

# Компьютерное моделирование динамических процессов в неоднородных деформируемых средах

Чл.-корр. РАН      Петров И.Б





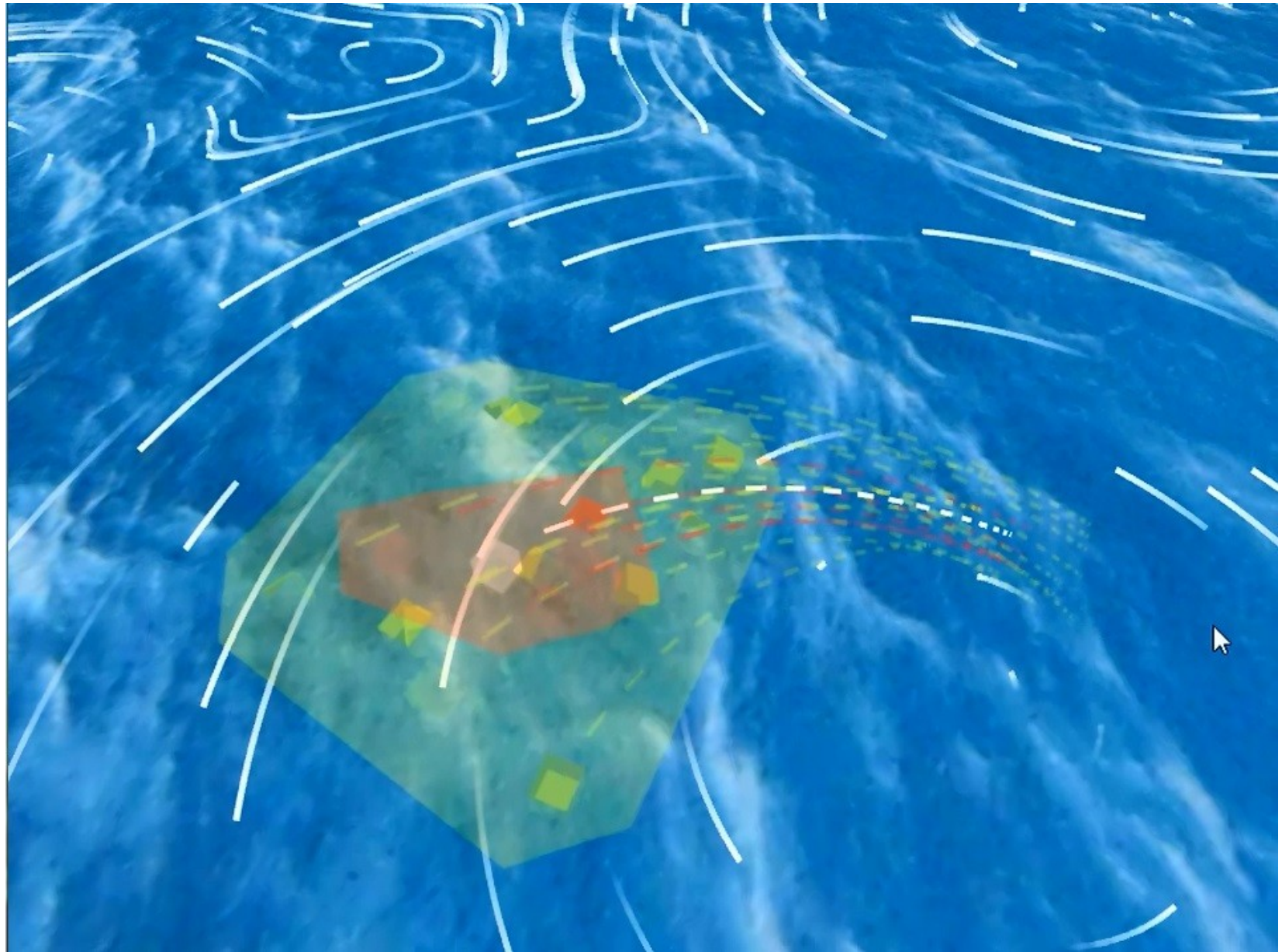
## **Вычислительные задачи Арктики**

1. Прямые и обратные задачи сейсморазведки. Задачи миграции и инверсии.
2. Прямые и обратные задачи электроразведки;
3. Комплексные задачи сейсмо- и электроразведки;
4. Расчет механических и прочностных характеристик льда, как твердого деформируемого тела;
5. Задачи миграции (дрейфа) крупных ледовых образований (КЛО);
6. Задачи безопасности морских стационарных ледостойких платформ (МСЛСП) и плавающих (якорных) платформ нефтегазовой промышленности при воздействии природных факторов (ЛО);
7. Задачи заторашивания МСЛП;
8. Моделирование процессов образования КЛО;
9. Расчет на прочность нефтегазо-проводов, наземных и поддонных;
10. Проблемы безопасного плавания судов ледового класса при наличии КЛО;
11. Посадка самолета на плавающую льдину (ледовое поле).

12. Расчет на прочность ледового покрытия при движении по нему транспортных средств.
13. Воздействия периодических и сейсмических нагрузок на технические сооружения в Арктике.
14. Климатические задачи Арктики.
15. Прогнозирование динамики ледовой обстановки с учетом обработки данных наблюдений в воздушном и водном бассейнах Арктики.
16. Обнаружение “метановых бомб” на Ямале.
17. Задачи геомеханики (расчет локализации контактных поверхностей в геологических средах).
18. Определение положения газоносных слоев вблизи скважины (задачи безопасности скважин).
19. Расчет поля температур в КЛО с учетом фазовых переходов, солнечной радиации и разрушения льда при их движении в Северных морях.
20. Расчет жизненного цикла ледового острова с учетом тепловых, радиационных и механических нагрузок.
21. Проблема связи в Арктической зоне РФ.
22. Проблема жизнеобеспечения в условиях низких температур.







# Фотография повреждений корабля

*R.E. Gagnon, J. Wang* Numerical simulations of a tanker collision with a bergy bit incorporating hydrodynamics, a validated ice model and damage to the vessel // Cold regions. Science and Technology, 2012.

















