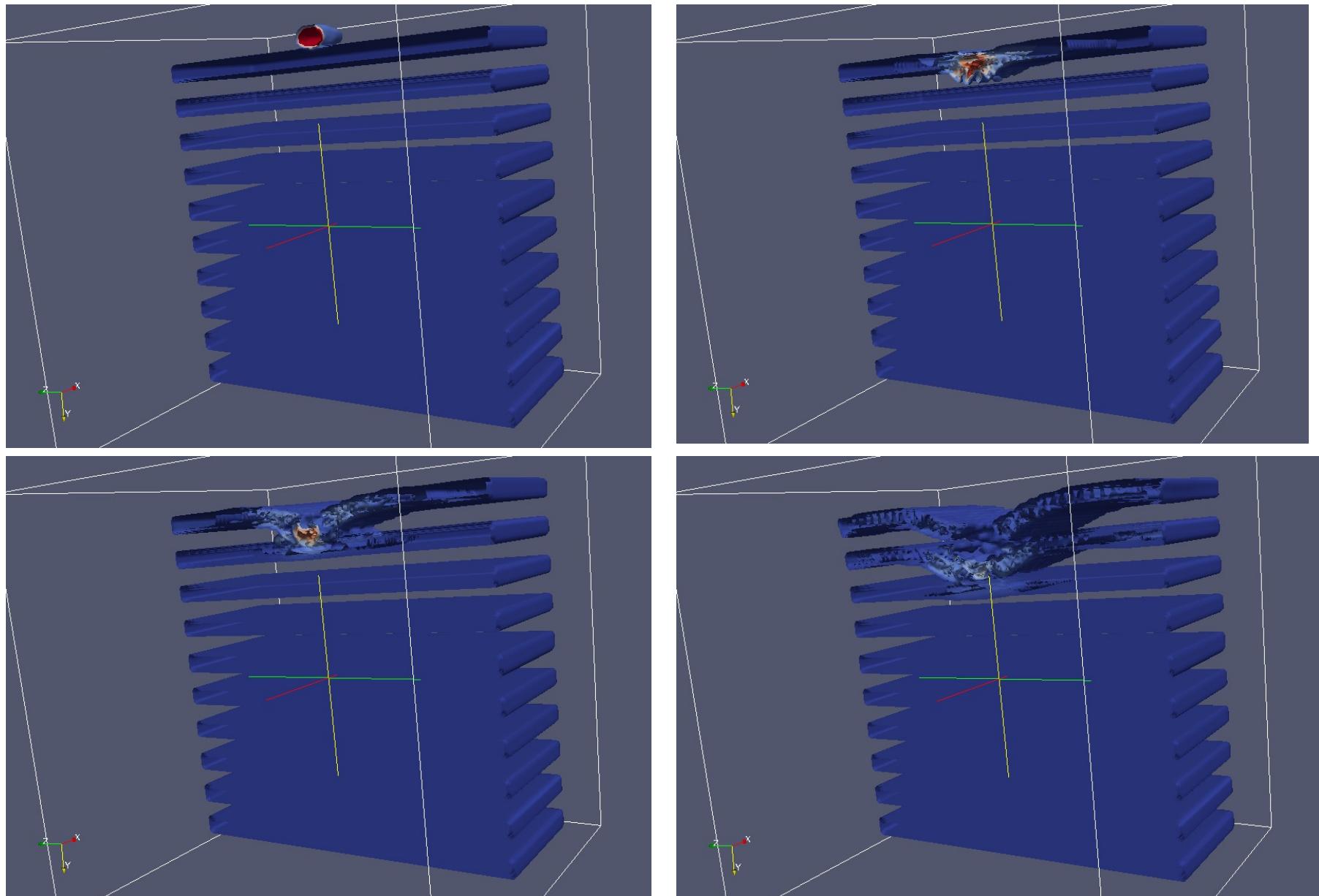
- a. параллельные слои;
- b. скрещенные слои.



Результаты численного эксперимента: соударение микрометеорита с двухслойной полусферической оболочкой и разнесенными препятствиями

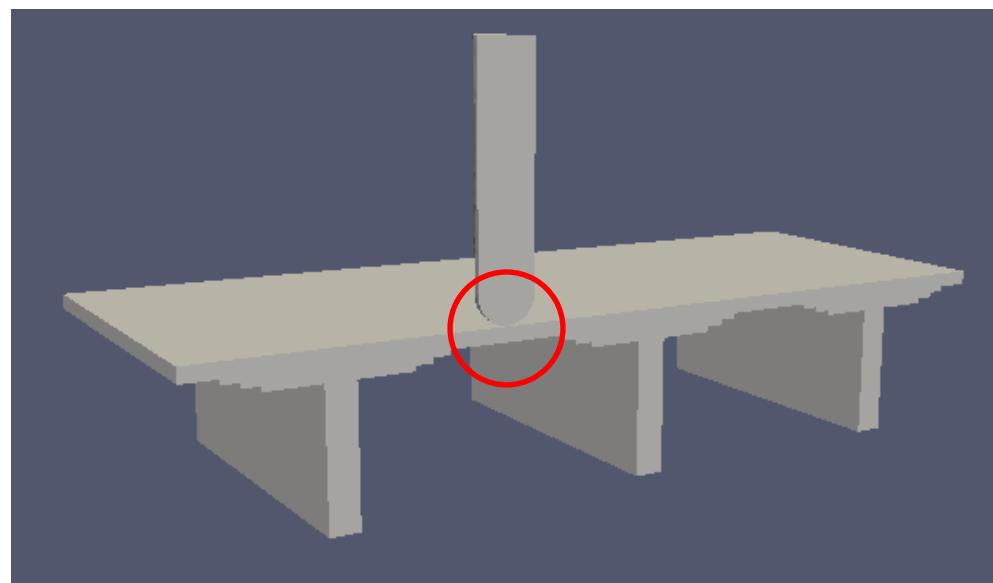
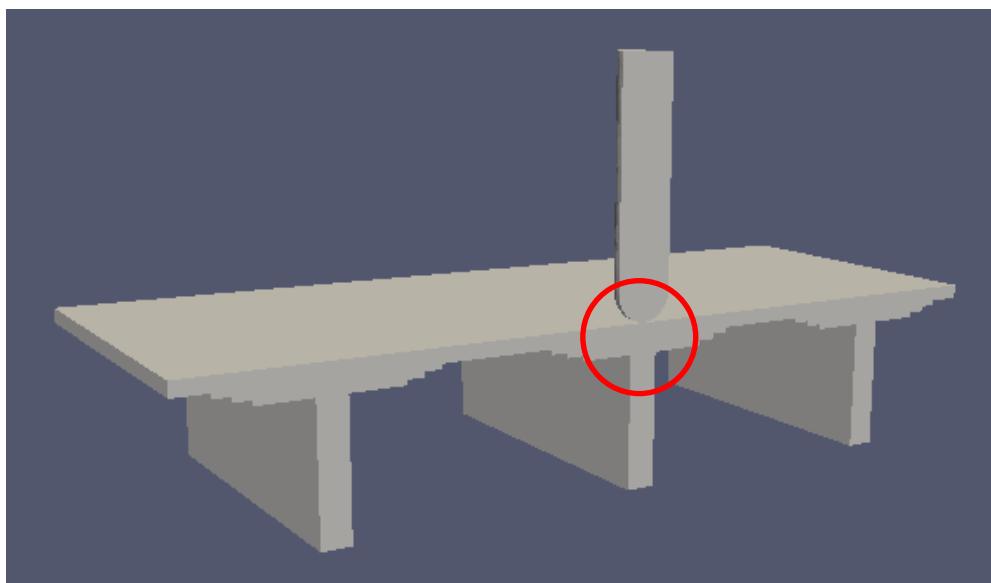
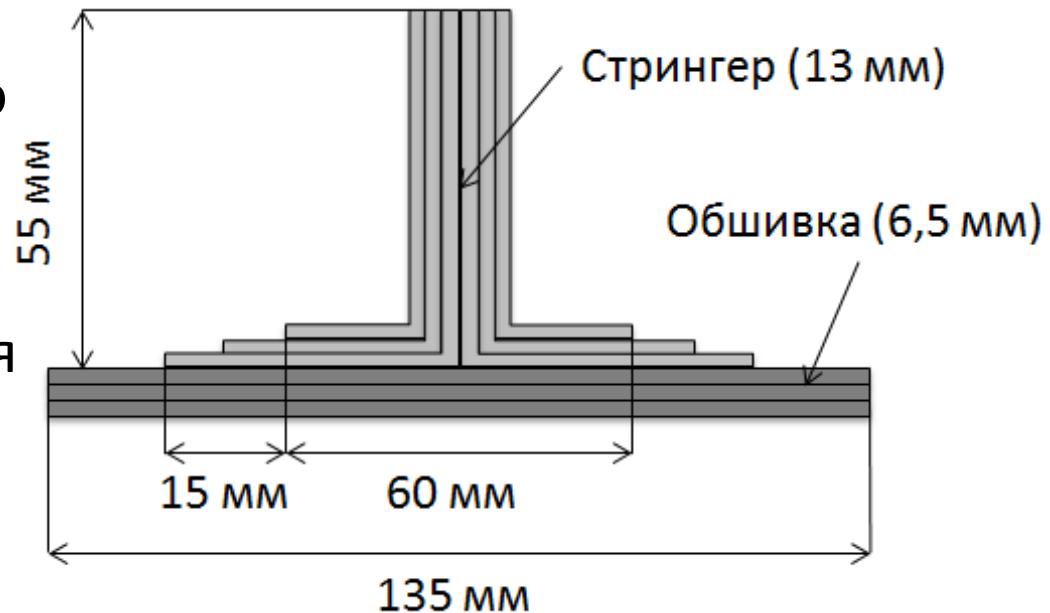


Результаты численного эксперимента: соударение микрометеорита с 10 разнесенными препятствиями

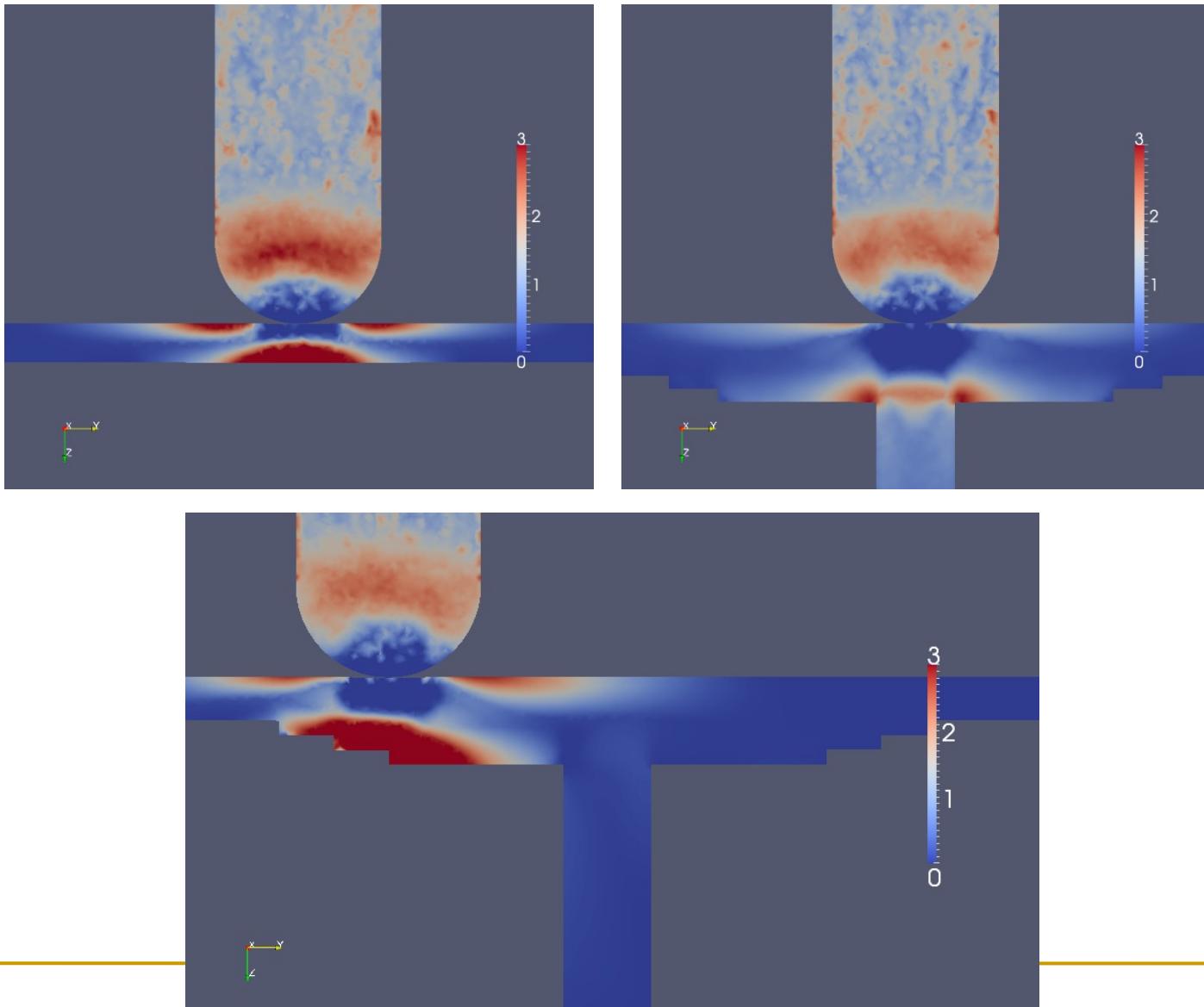


Низкоскоростной удар по композитной трёхстрингерной панели

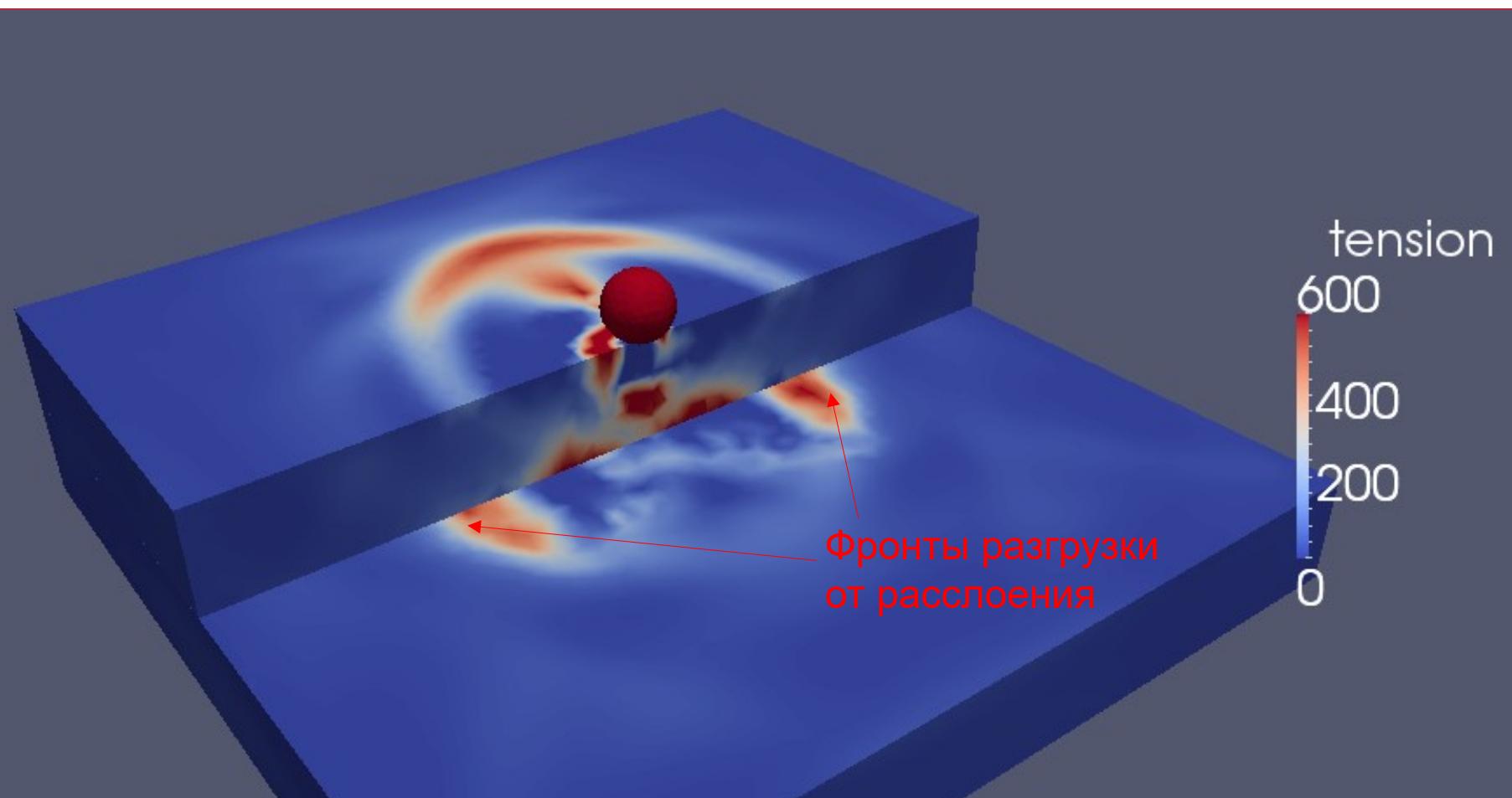
- ~4 000 000 узлов на конструкцию
- Точка соударения: стрингер, обшивка между стрингерами
- Различные критерии разрушения