Алексей Добродеев сейчас на главном экране

Meet - bvq-ufsm-tkc

Николай Н  
и еще 3 чел



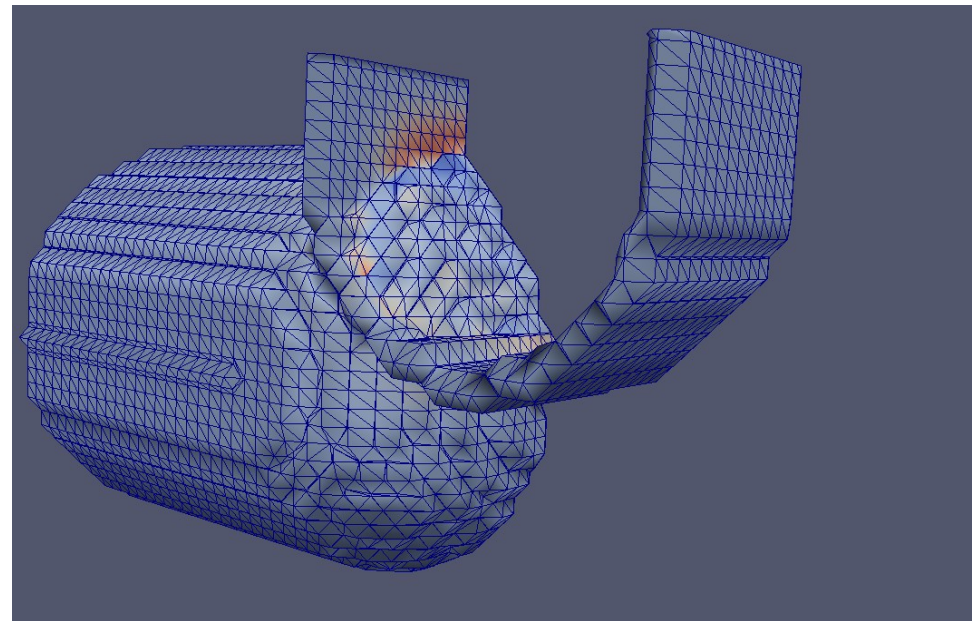
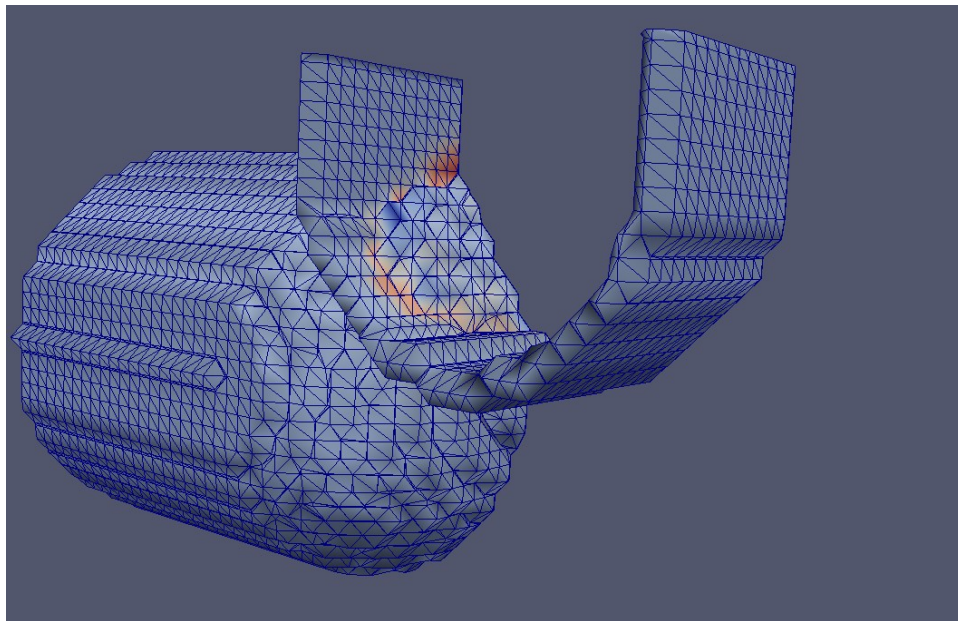
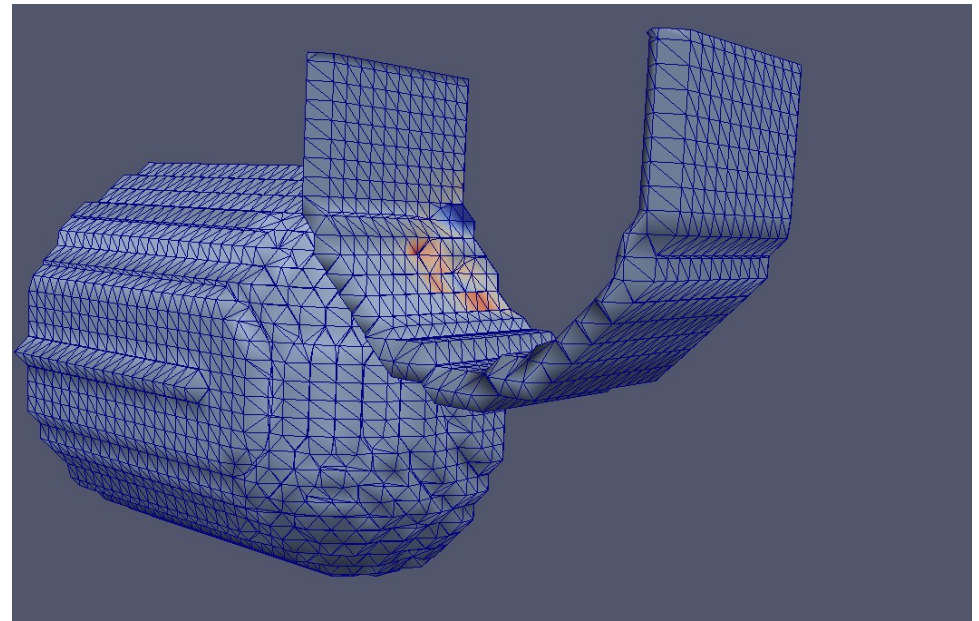
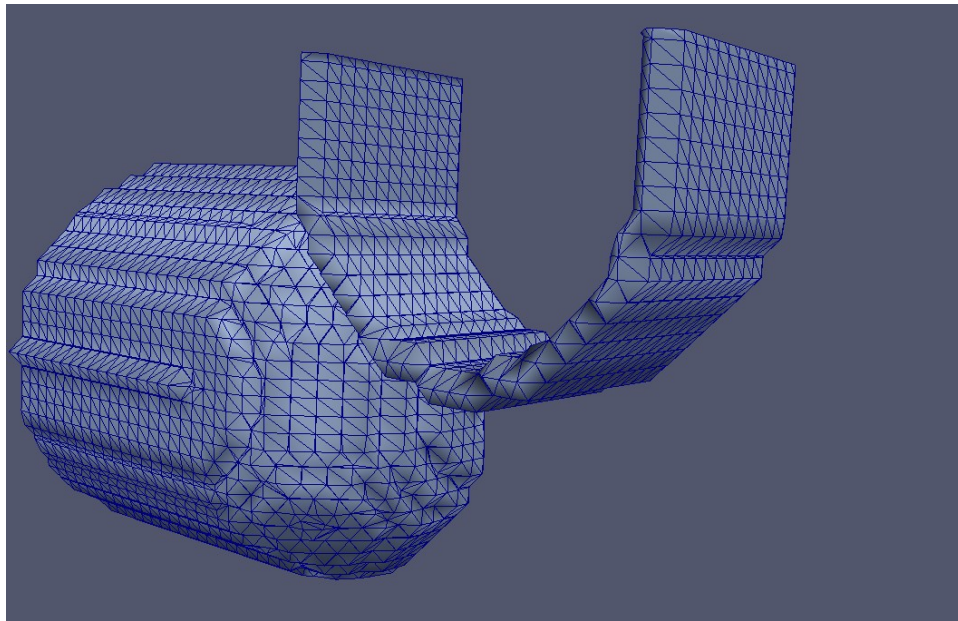
Крыловский  
государственный  
научный центр

## 27. Моделирование движения в ледовом канале

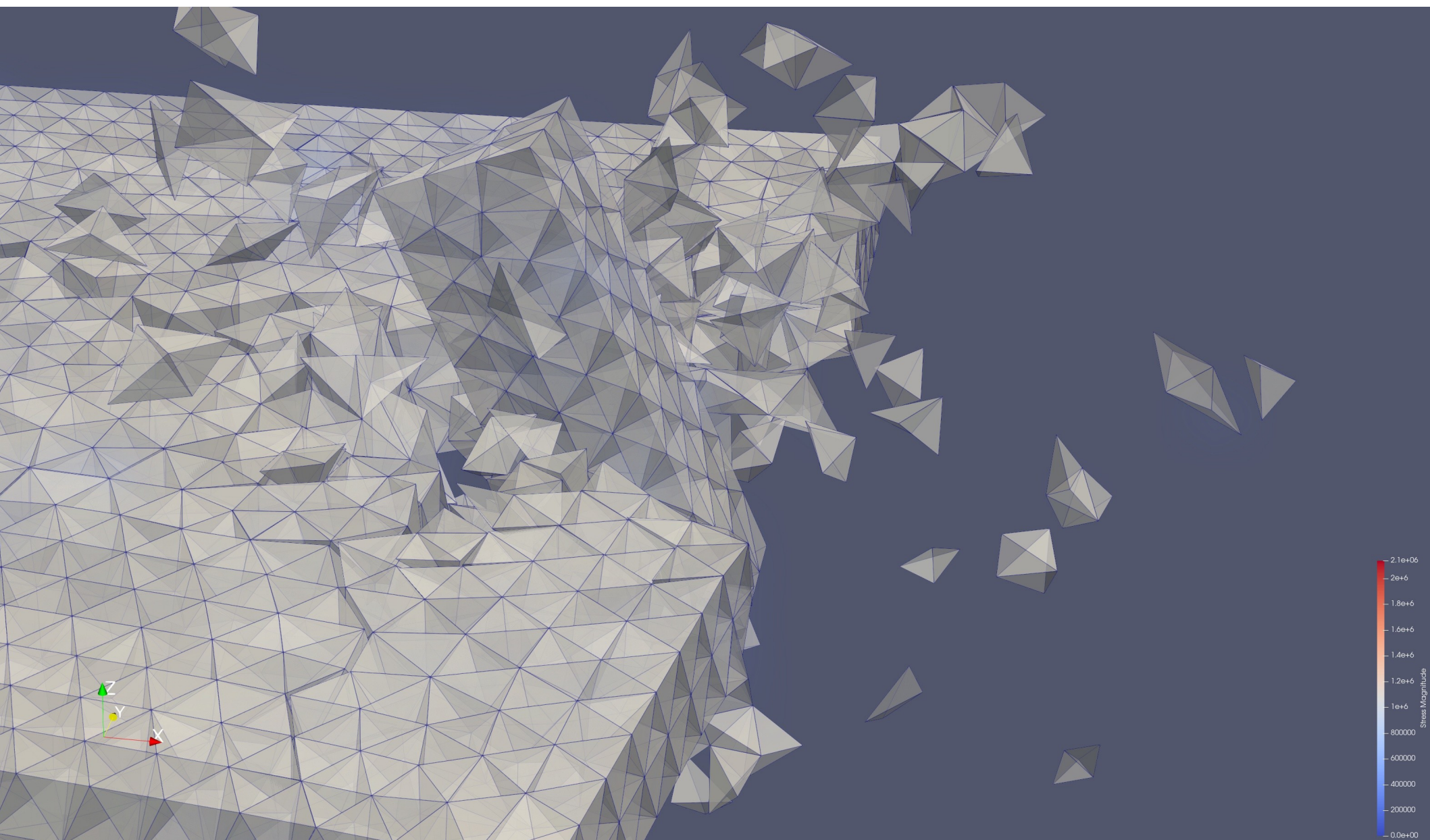




# Столкновение ледокола с торосом

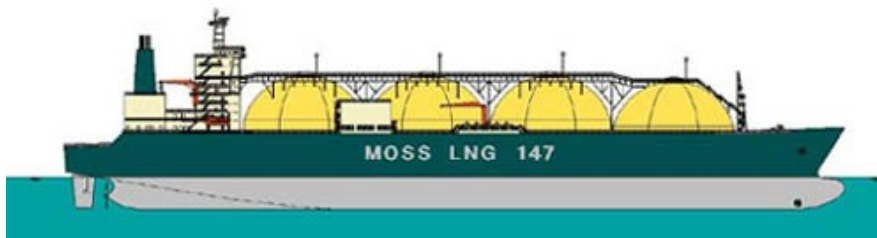






# Моделирование столкновения танкера с причалом

Институт автоматизации проектирования РАН. Н/рук. темы д.ф.-м.н. В.Л.Якушев



Сжиженный газ (Liquefied Natural Gas - LNG) привлекает внимание как источник экологически чистой энергии, который может быть доставлен по морю в различные страны, но вместе с тем представляет серьезную угрозу при катастрофах.

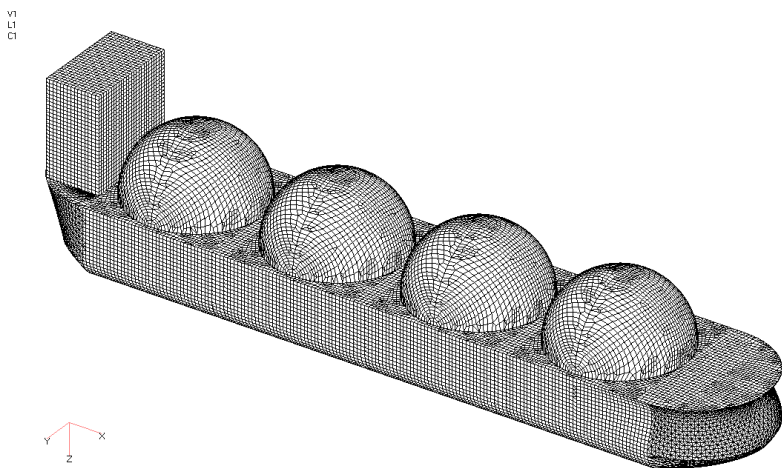


РИС. 1. Конечно-элементная модель танкера.