Соударение со стрингером

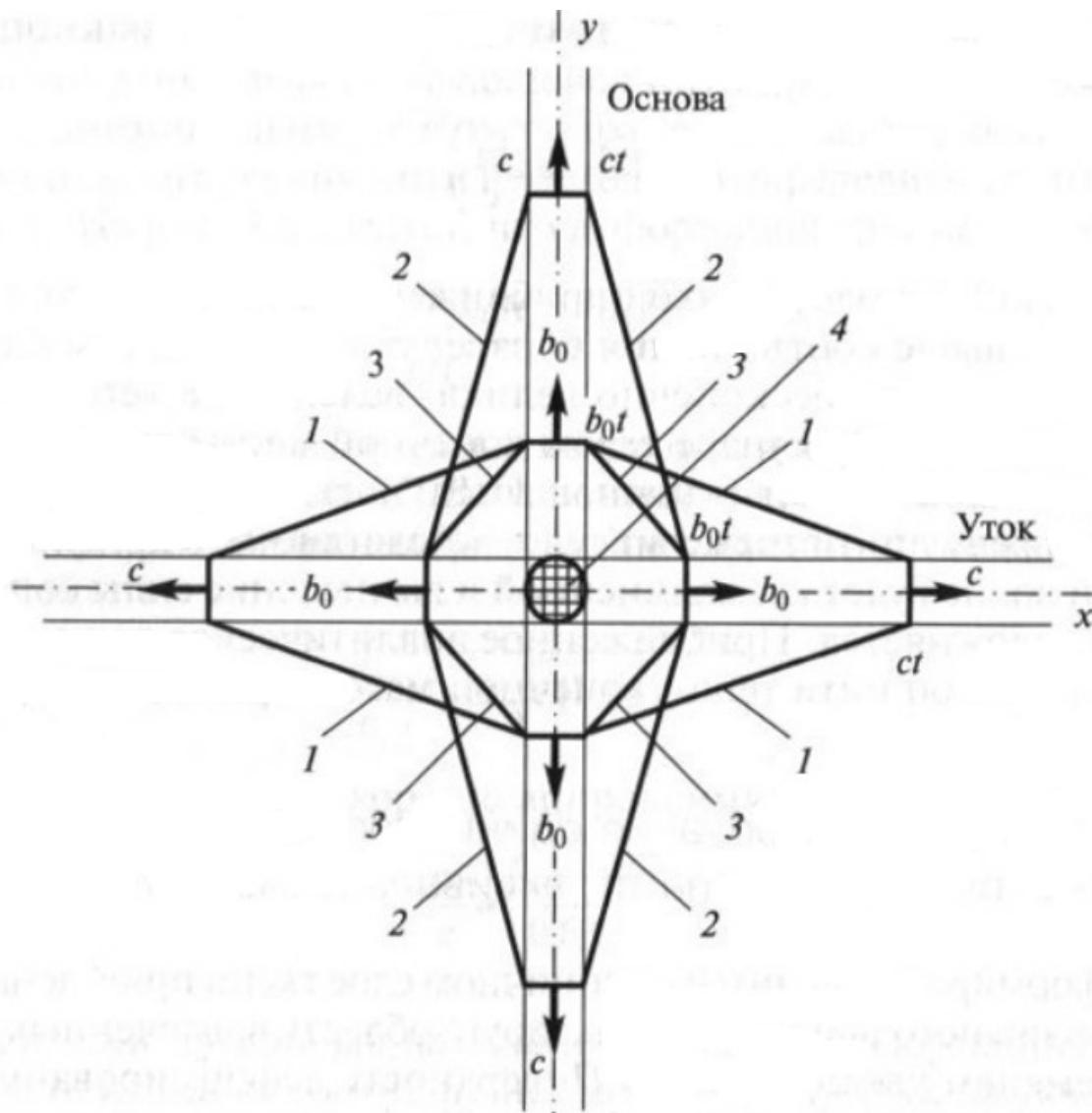


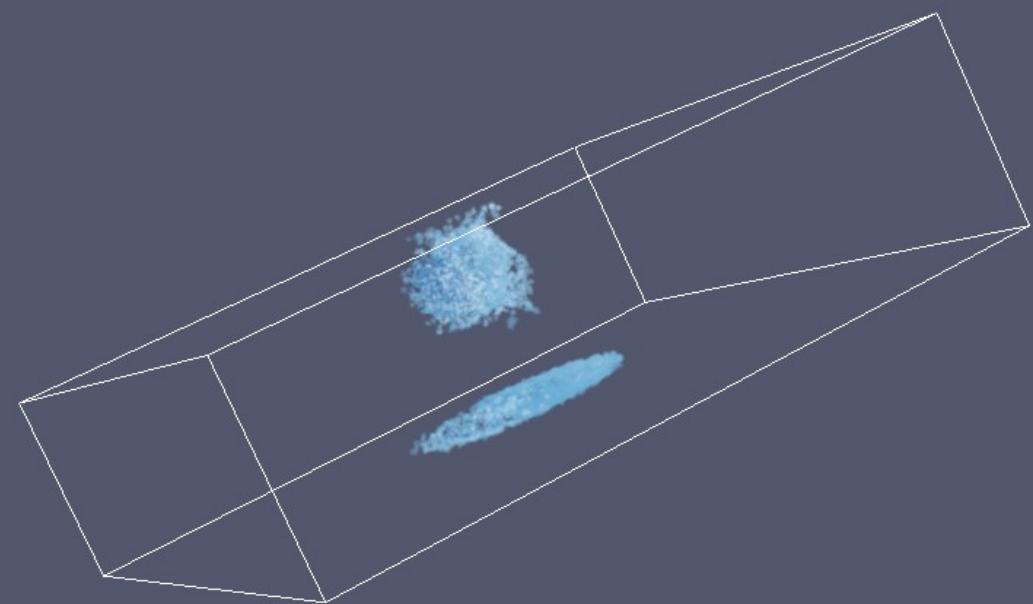
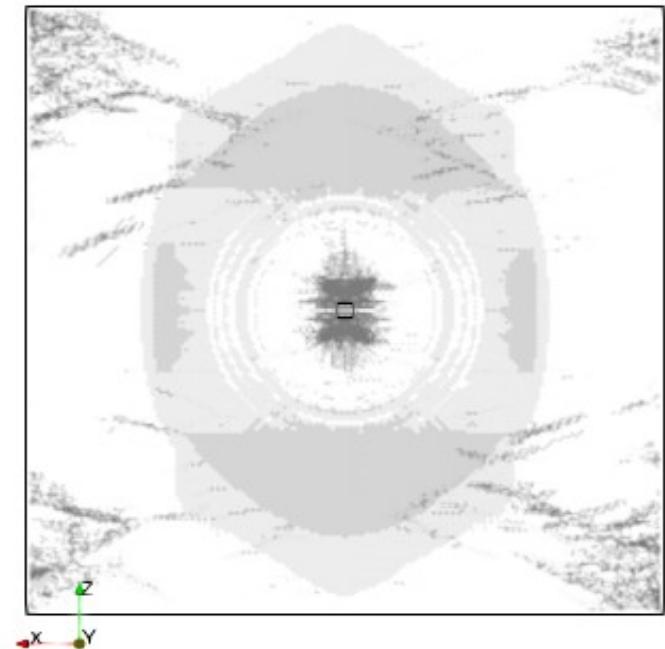
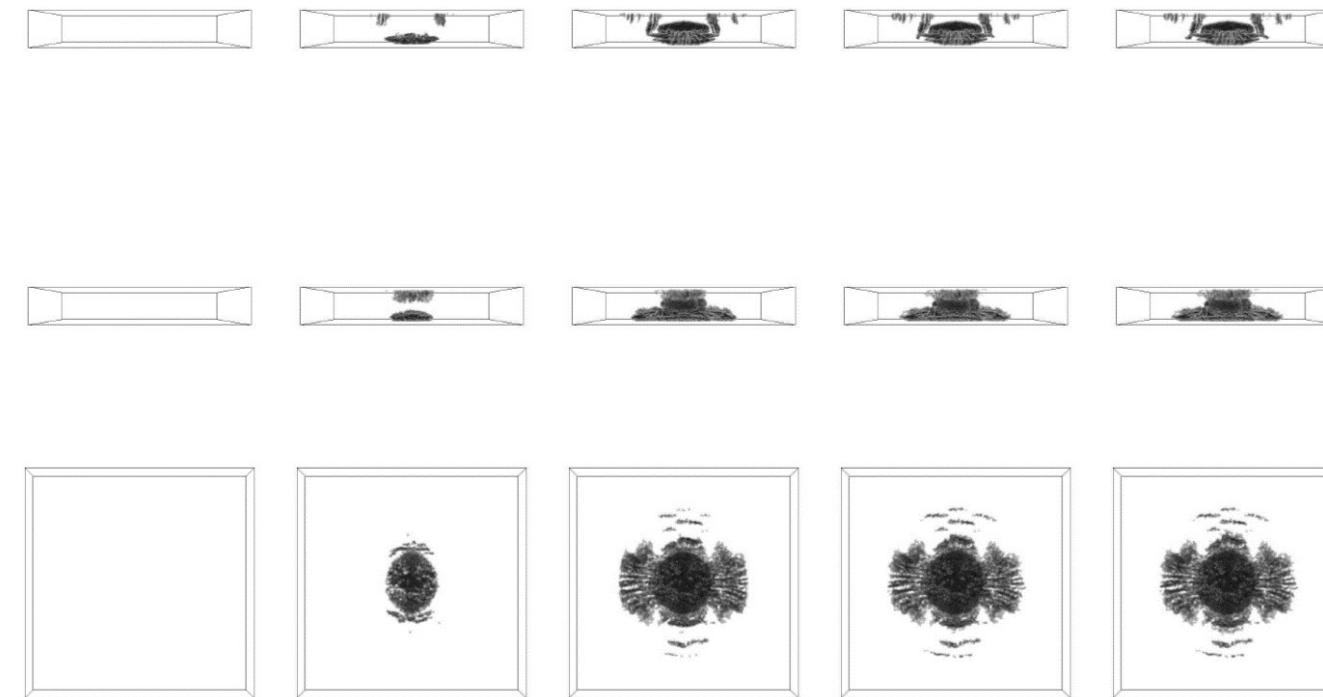
Моделирование формирования расслоения



Формирование центрального отверстия

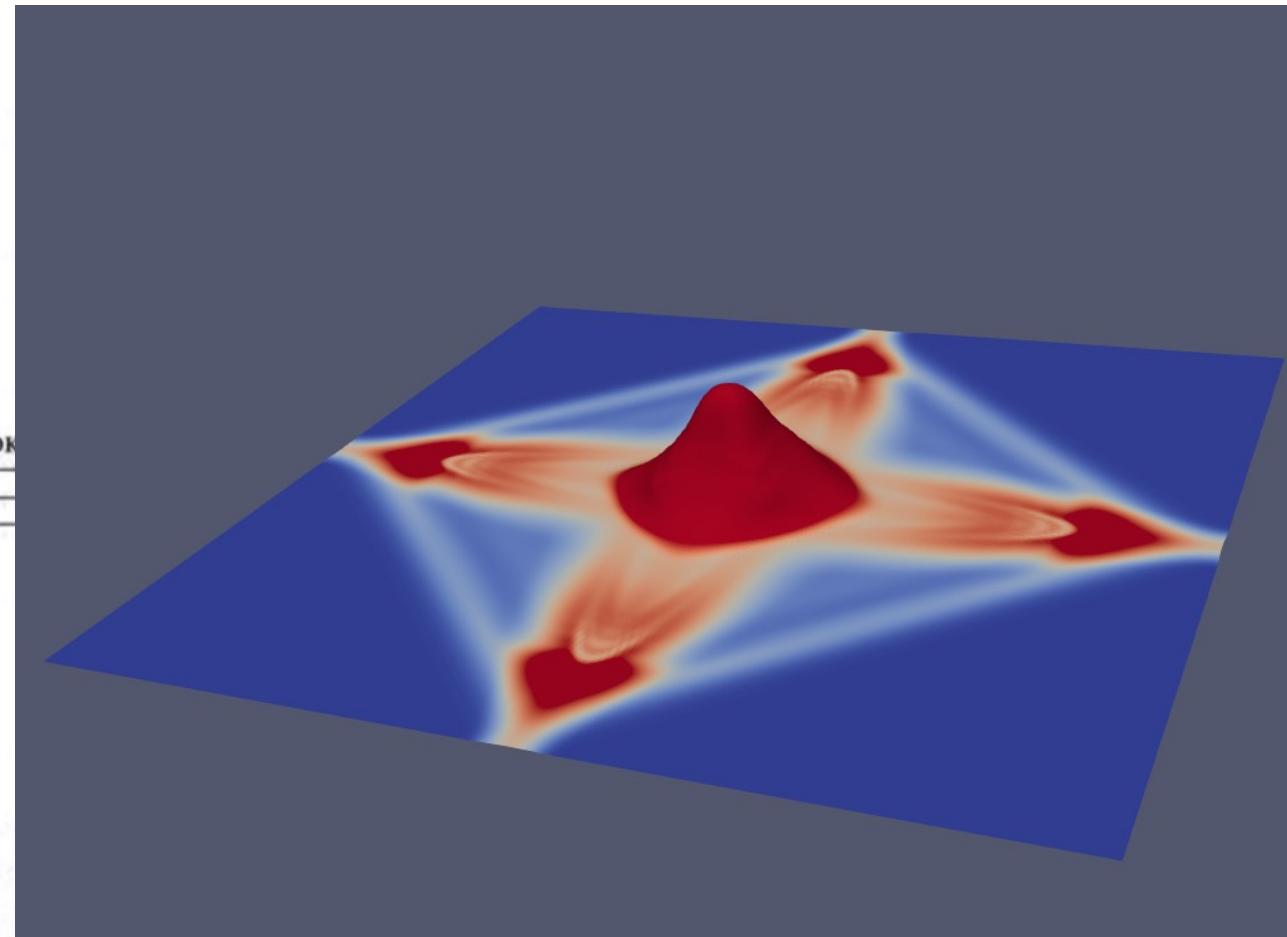
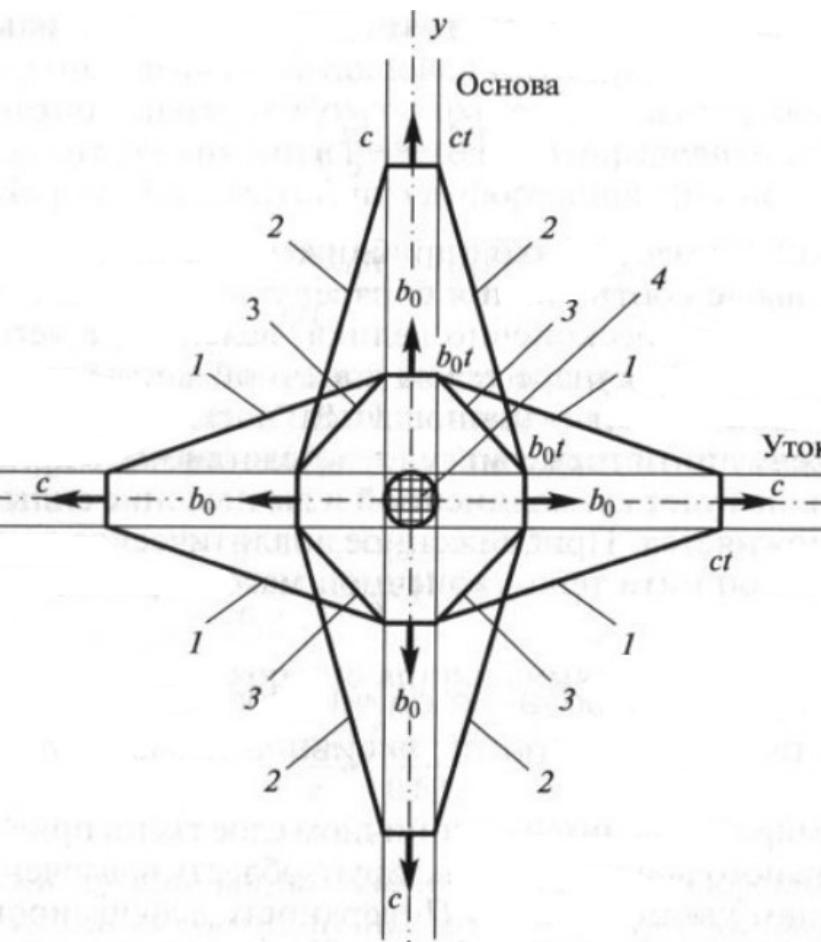
- Модель “Крест-колокол” для системы нитей под действием внешнего импульса



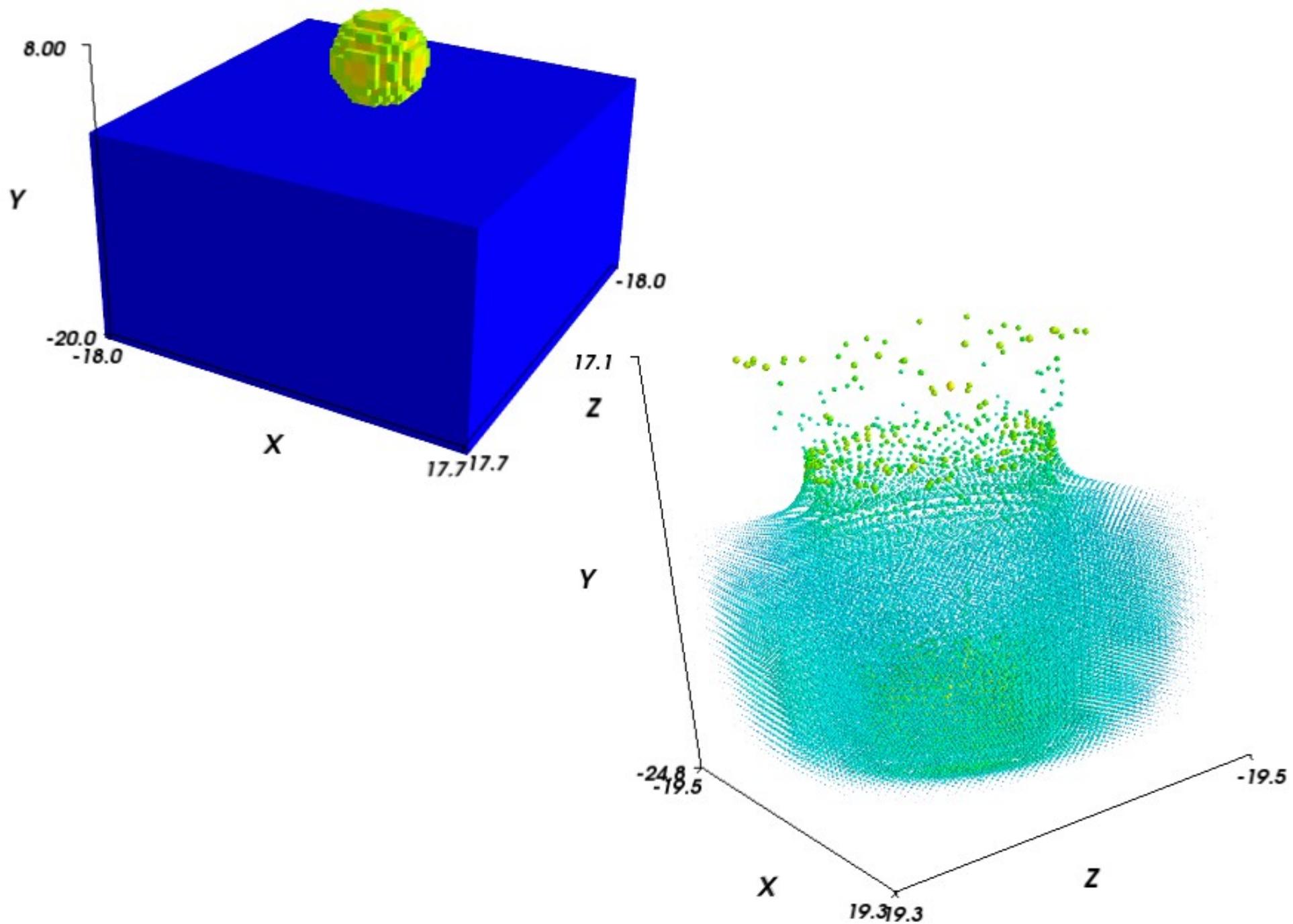


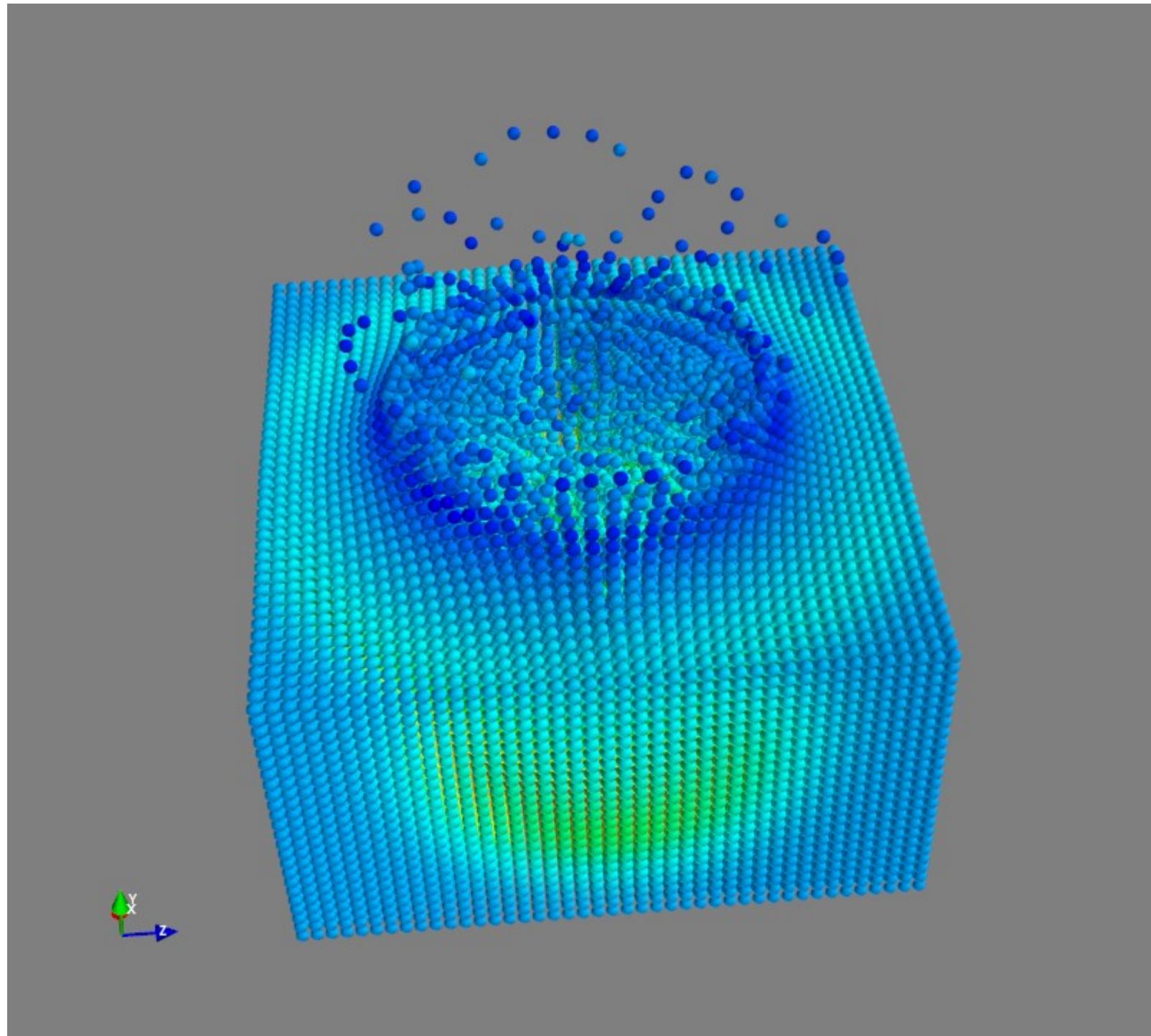
Kevlar destruction

- “cross-bell” interaction model;
- shearless membrane.