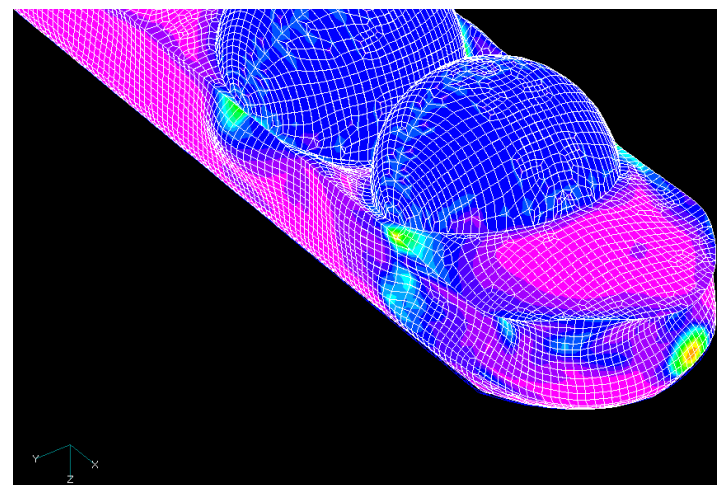
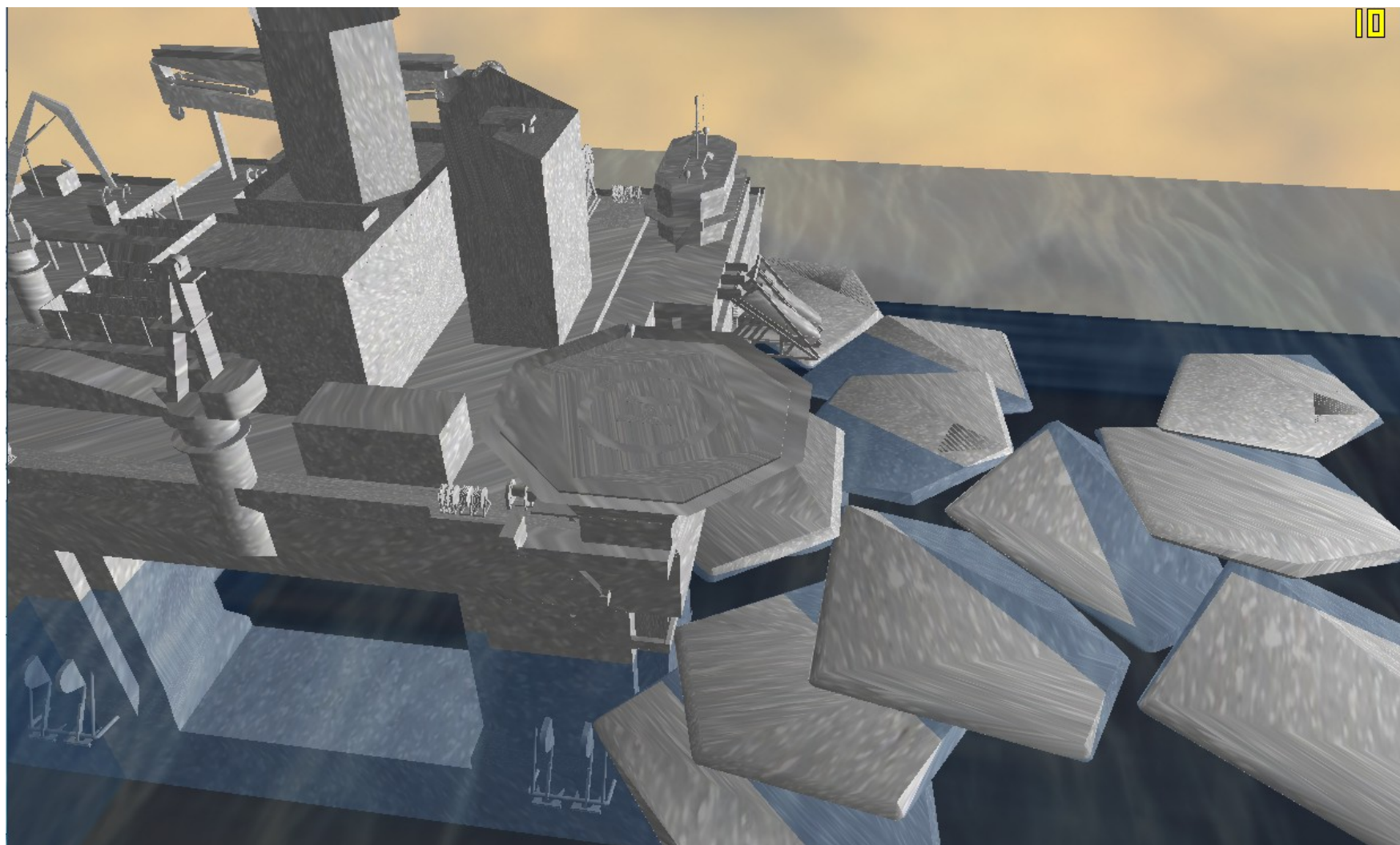


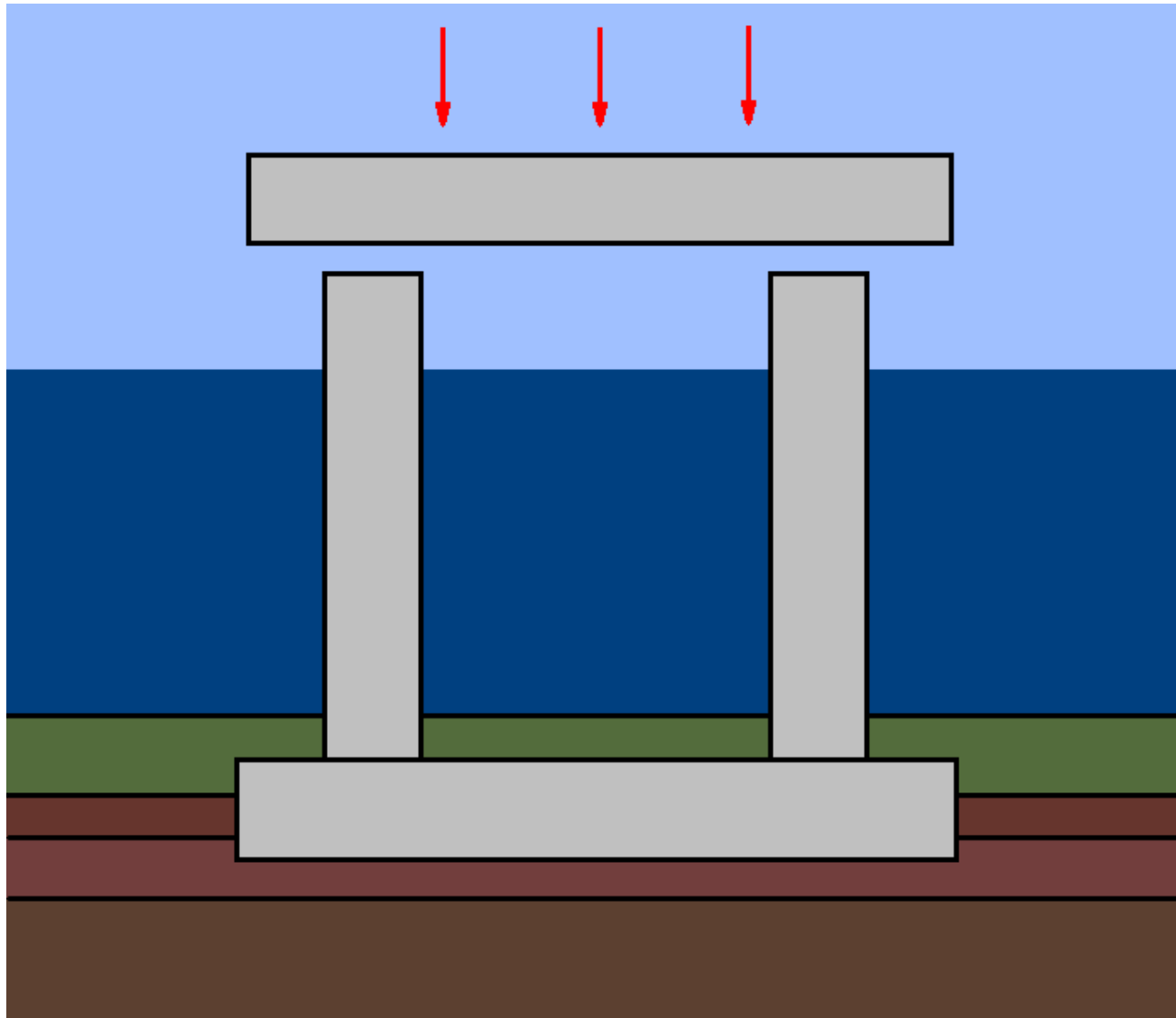
РИС. 2. Распределение напряжений при ударе.



# Торосы и нефтедобывающая платформа



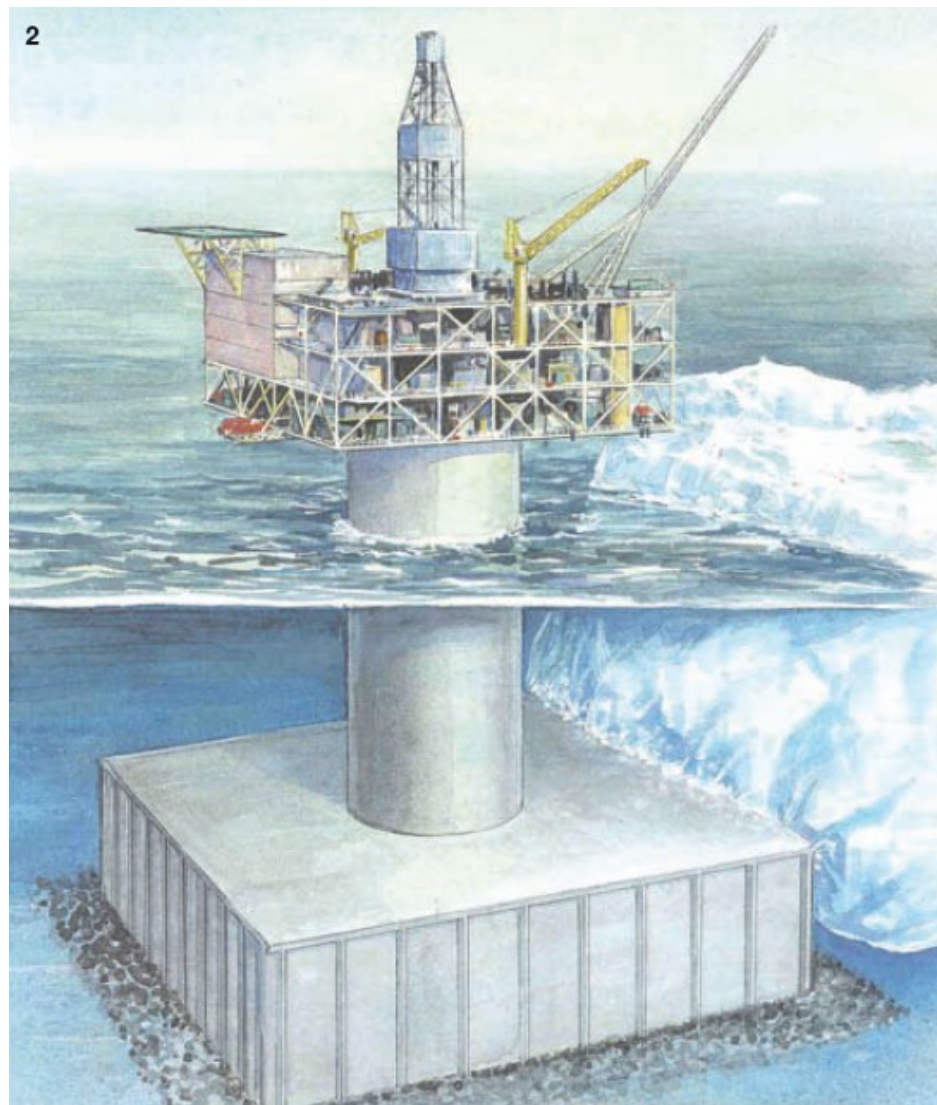
The calculation of the stress-strain state of the props of oil-extracting platform in a heterogeneous ground during installing this platform