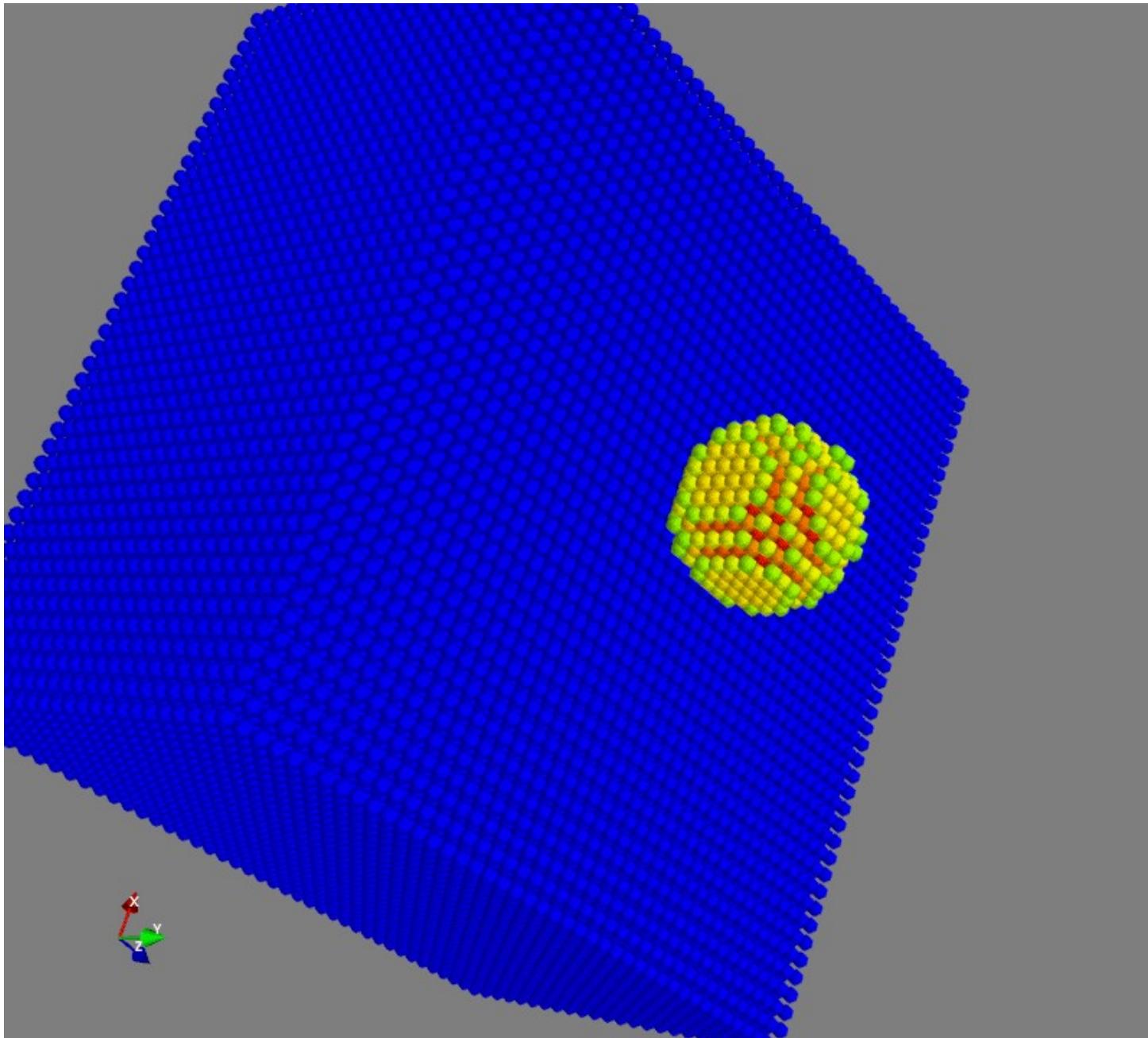


Падение метеорита на бетон

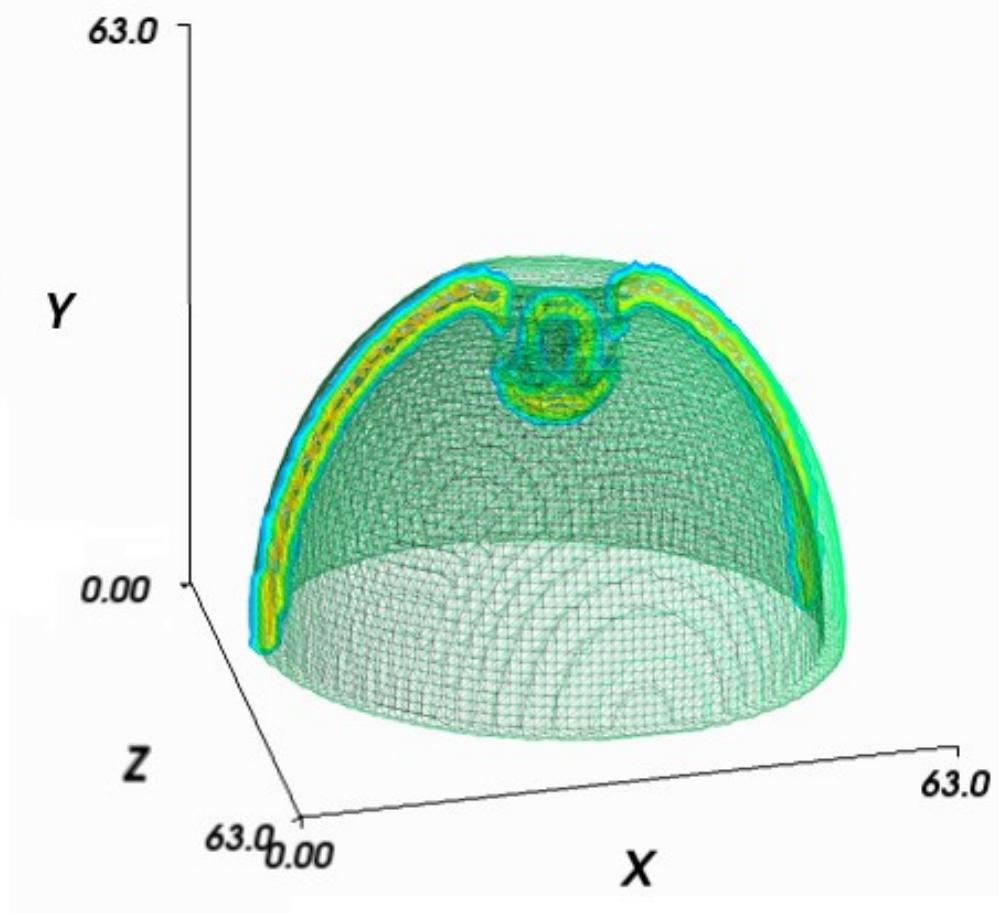
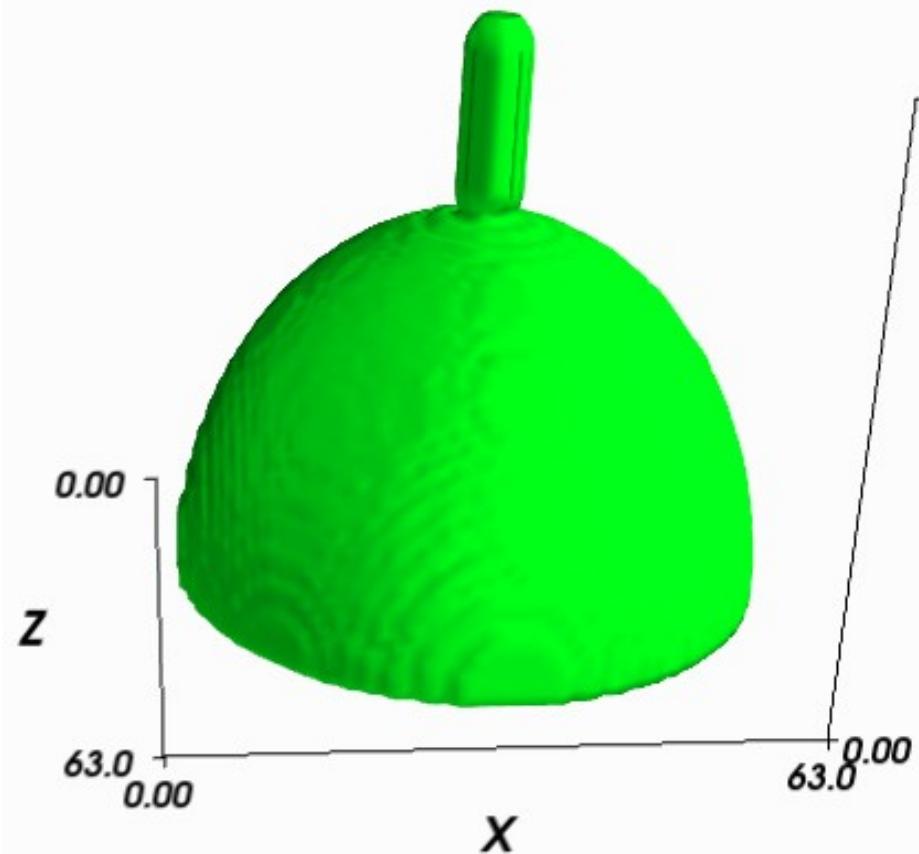