# Столкновение айсберга со стационарной нефтедобывающей платформой



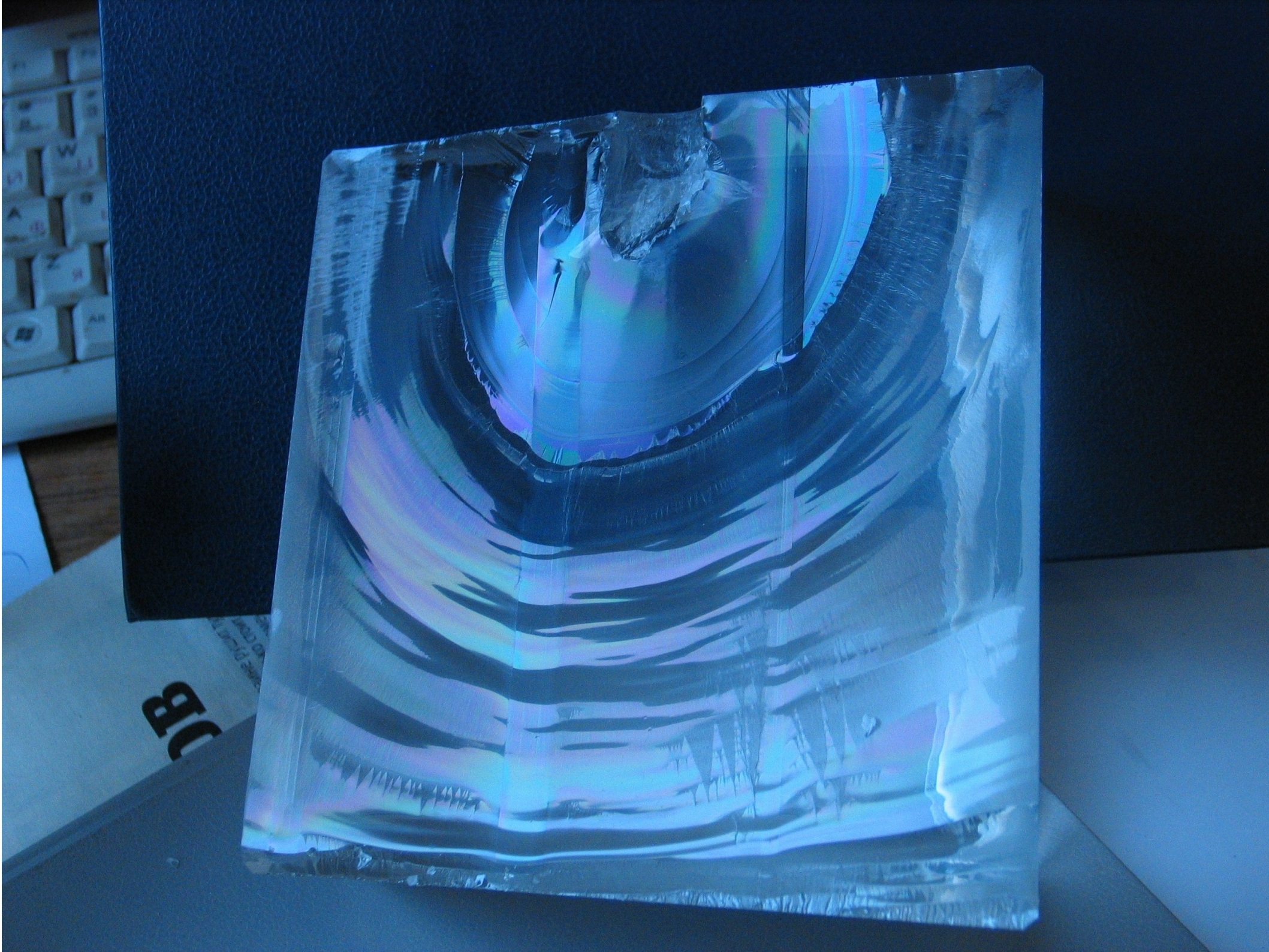












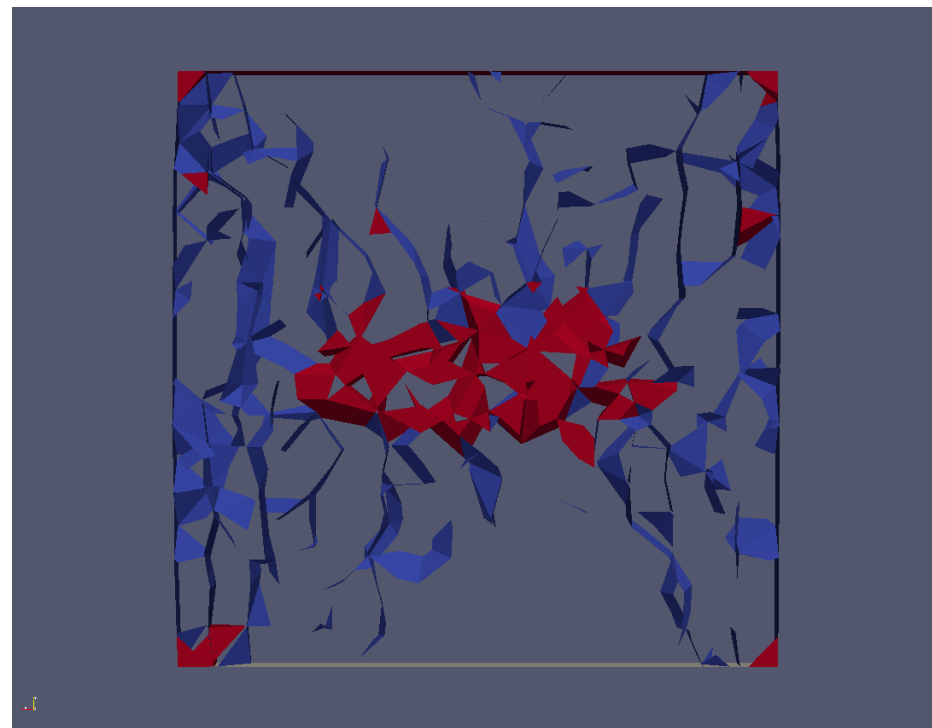
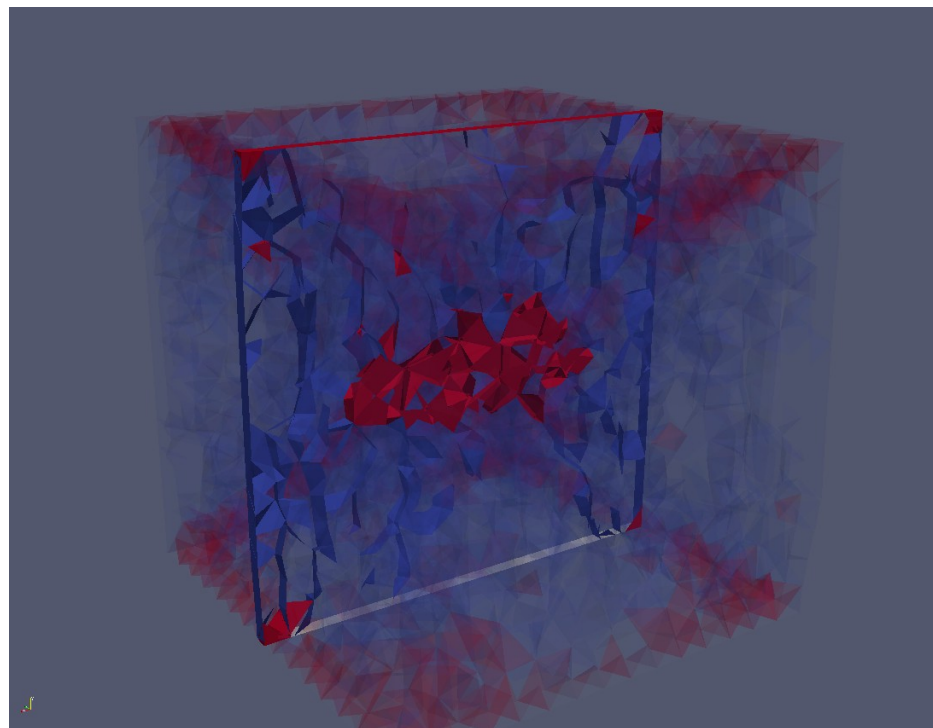


# Численное моделирование экспериментов по исследованию прочностных характеристик льда





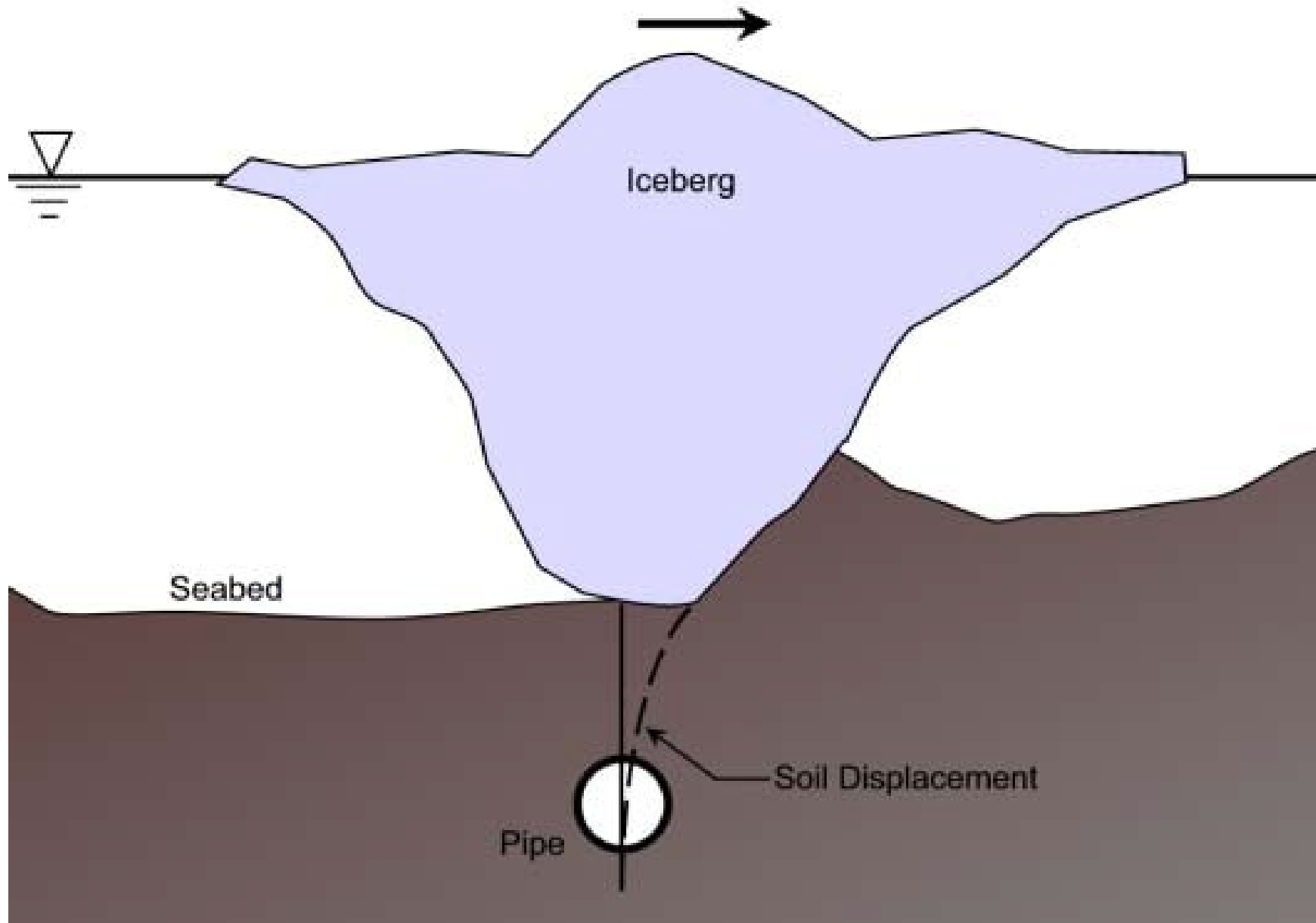
# Сечение картины разрушений ледяного образца