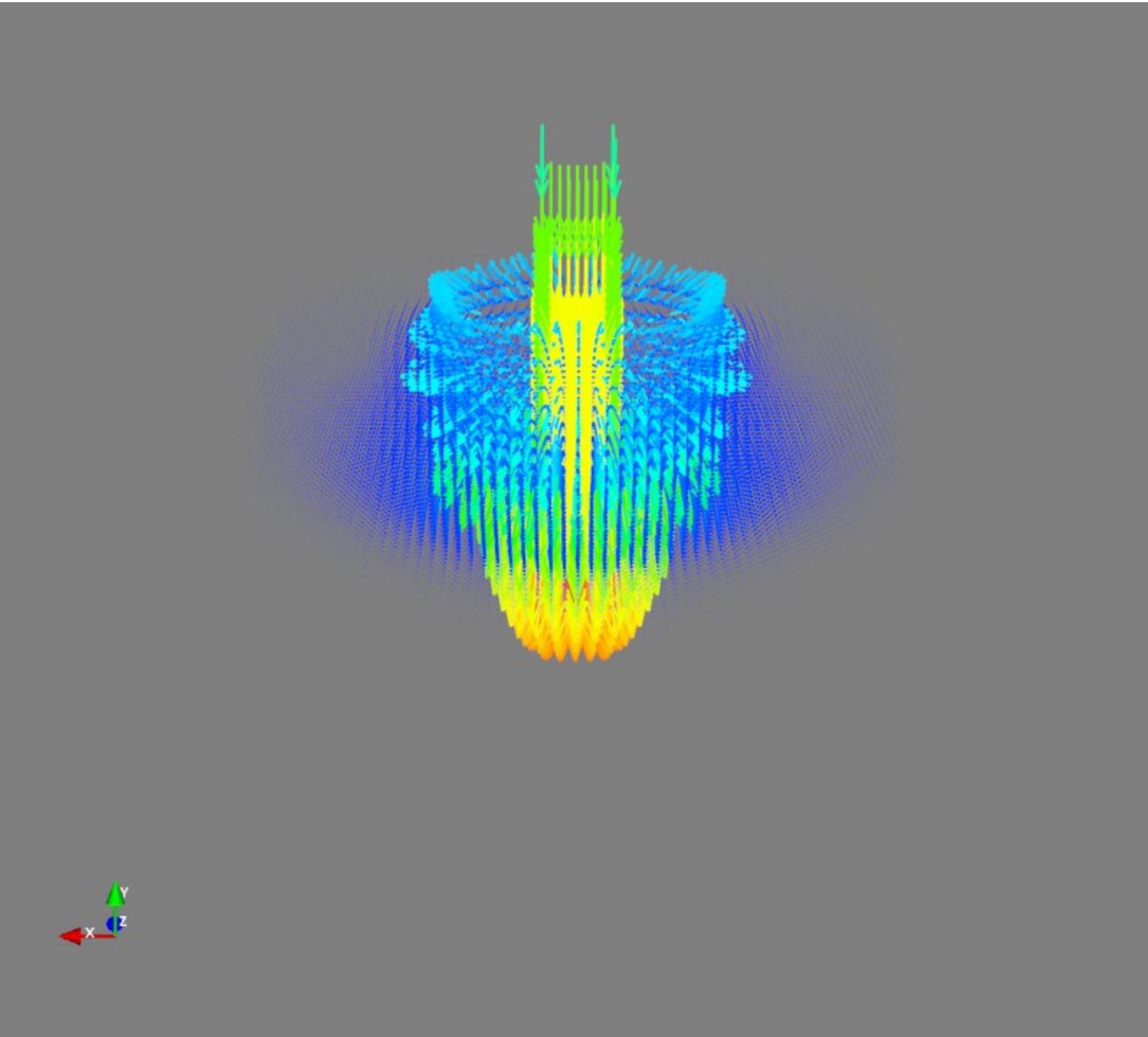


Падение метеорита на бетон

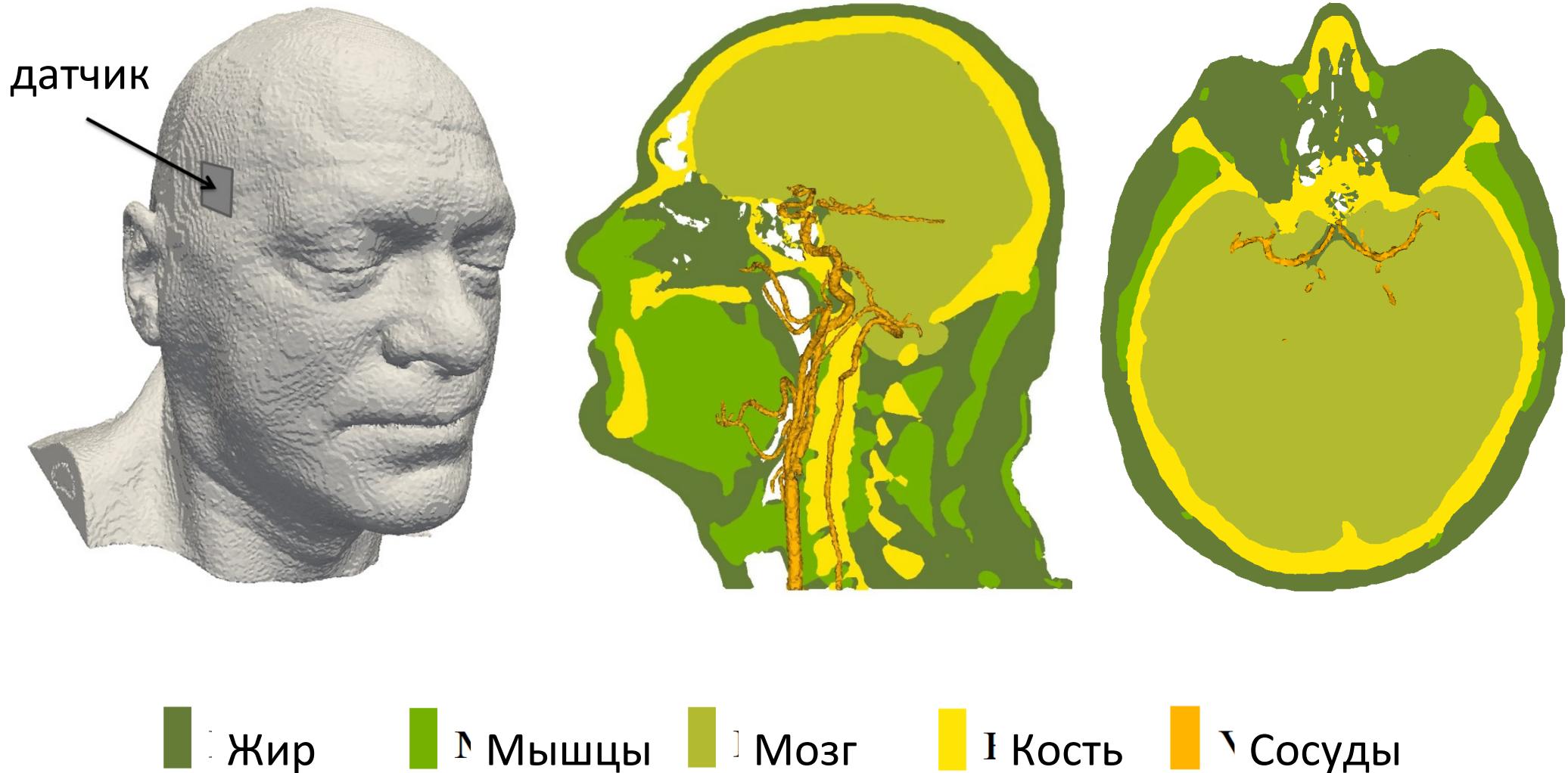


Соударение с полусферической оболочкой



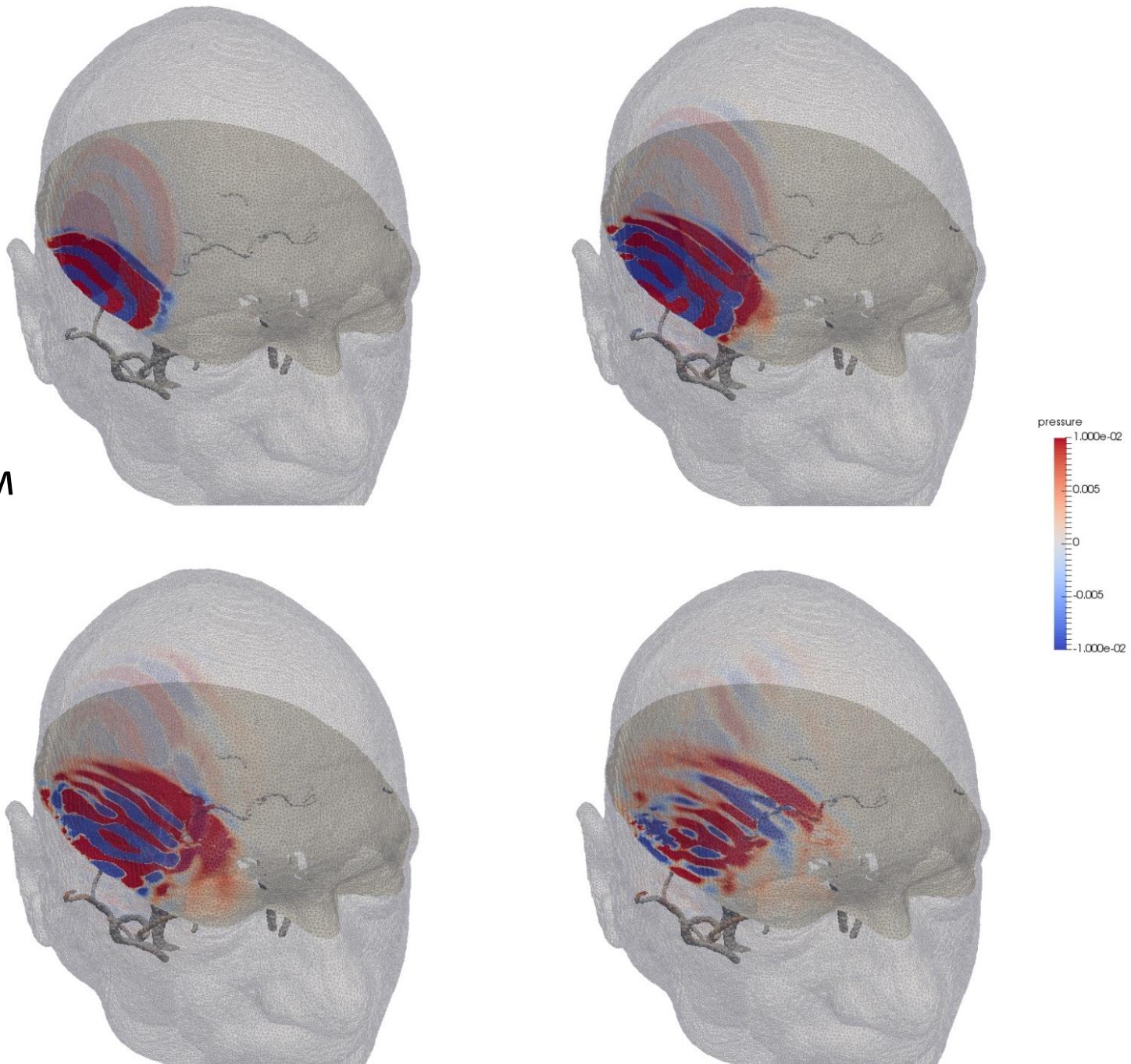


Транскраниальное УЗИ



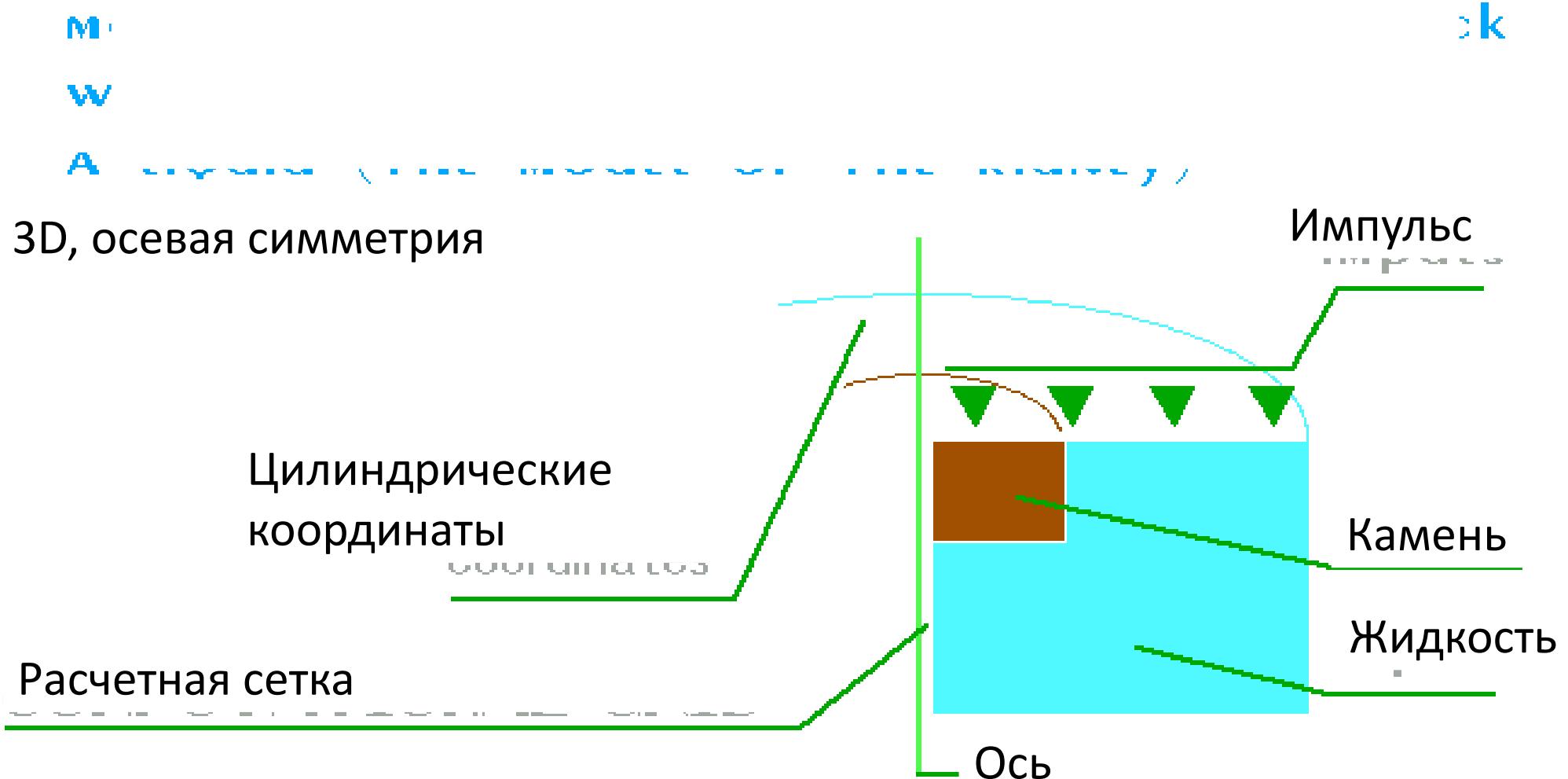
Транскраниальное УЗИ

Расчетные сетки
предоставлены
научным коллективом
под руководством
Василевского Ю.В.

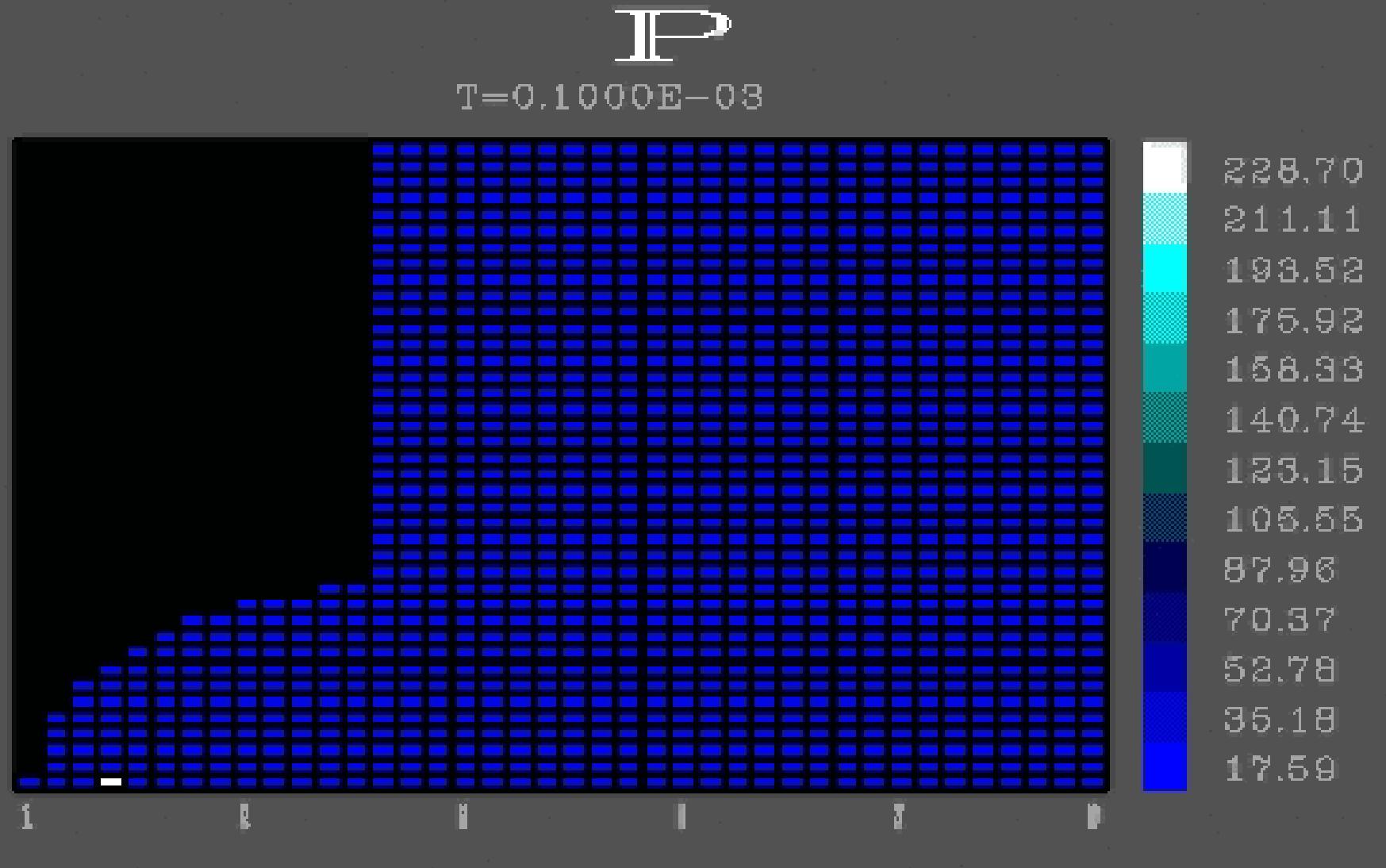


Разрушение камня в почках

Короткий сильный удар по камню, погруженному в жидкость

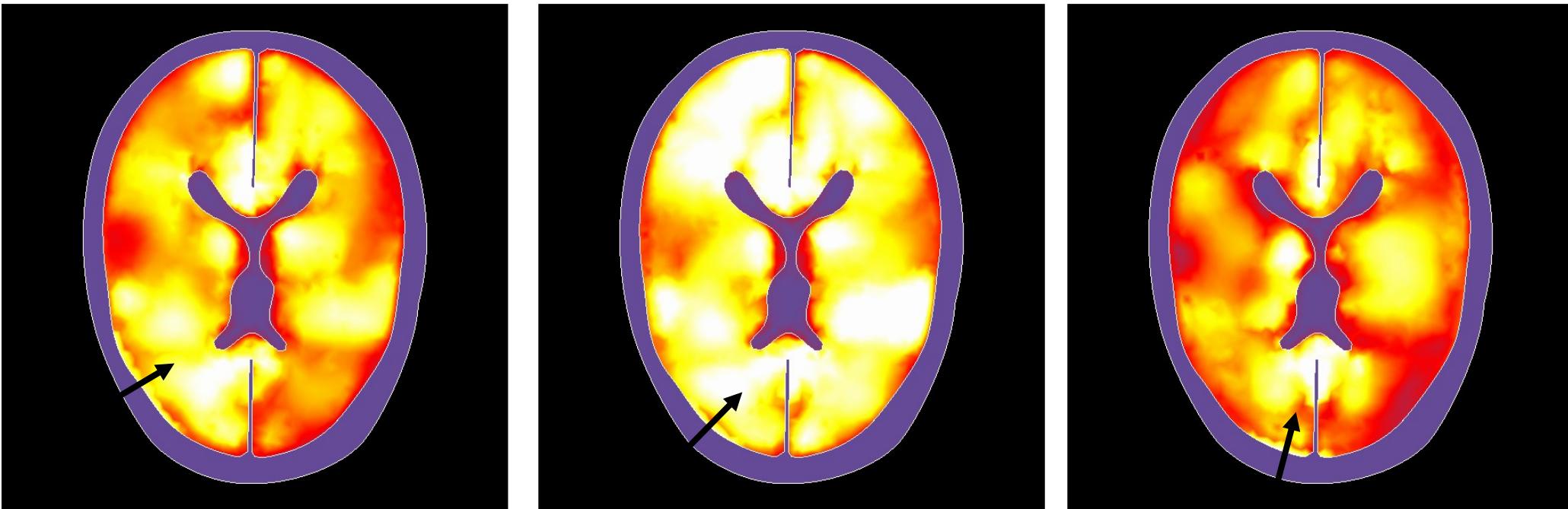


Разрушение камня в почках



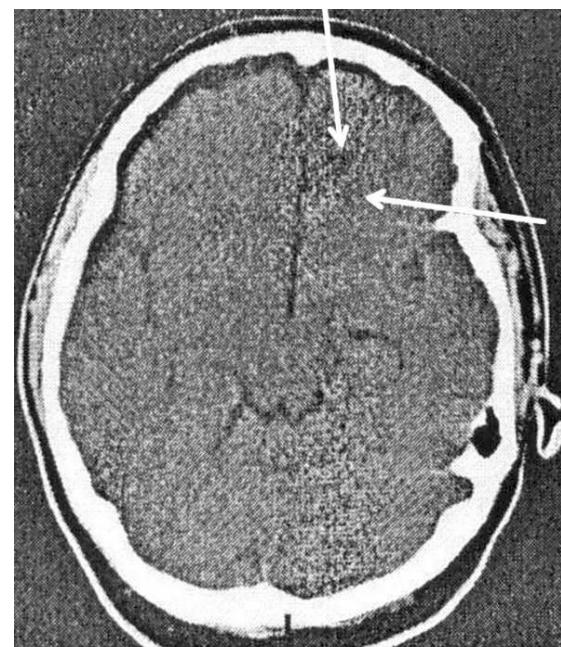
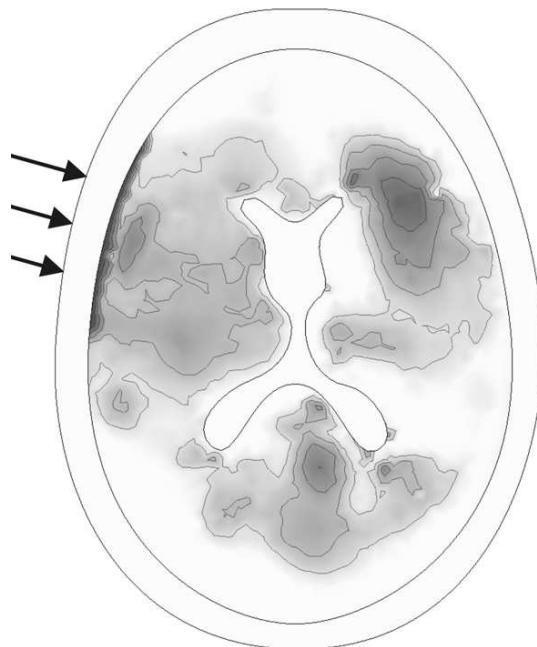
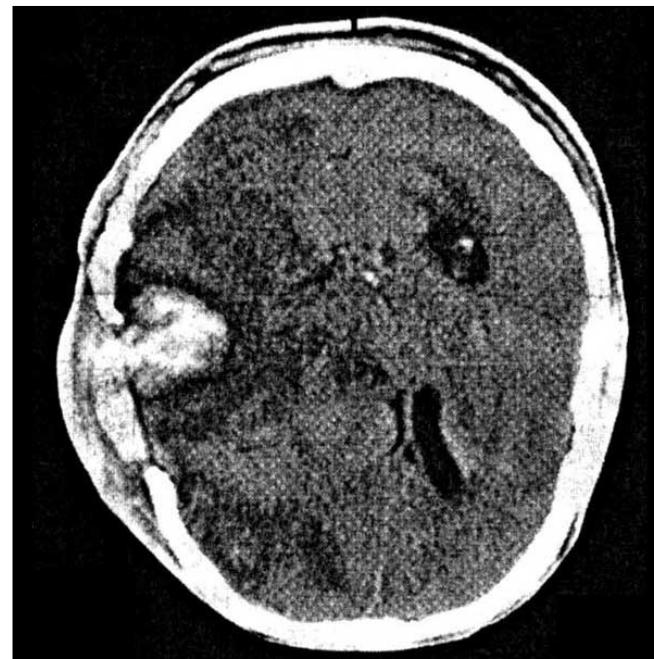
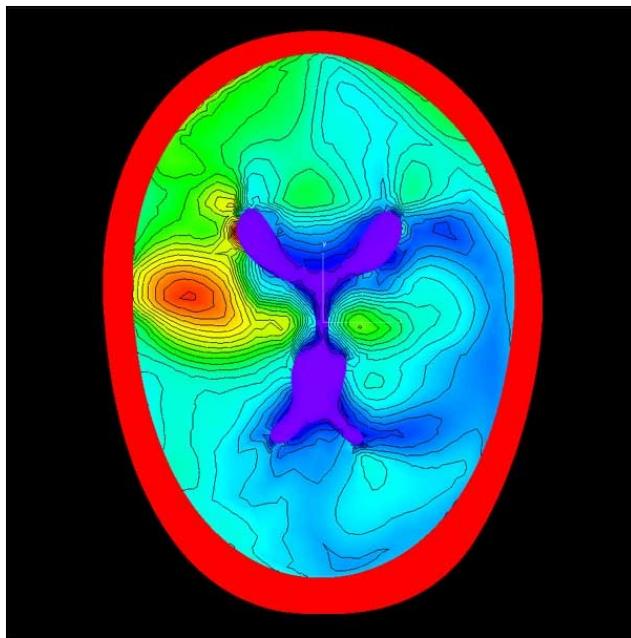
Черепно-мозговая травма

Итоговые повреждения сильно зависят от направления удара



Максимальные сдвиговые напряжения при одинаковой силе
воздействия и разными направлениями удара.

Сравнение с клиническими результатами

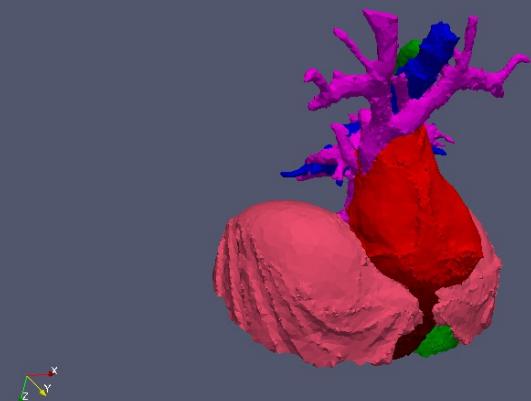
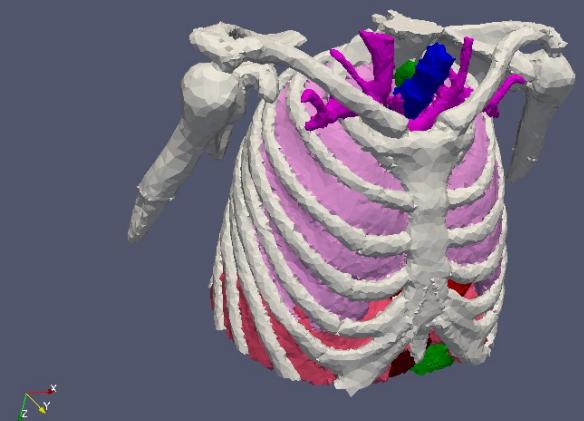
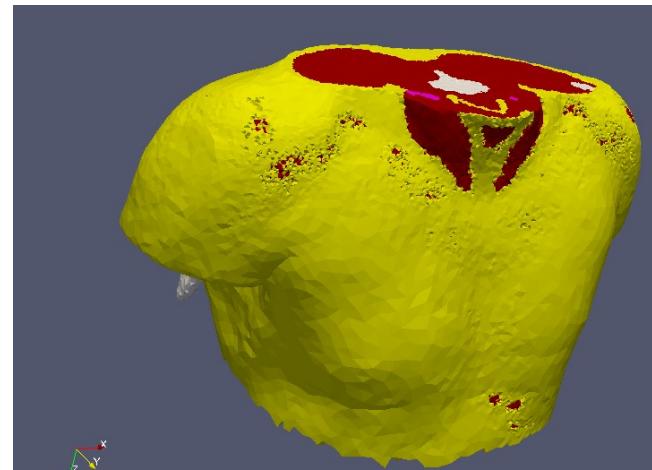


Удар по грудной клетке

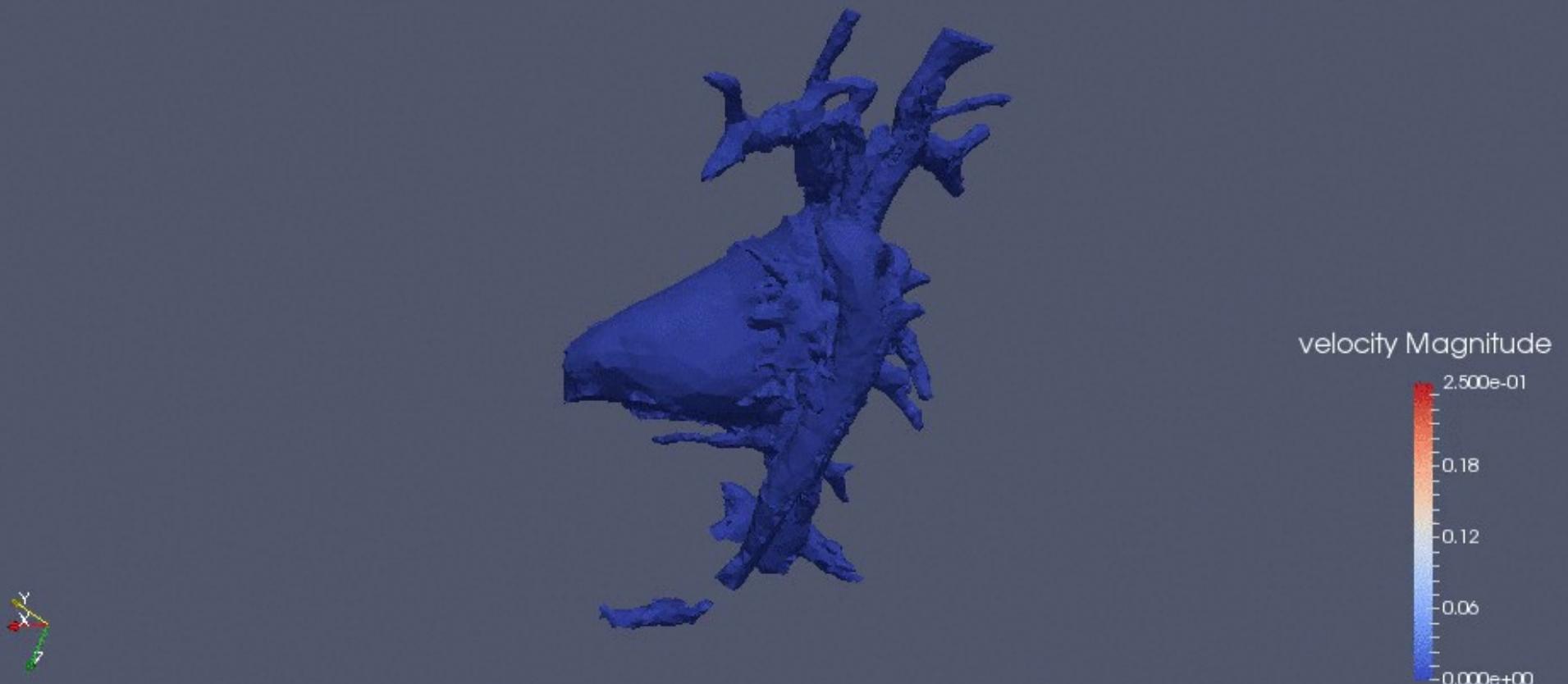
Расчетные сетки предоставлены научным
коллективом под руководством Василевского Ю.В.

Ткани, рассмотренные в модели:

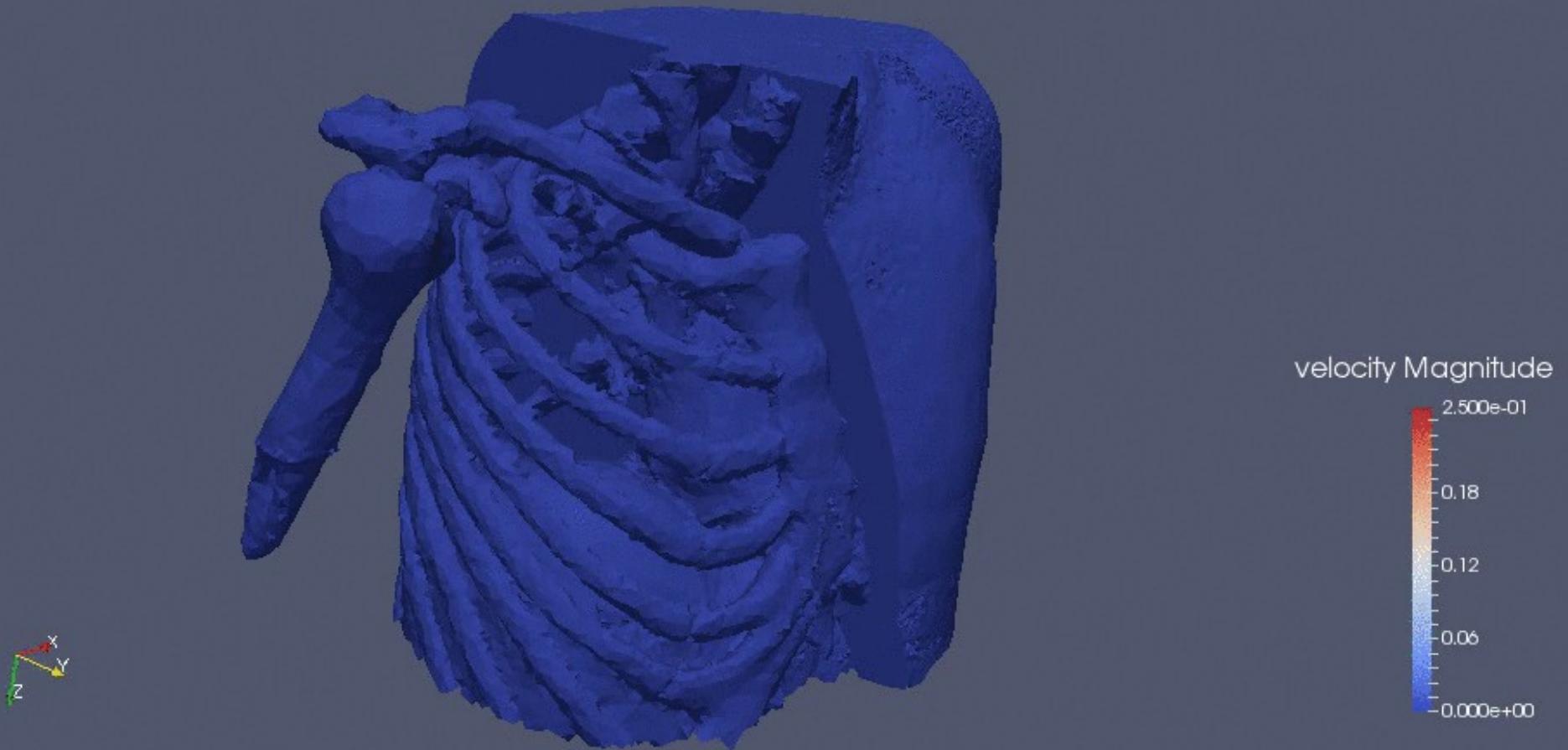
- Жир
- Мышцы
- Кость
- Диафрагма
- Печени
- ЖКТ
- Трахея
- Сердце и сосуды



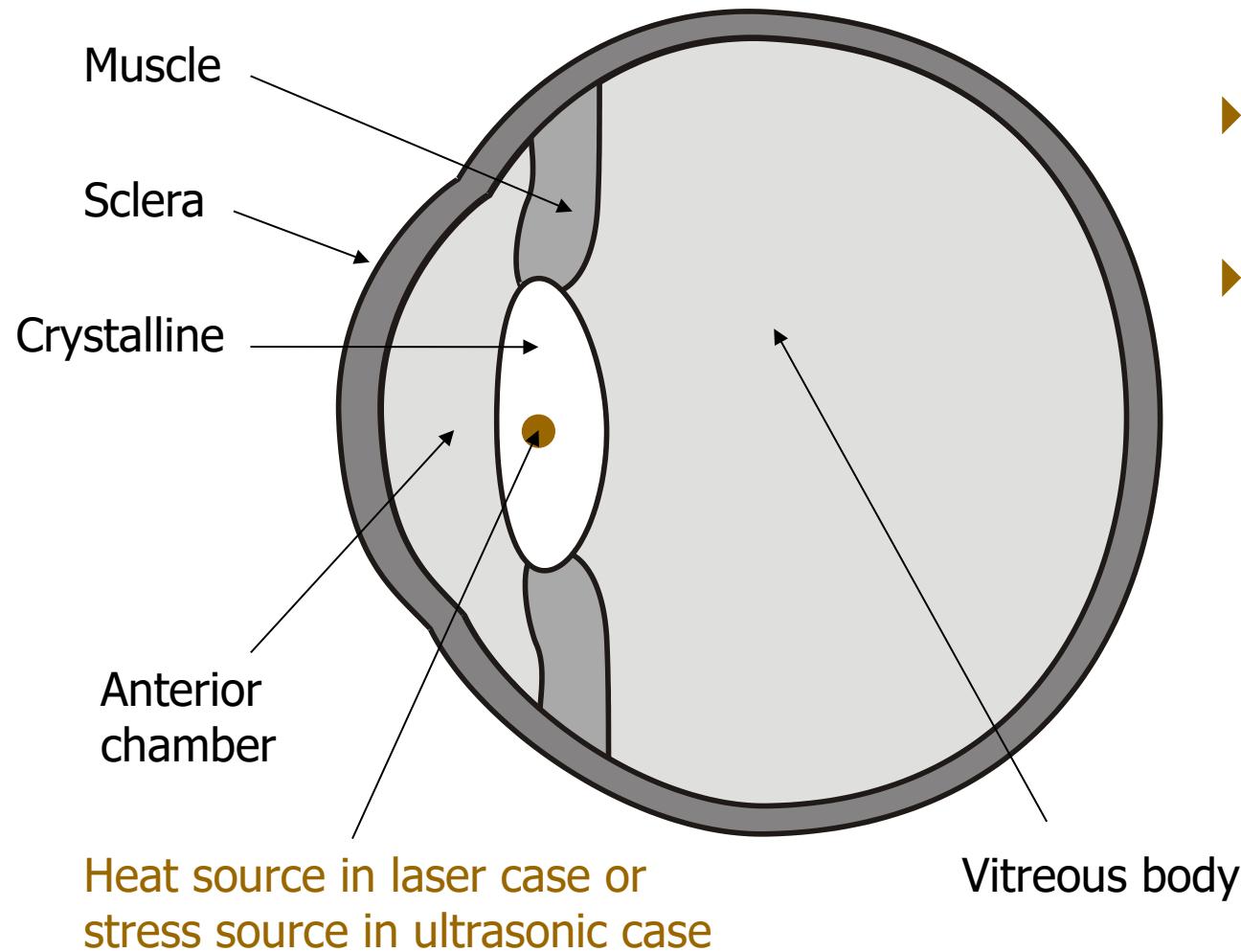
3D: модуль скорости в сердце и сосудах



3D: модуль скорости во всех тканях



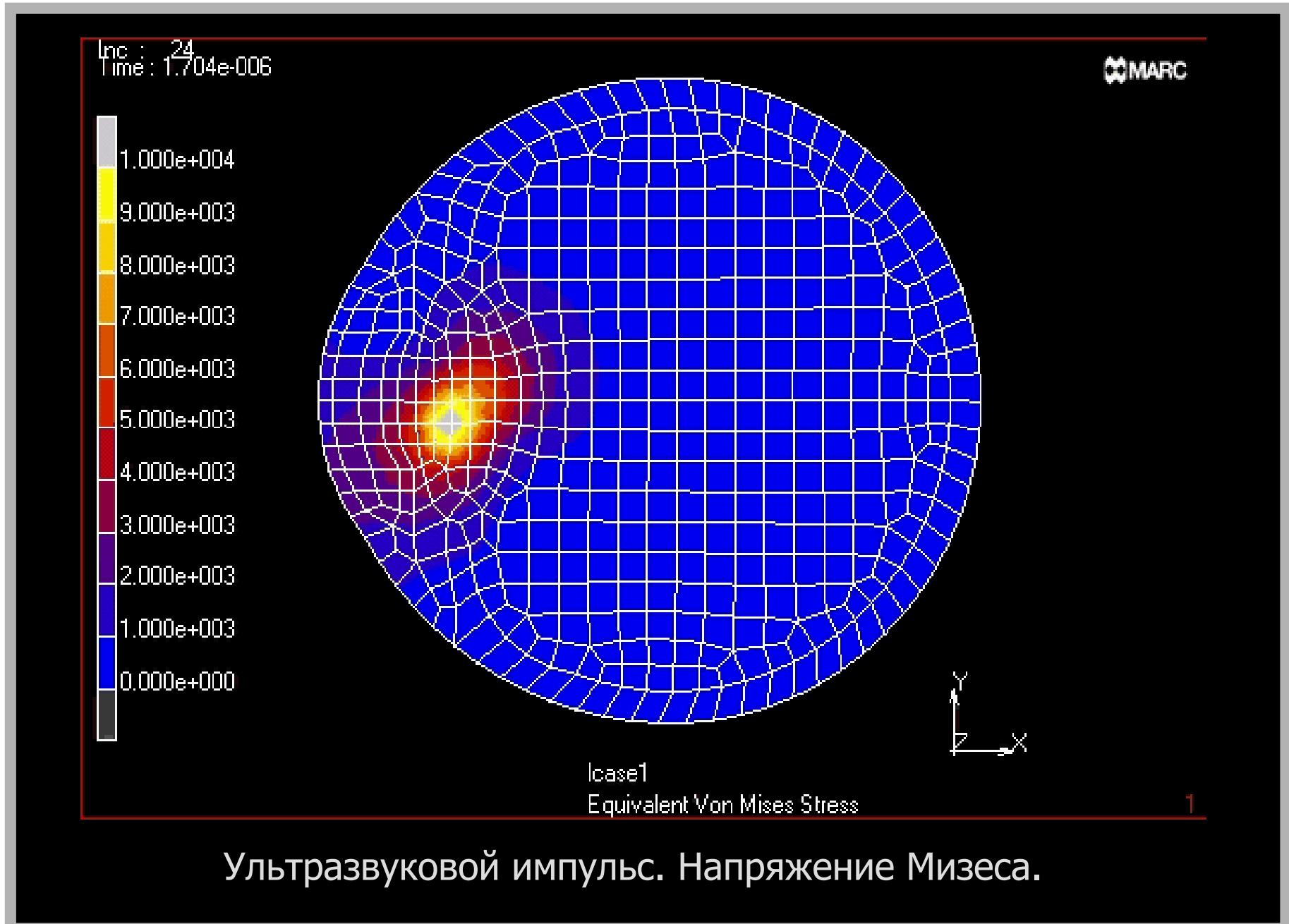
Cataract removal



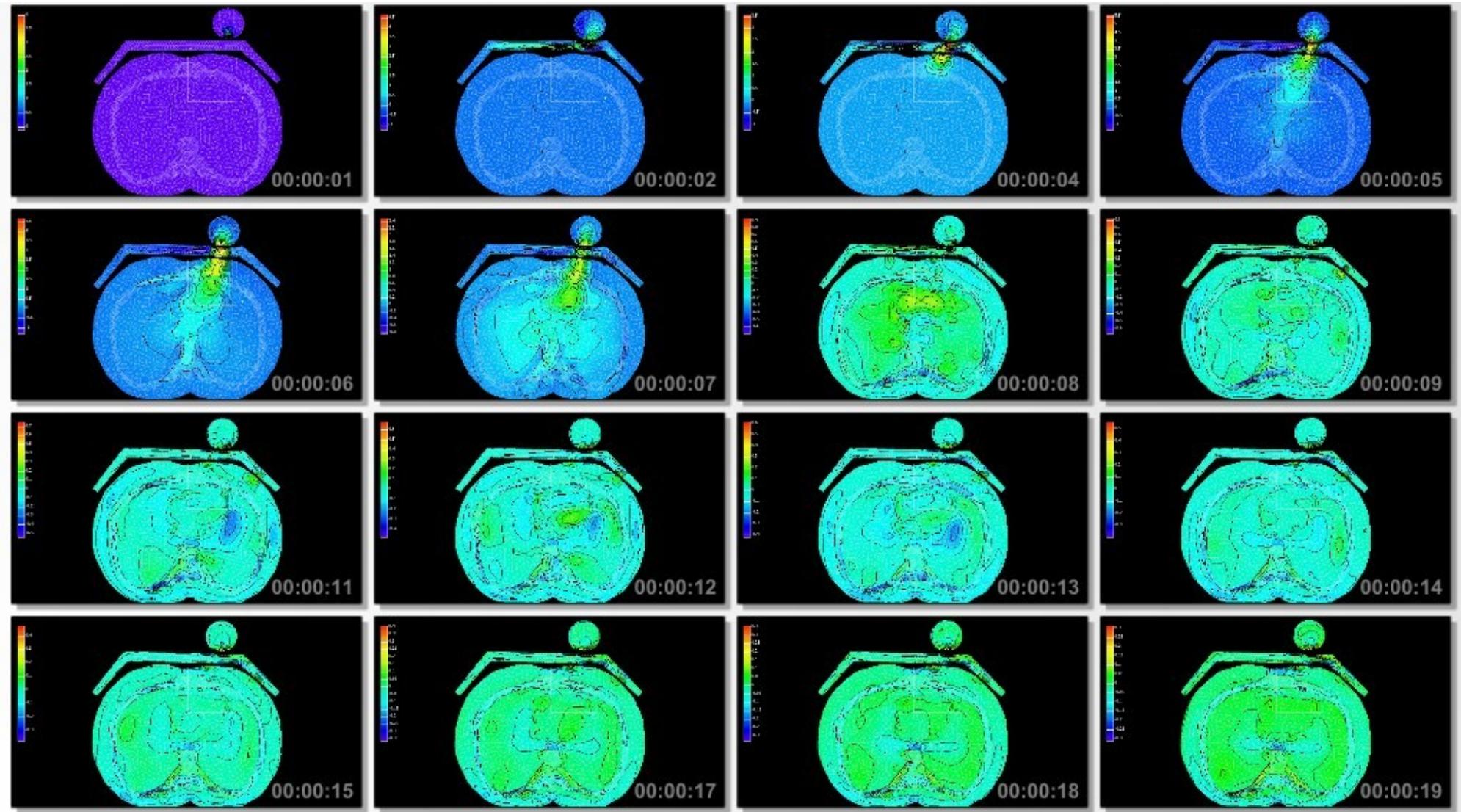
Surgical instruments:

- ▶ Laser needle (heat source)
- ▶ Ultrasonic needle (stress source)

Удаление катаракты



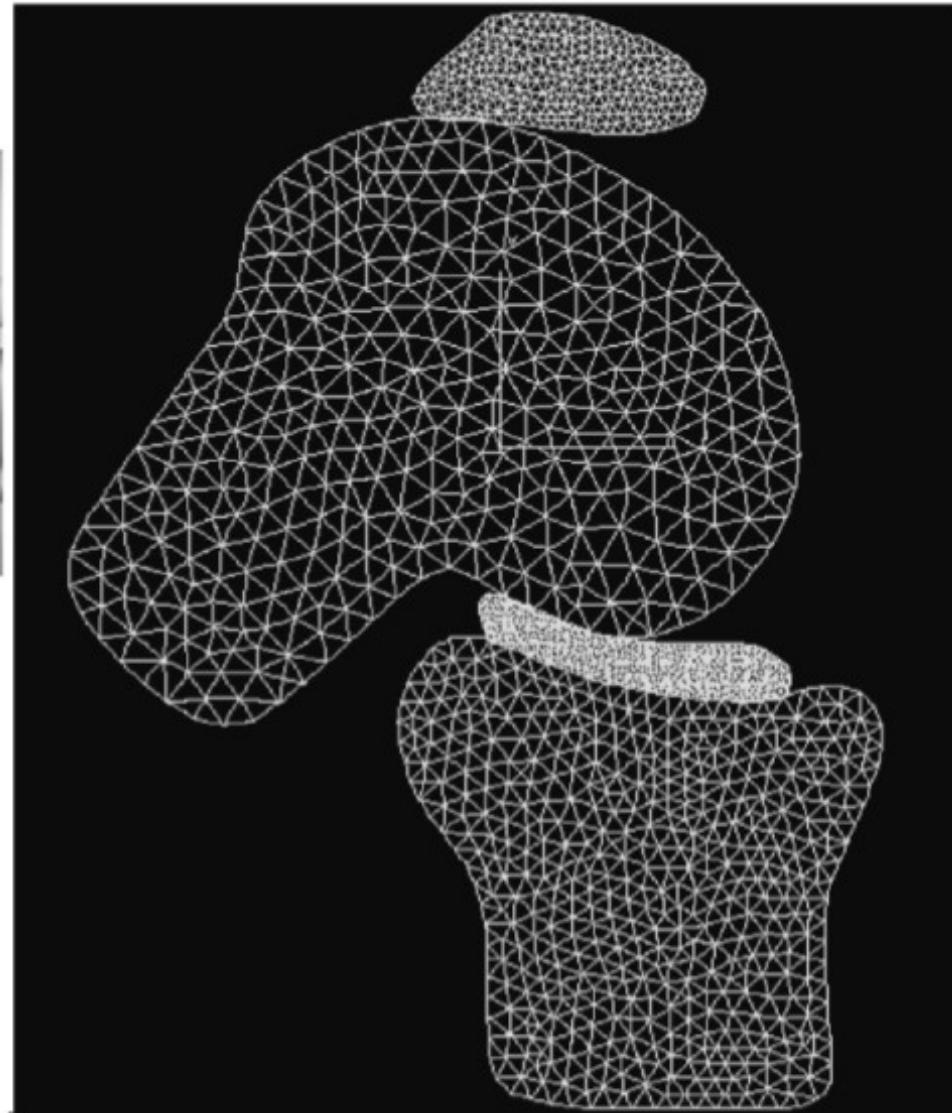
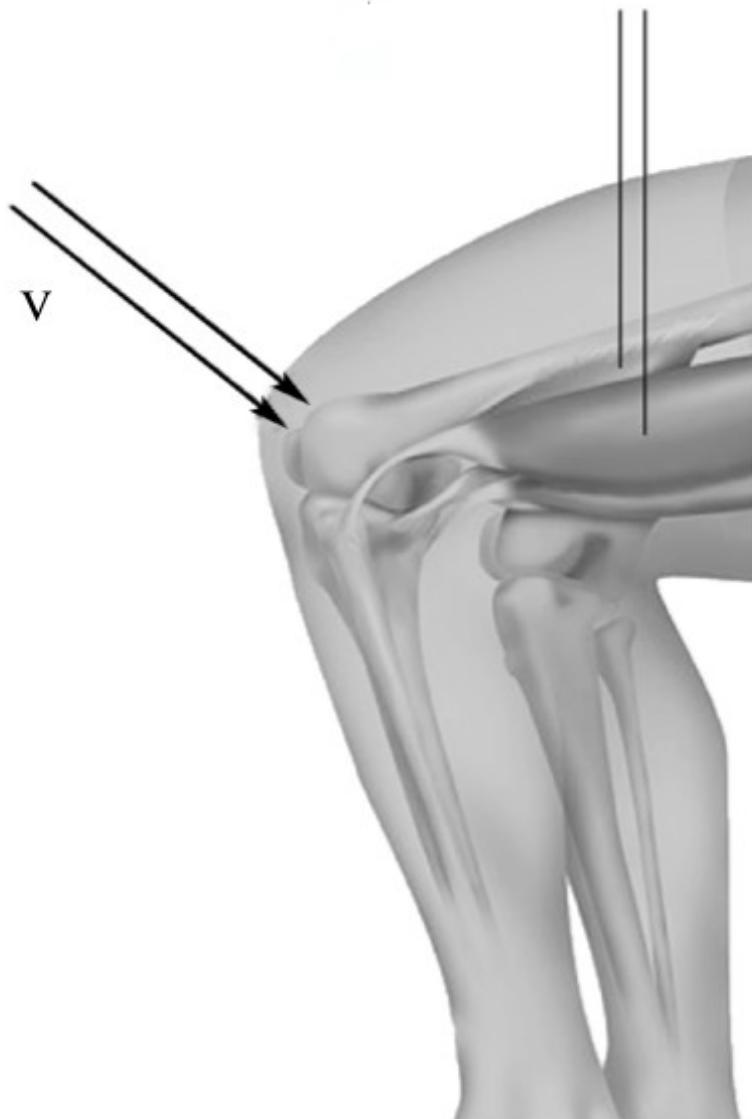
Защитная конструкция



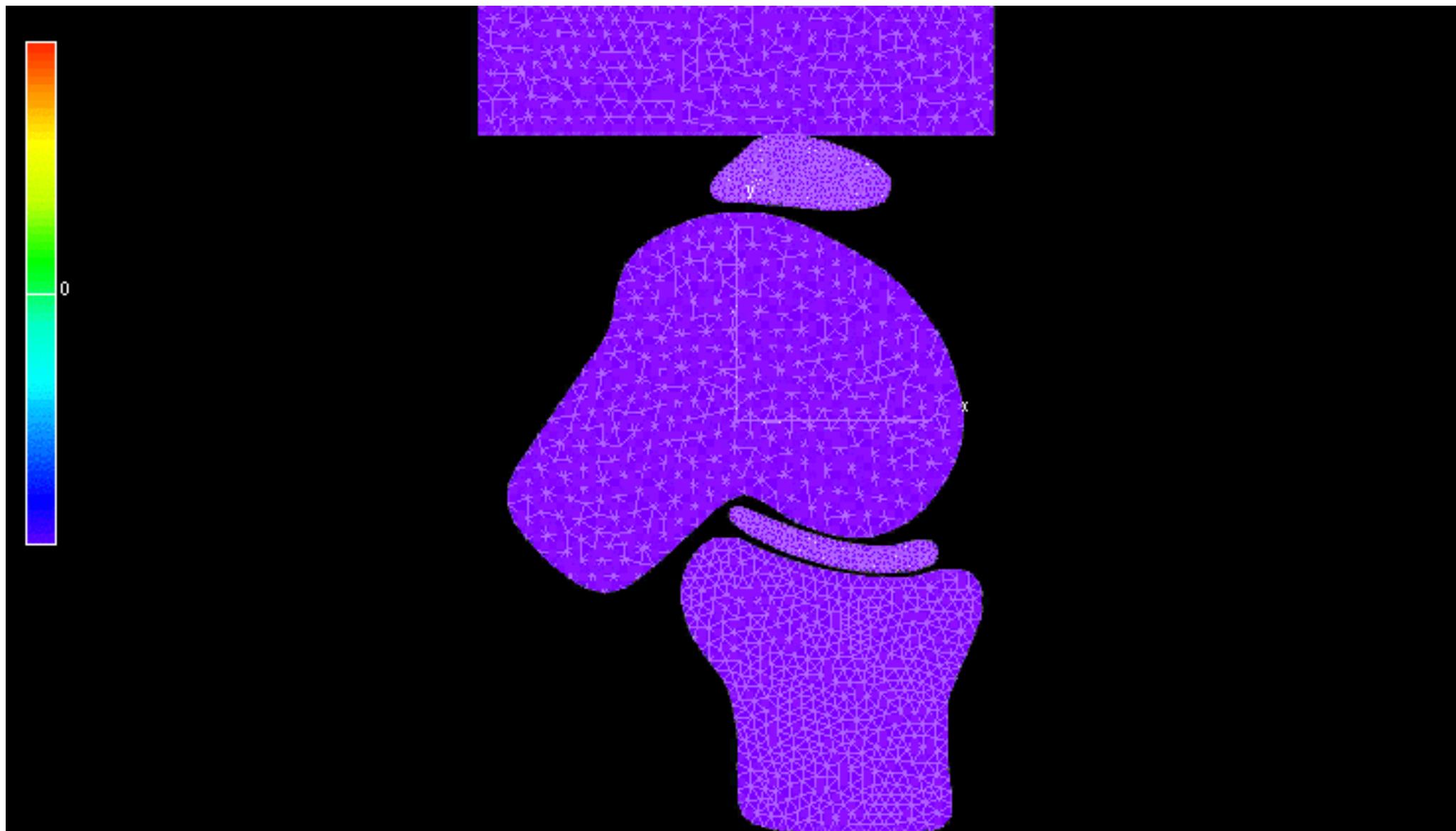
Геометрия, приближенная к реальной
(отображен модуль скорости)

Травма колена

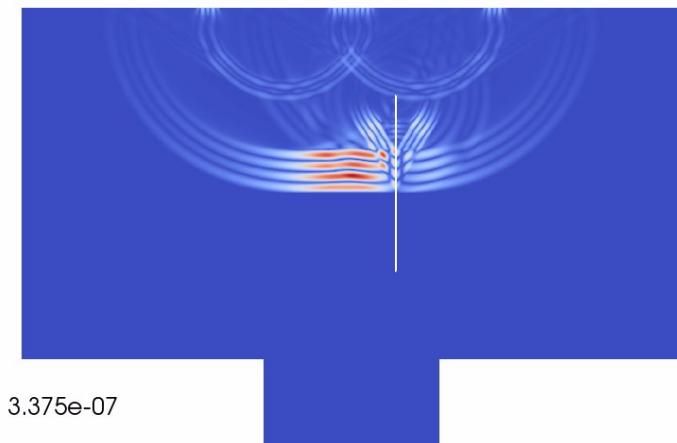
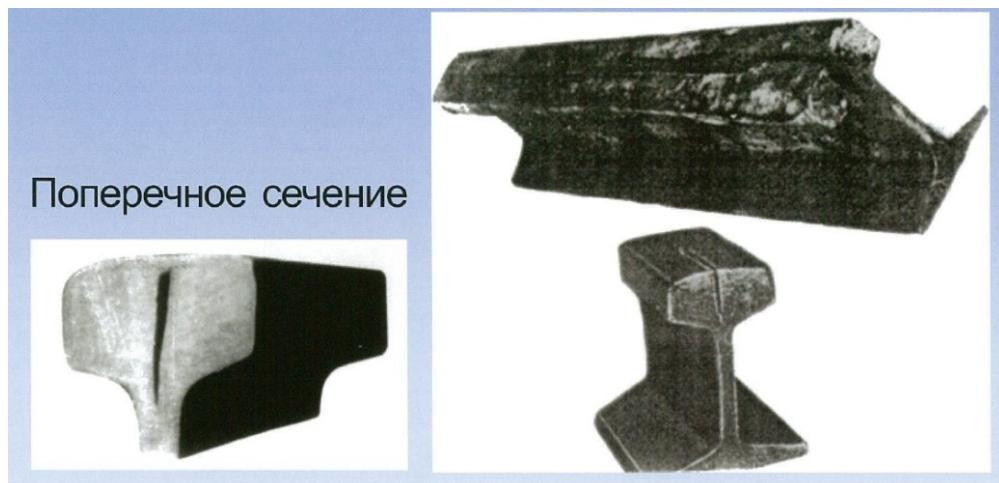
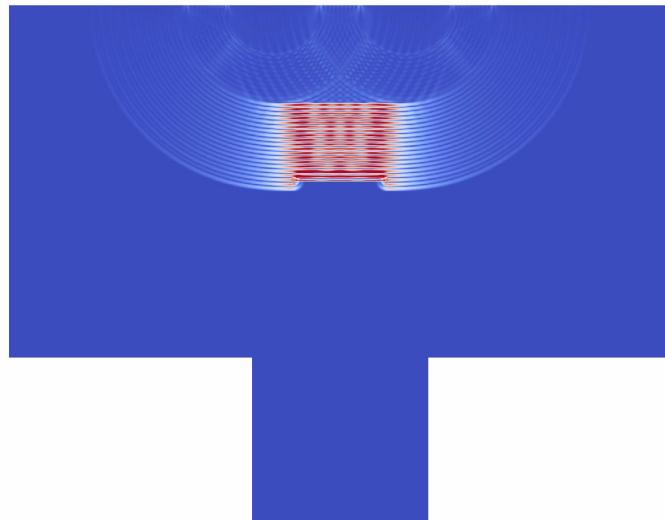
Схема коленного сустава и расчетная сетка



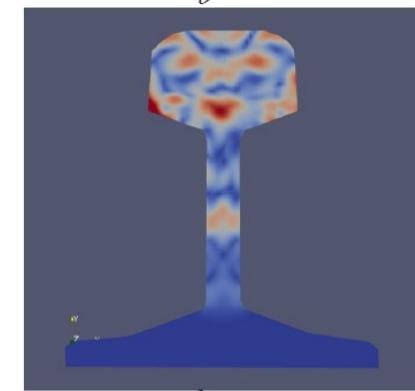
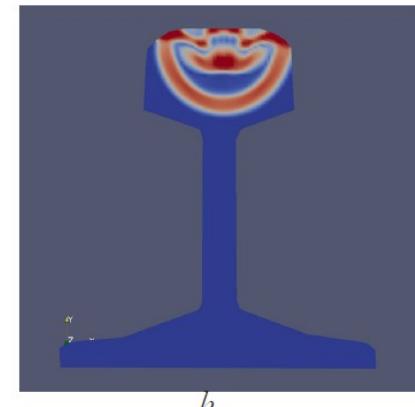
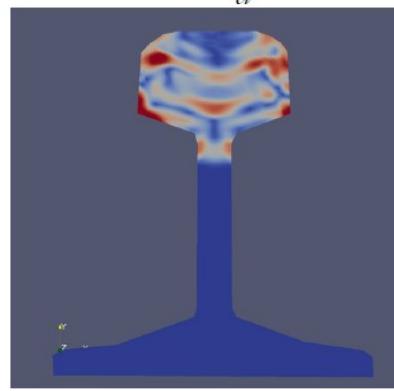
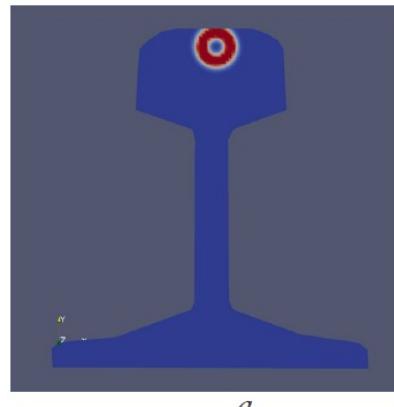
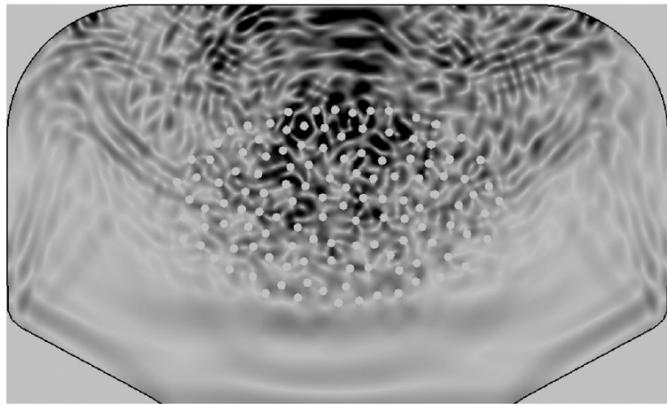
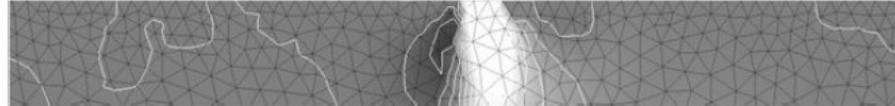
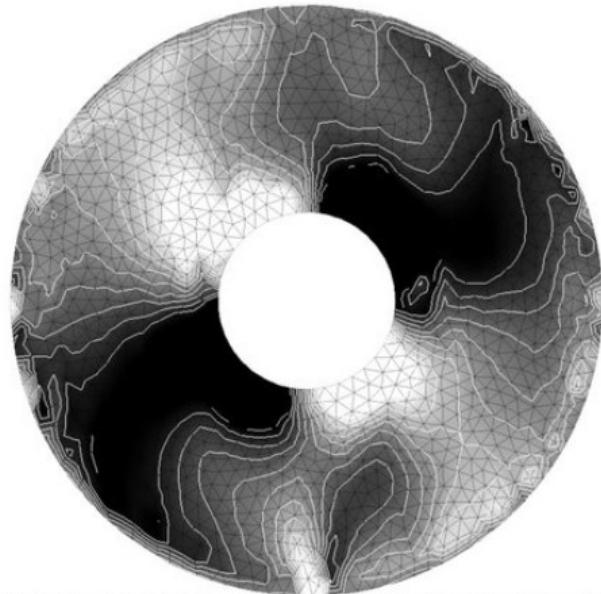
Травма колена



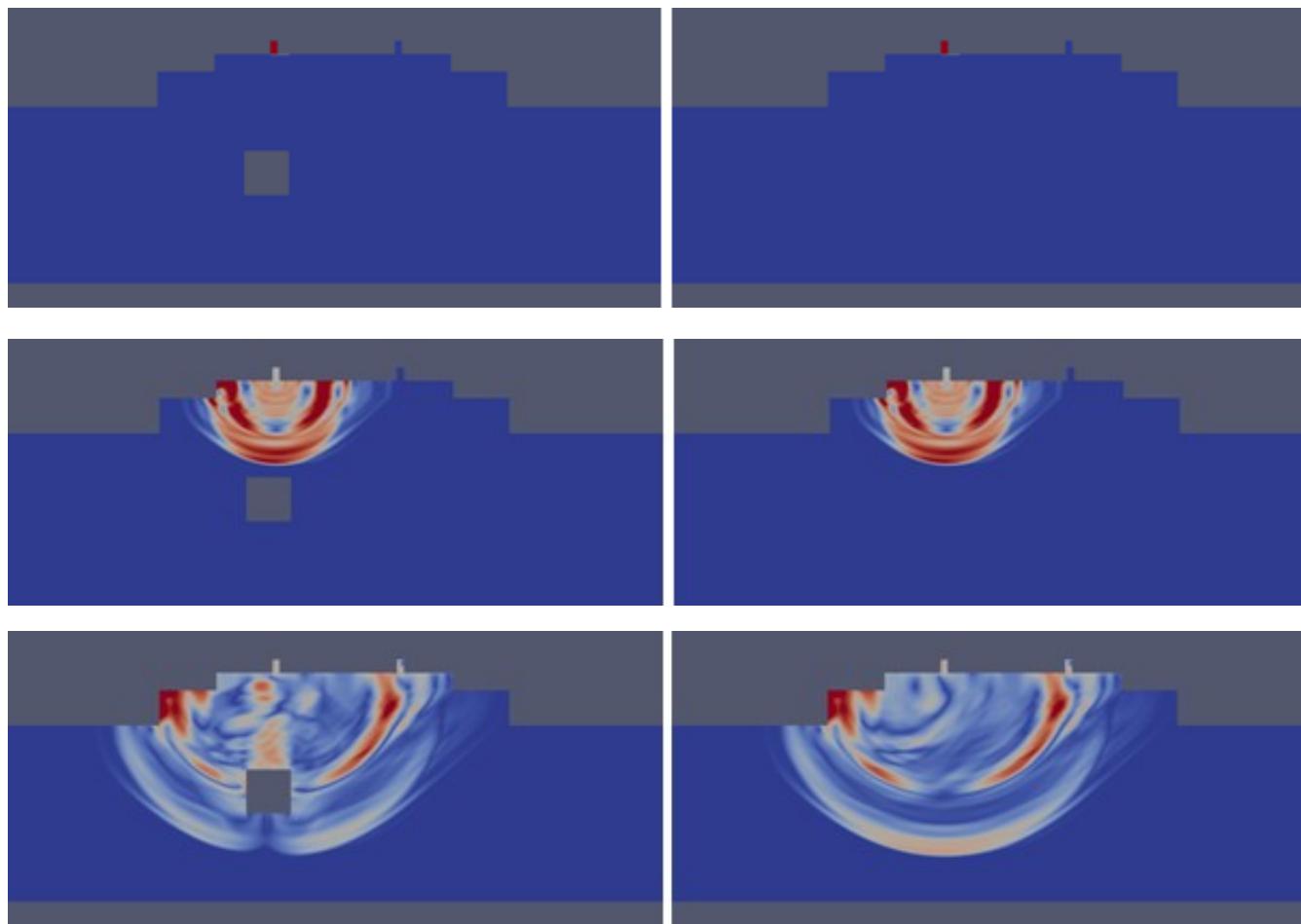
Дефектоскопия



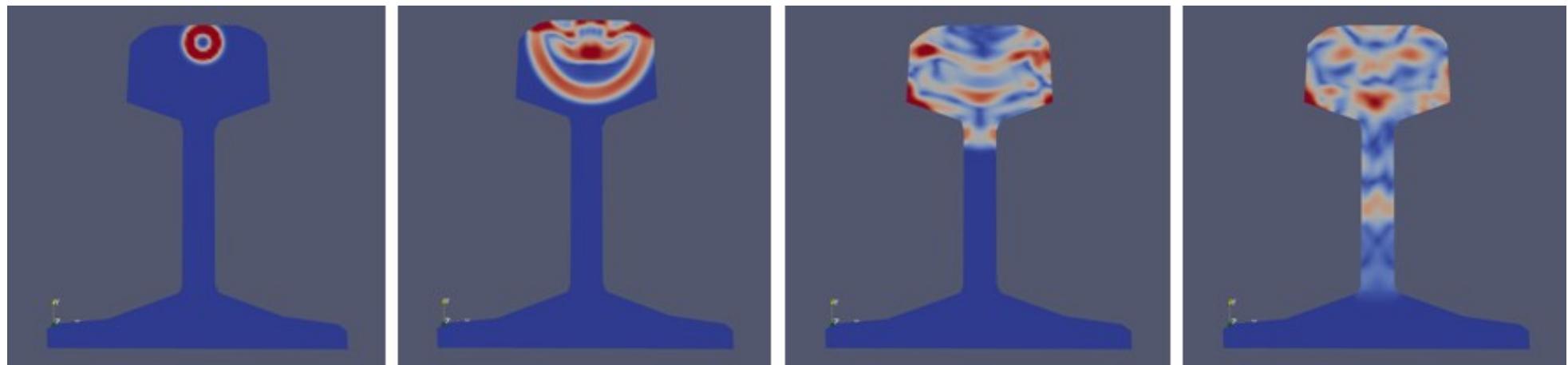
Railways safety



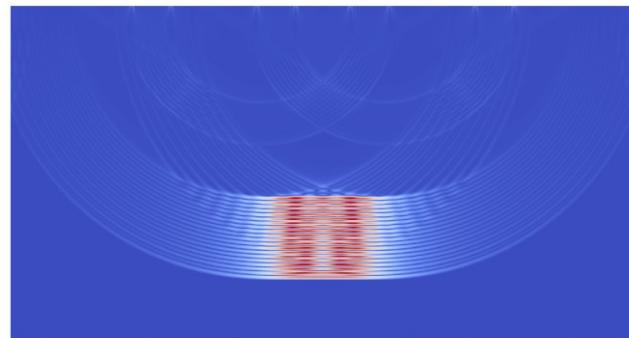
Влияние карстового образования



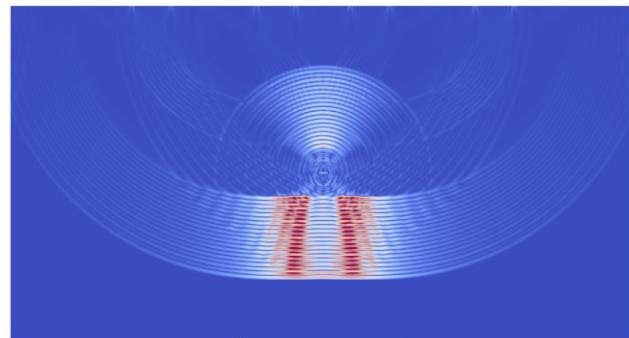
Динамическое воздействие на рельс



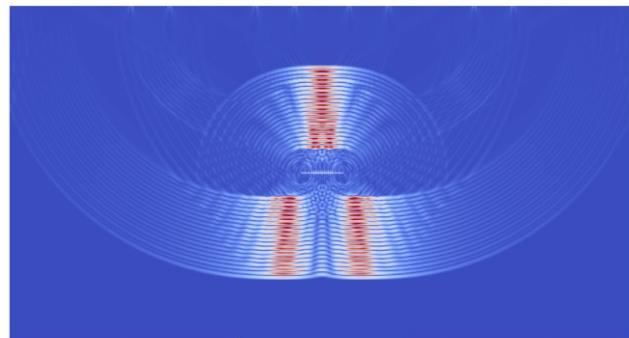
Дефектоскопия железнодорожного рельса



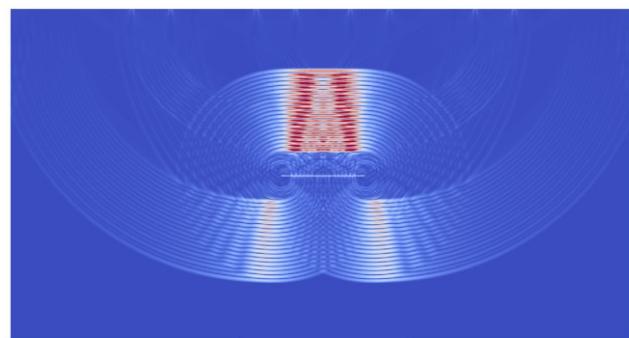
Без трещины



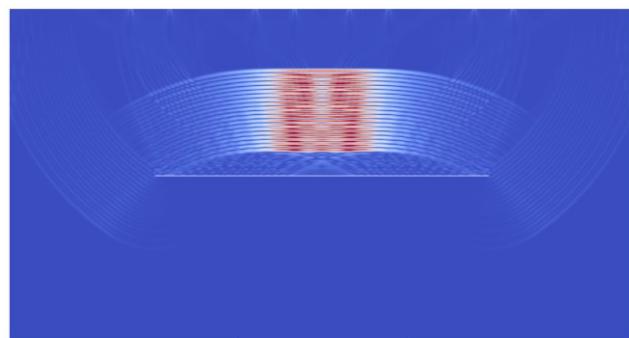
1 мм



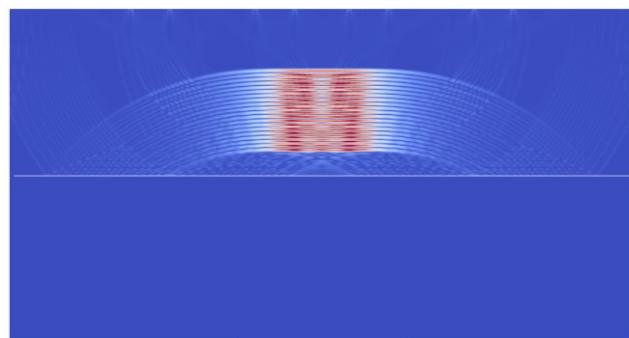
5 мм



10 мм



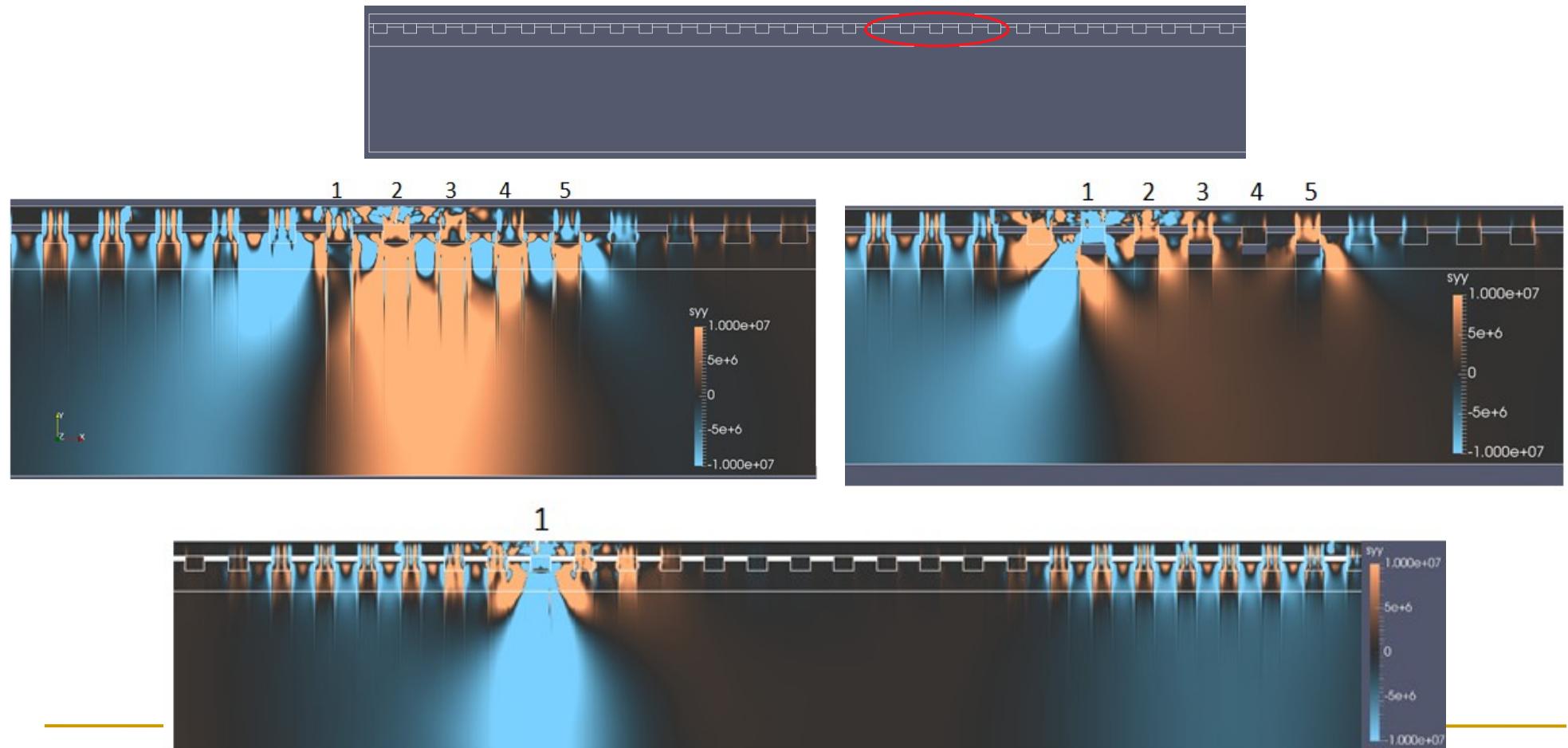
40 мм



74 мм

Отрывы шпал от насыпи

Варьировались положение, глубина отрыва и их количество, скорость движения элемента подвижного состава

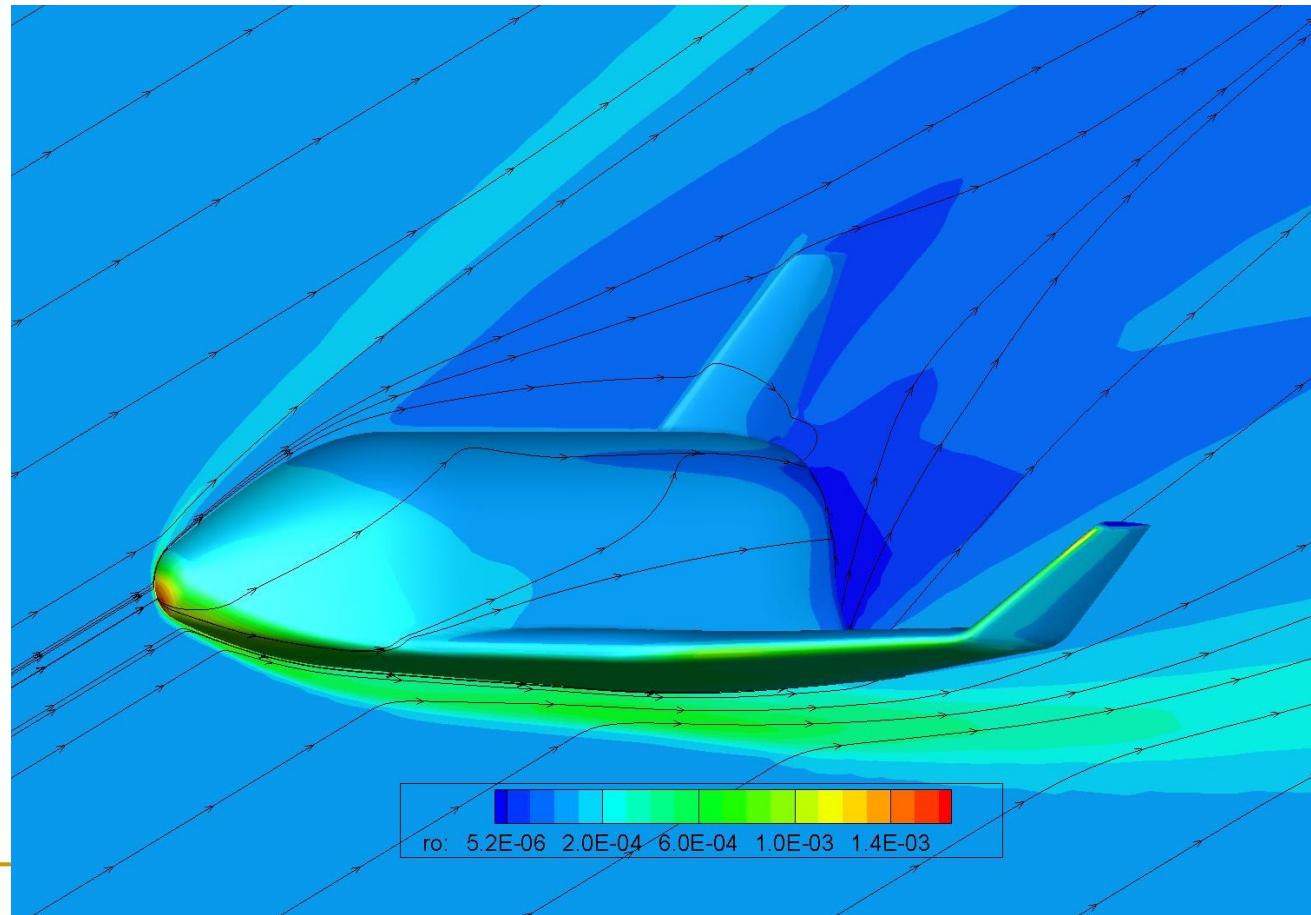


Задачи внешней аэродинамики

Расчёт течения вокруг аппарата, летящего в атмосфере с большой сверхзвуковой скоростью.

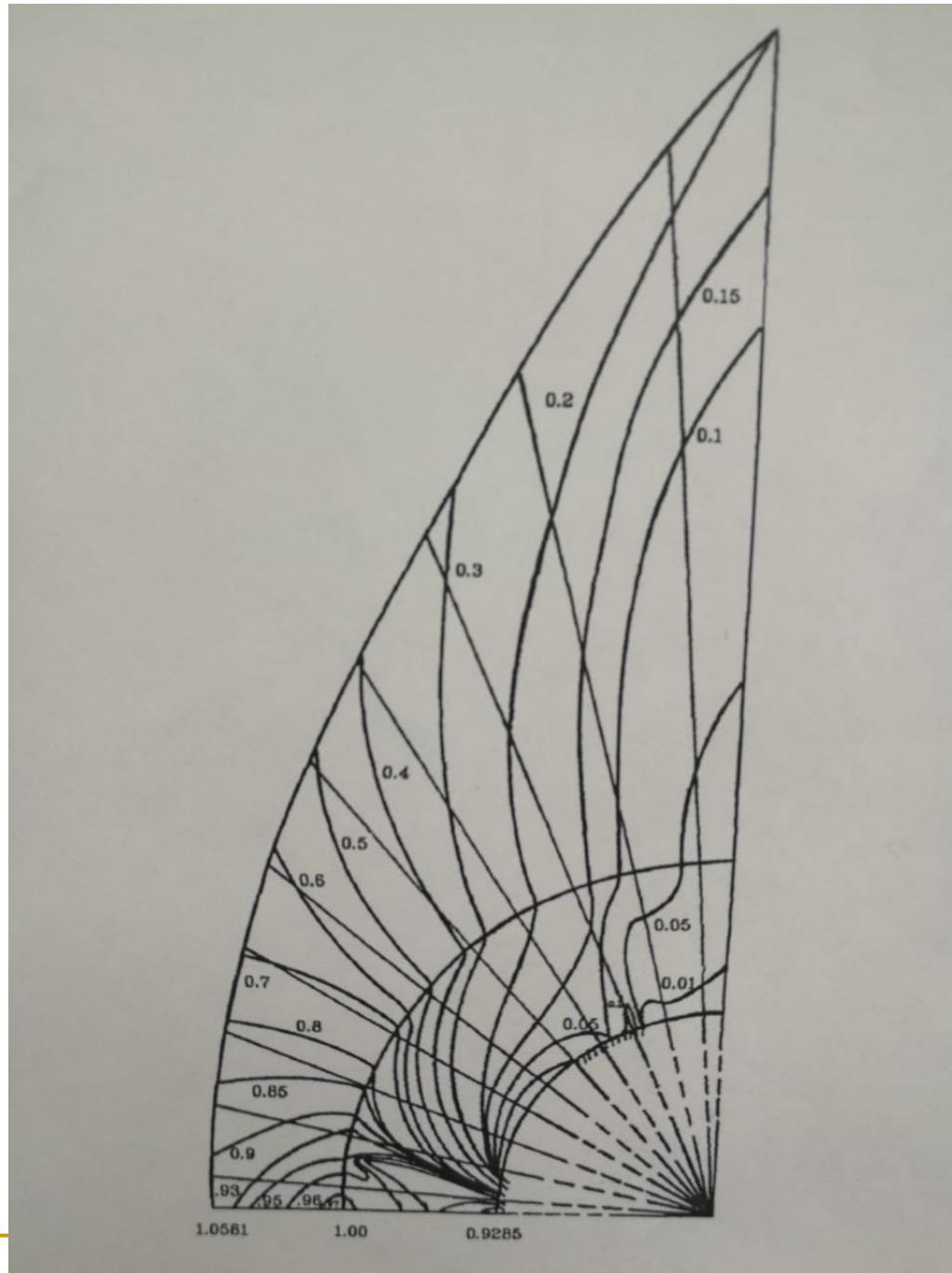
- Геометрия тела: возвращаемый космический аппарат ЦАГИ
- Входные данные:

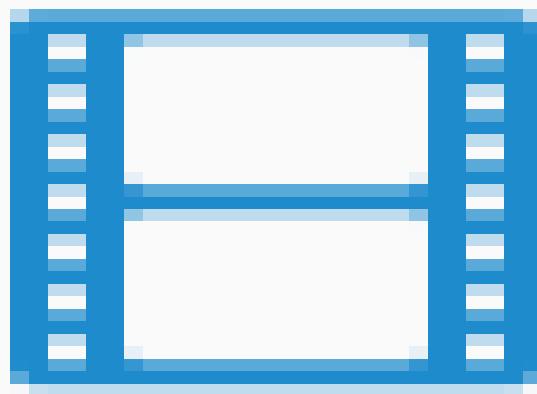
- Высота 70 км
- Число Маха 25
- угол атаки 25 градусов



Цветом показана плотность, линиями – траектории частиц

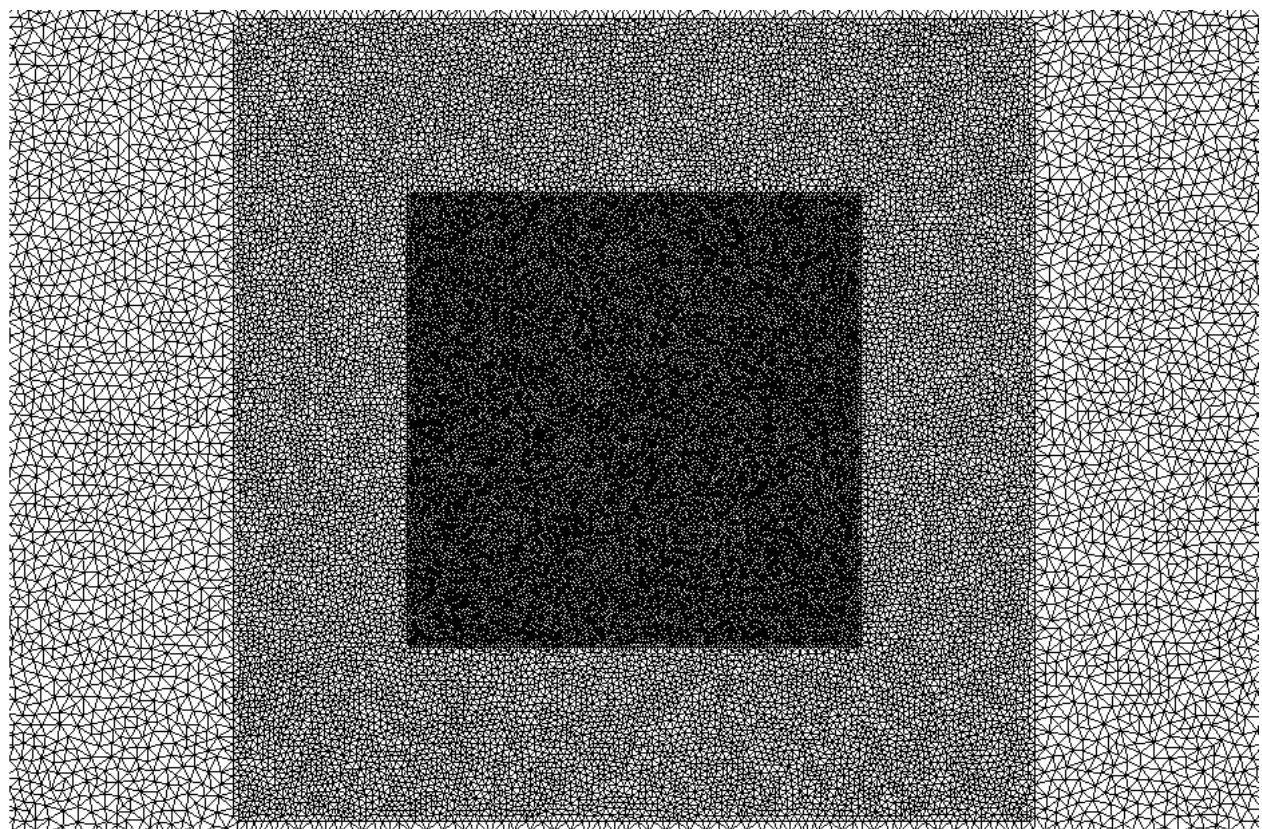
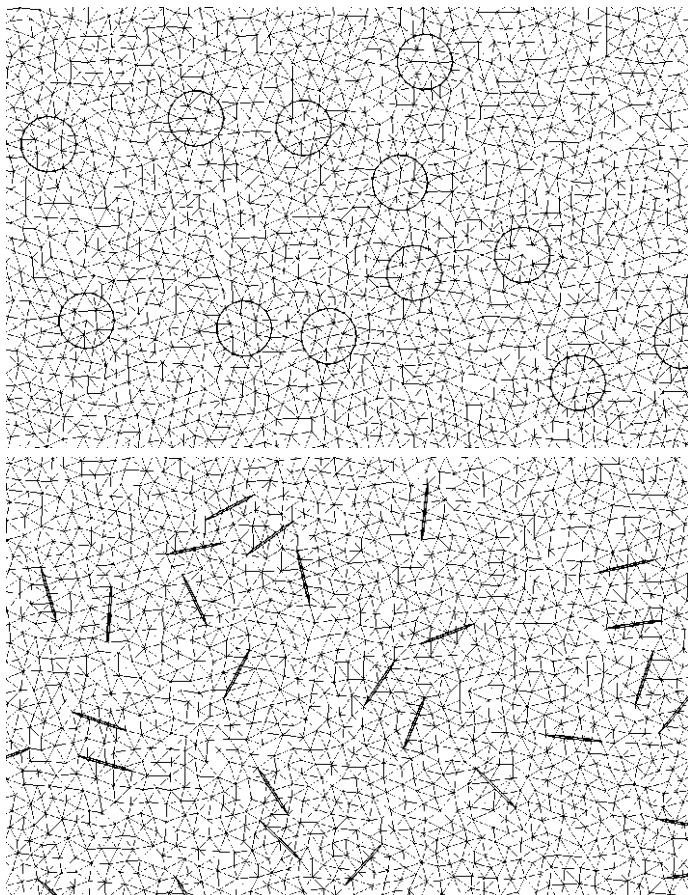
Аэродинамическое давление на оболочку самолета



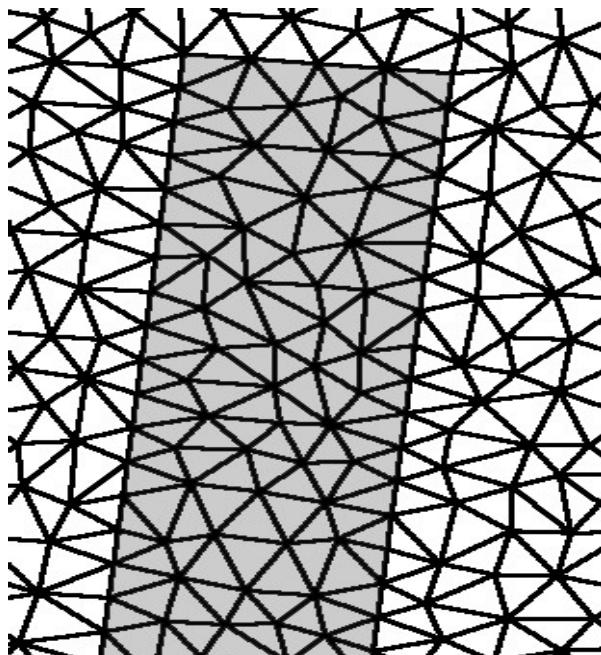


Расчетная сетка

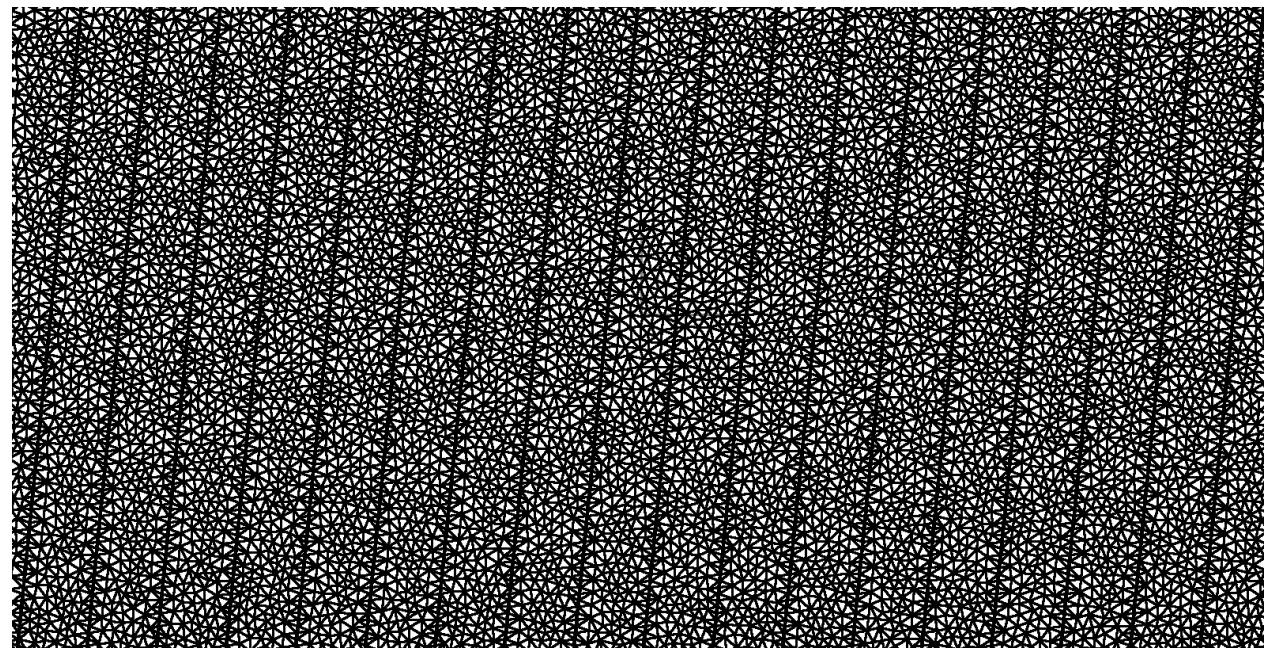
- Тетраэдральная сетка
- Сетки с меняющейся триангуляцией



Моделирование мегатрешины



**Осреднённая
модель**

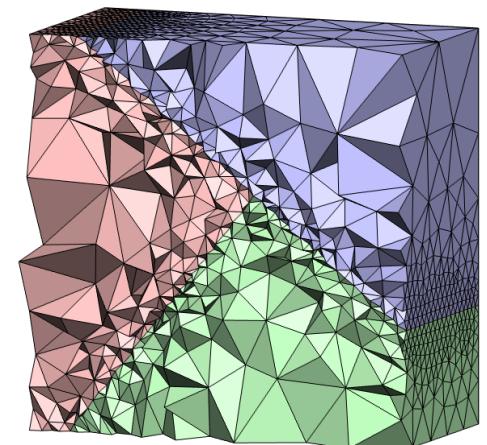
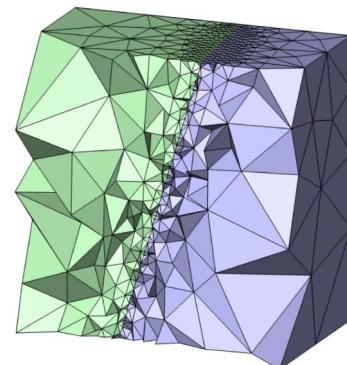
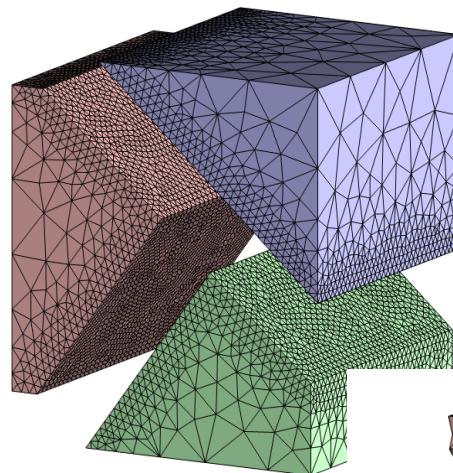
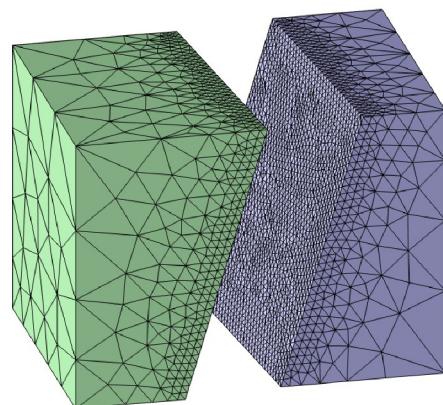


Набор параллельных тонких трещин

Длина прямоугольника 200 м, ширина 10 м

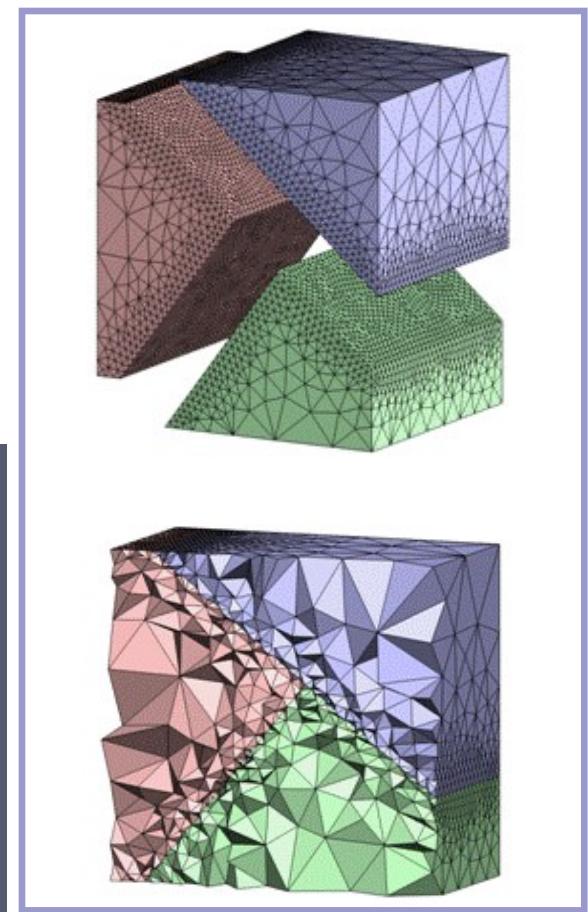
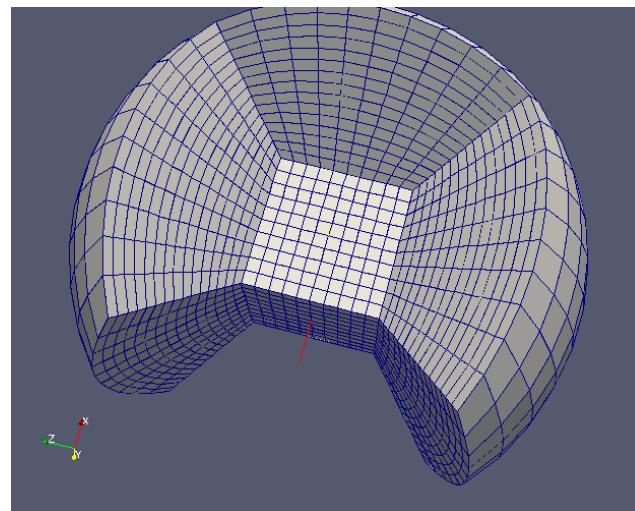
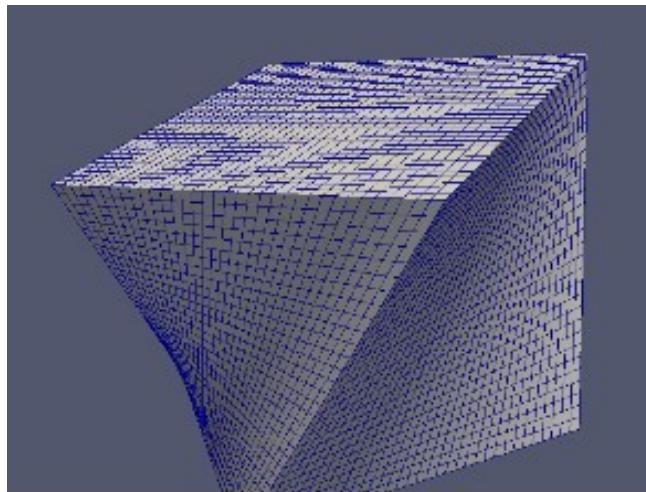
Расчетная сетка

■ Тетраэдральная сетка



Grids

- Curvilinear grids
- Tetrahedral grids



Определяющие уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

1 - Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

2 - Реологические соотношения

Параметры модели:

ρ – плотность среды

λ, μ – упругие параметры Ламе

V – вектор скорости

T – тензор напряжений



Rheology

- Linear elasticity:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = 0.$$

- Viscosity (Maxwell model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{\tau_0}.$$

- Elastoplastic material (Prandtl-Reiss model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{I \mu \sigma_{ij} \sigma_{kl}}{K^2},$$

$$F_{ij} = 0.$$

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2 < 2K^2 \\ 1, & \text{если } S \geq 2K^2. \end{cases}$$

Anisotropy

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = F(x, y, z, t)$$

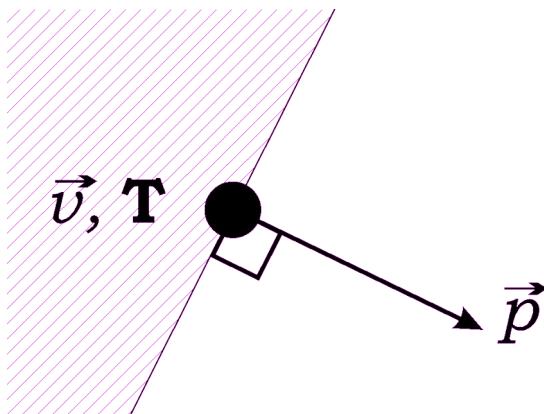
$$\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$$

$$\begin{aligned} 2q_{ijkl} &= c_{ik}\delta_{ij}\delta_{kl} + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{m+3,n+3} |\varepsilon_{mij}| |\varepsilon_{nkl}| + \\ &+ \sum_{m=1}^3 c_{i,m+3} \delta_{ij} |\varepsilon_{mkl}| + \sum_{m=1}^3 c_{m+3,k} |\varepsilon_{mij}| \delta_{kl} \end{aligned}$$

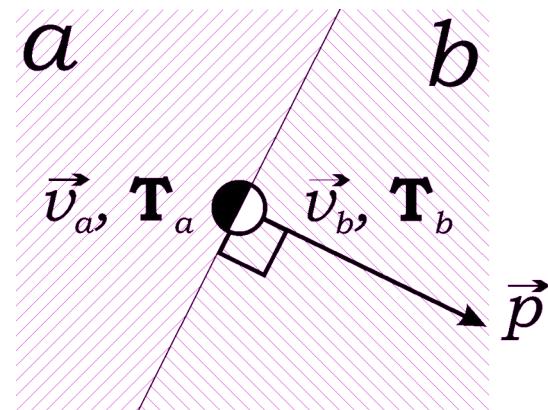
$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}$$

Границные и контактные условия

Внешняя граница



Контактные границы



■ Внешняя сила

$$\sigma p = f$$

■ Скорость на поверхности

■ Смешанные граничные условия

■ Неотражающие граничные условия

Условие слипания

$$v_a = v_b = V, \sigma_a = -\sigma_b$$

Условие скольжения

$$v_a \cdot p = v_b \cdot p, \sigma_a^a = -\sigma_b^b, \sigma_a^a = \sigma_b^b = 0$$

Контакт между жидкостью и твердым телом

Uniform linear transport equation

- Let's start our discussion from the simplest hyperbolic equation

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda = \text{constant} > 0 \\ u(0, x) = u^0(x), \quad u(t, 0) = u^1(t) \end{cases}$$

- Its solution at an arbitrary point is

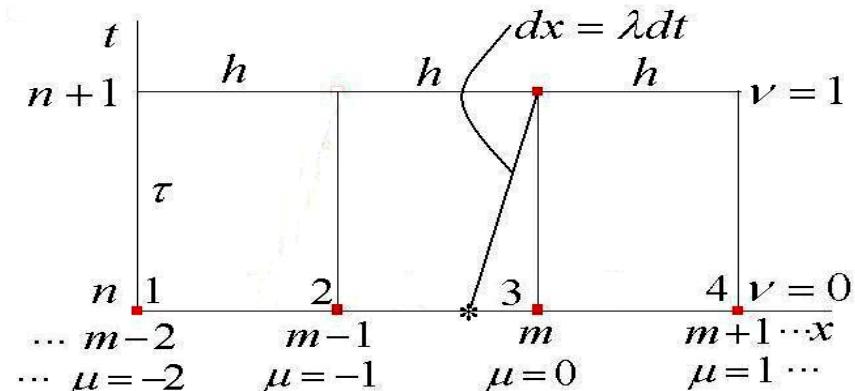
$$\begin{cases} u(t, x) = u^0(x - \lambda t) = u_*, \quad \text{if } x - \lambda t \geq 0 \\ u(t, x) = u^1(t - x / \lambda) = u_*, \quad \text{if } x - \lambda t < 0 \end{cases}$$

- Thus, $u(t, x) = u_*$ is the constant along the characteristic:

$$dx = \lambda dt$$

- There are a lot of the difference schemes for this equation which can be written in the common form:

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_\mu^\nu(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu}, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad \nu = 1, 0, -1, \dots,$$



Approximation conditions and monotonicity

- For all difference schemes:
- We can write the approximation conditions ($\sigma = \lambda\tau/h > 0$):

1st order $\sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\tau, h) = 1, \quad \sum_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma) \alpha_\mu^\nu(\tau, h) = -\sigma$
-
and higher $\sum_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma)^k \alpha_\mu^\nu = -(-\sigma)^k, \quad k = 2, 3, \dots$
-

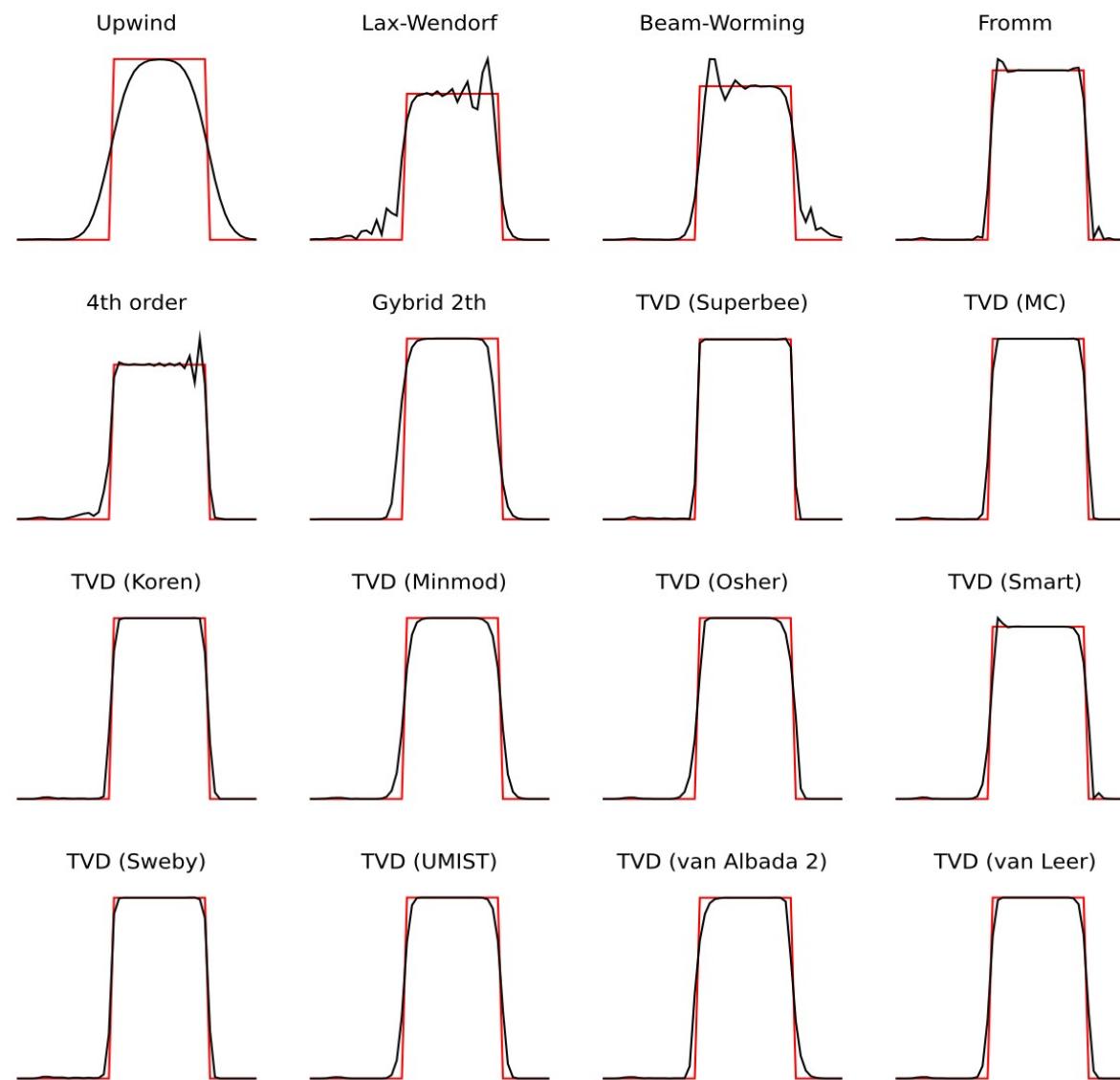
- There are a lot of monotonicity criteria:

Friedrichs - $\alpha_\mu^\nu(\tau, h) \geq 0$

Harten - $TV(u^{n+1}) = \sum_m |u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}| \leq \sum_m |u_{m+1}^n - u_m^n| = TV(u^n)$

Van Leer -
$$\begin{cases} \min\{u_m^n, u_{m-1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max\{u_m^n, u_{m-1}^n\}, & \text{if } 0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1 \\ \min\{u_m^n, u_{m+1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max\{u_m^n, u_{m+1}^n\}, & \text{if } -1 < \sigma = \lambda\tau/h < 0 \end{cases}$$

Тестовые расчёты (одномерная задача)



Grid-characteristic method

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = F(x, y, z, t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} &= \vec{f}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Omega}$$

$$\vec{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \vec{u}$$
$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = 0$$