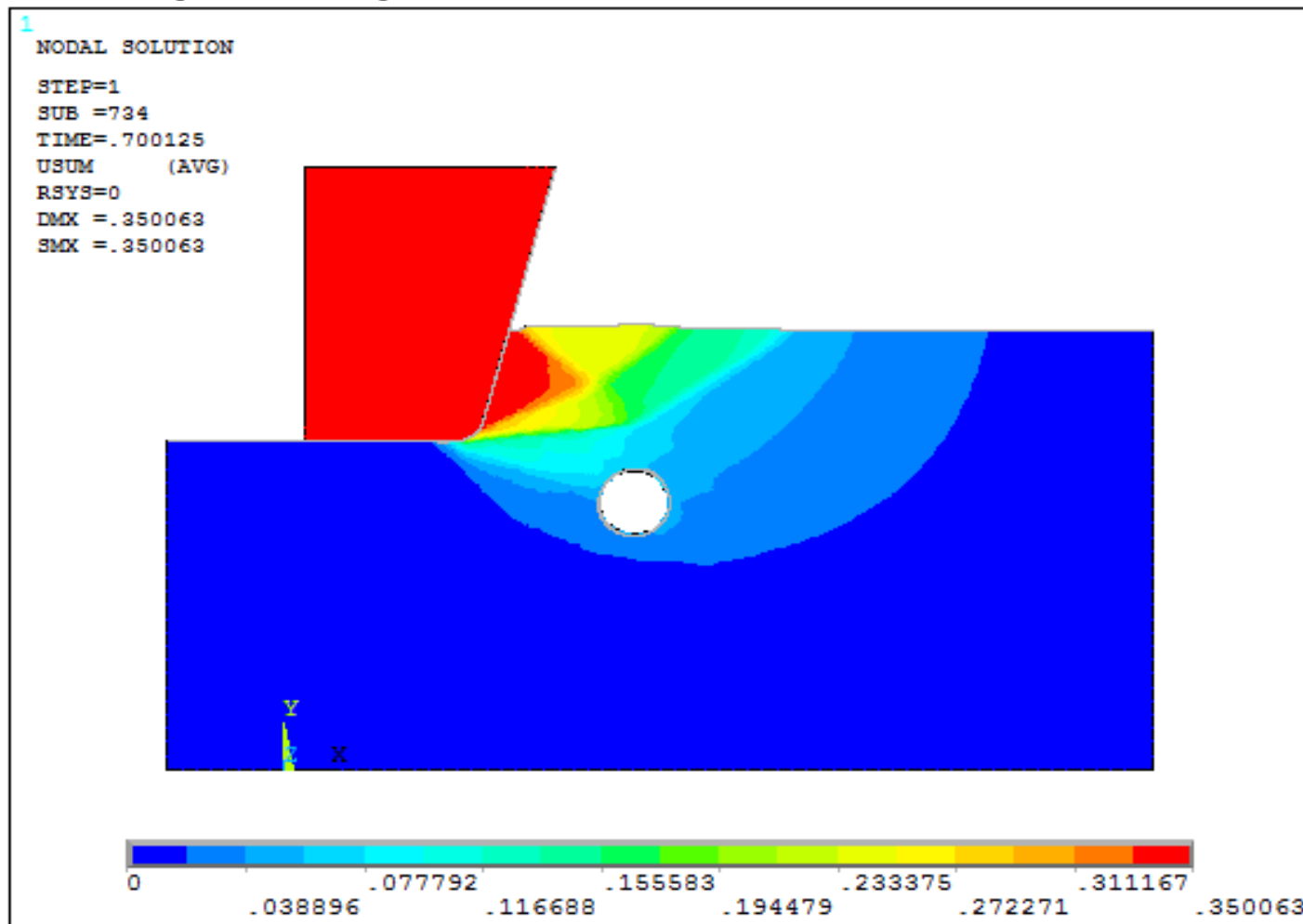


Задача несколько сложнее, так как труба под слоем грунта: 1) киль деформирует грунт и передает деформацию через грунт (не доставая трубы);  
2) киль деформирует грунт, затем задевает трубу;



# 2-D model of the ice hummock keel's impact on deepened pipeline

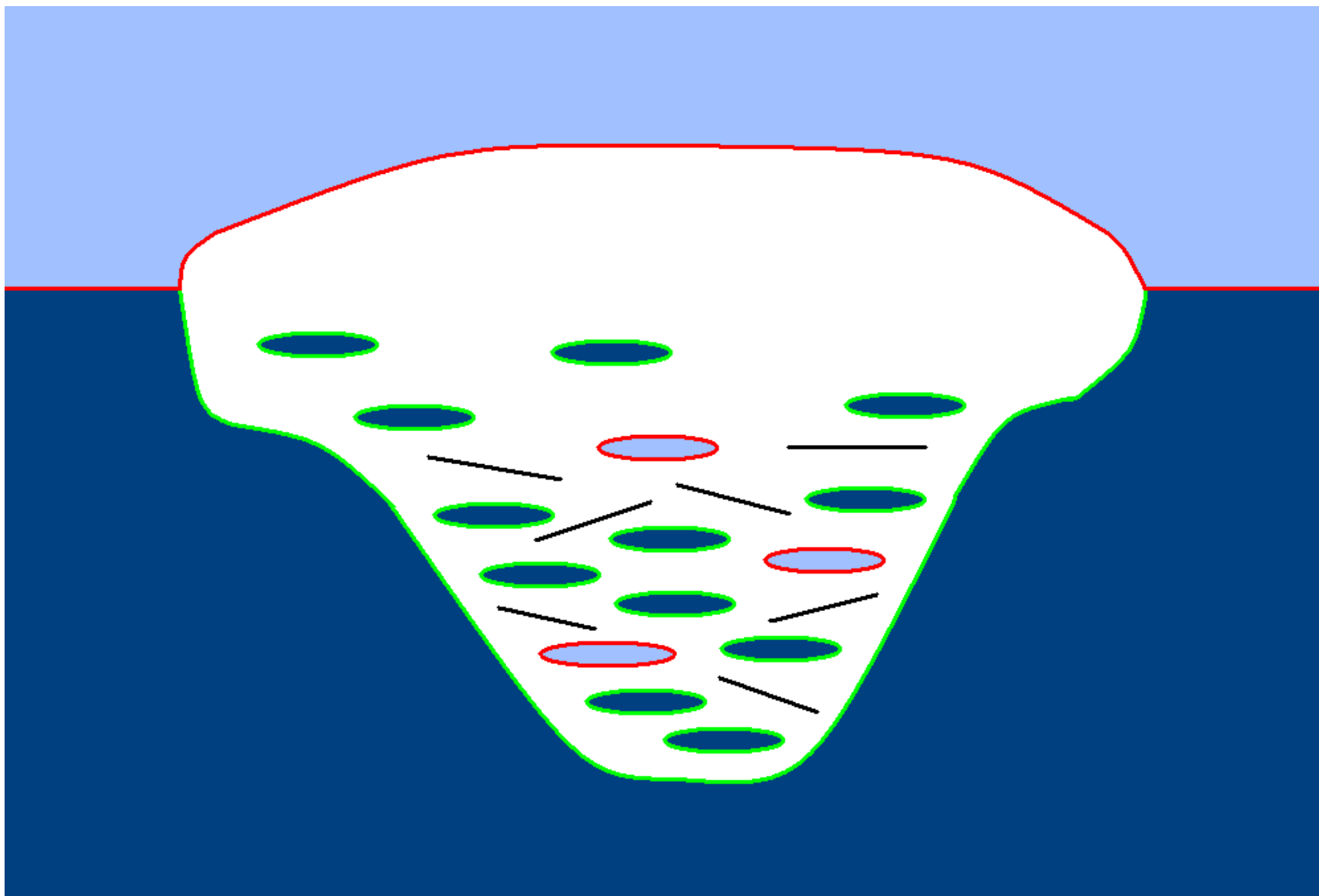
*M.A. Naumov, D.A. Onishchenko, Presentaion*  
Gazprom VNIIGAZ LLC



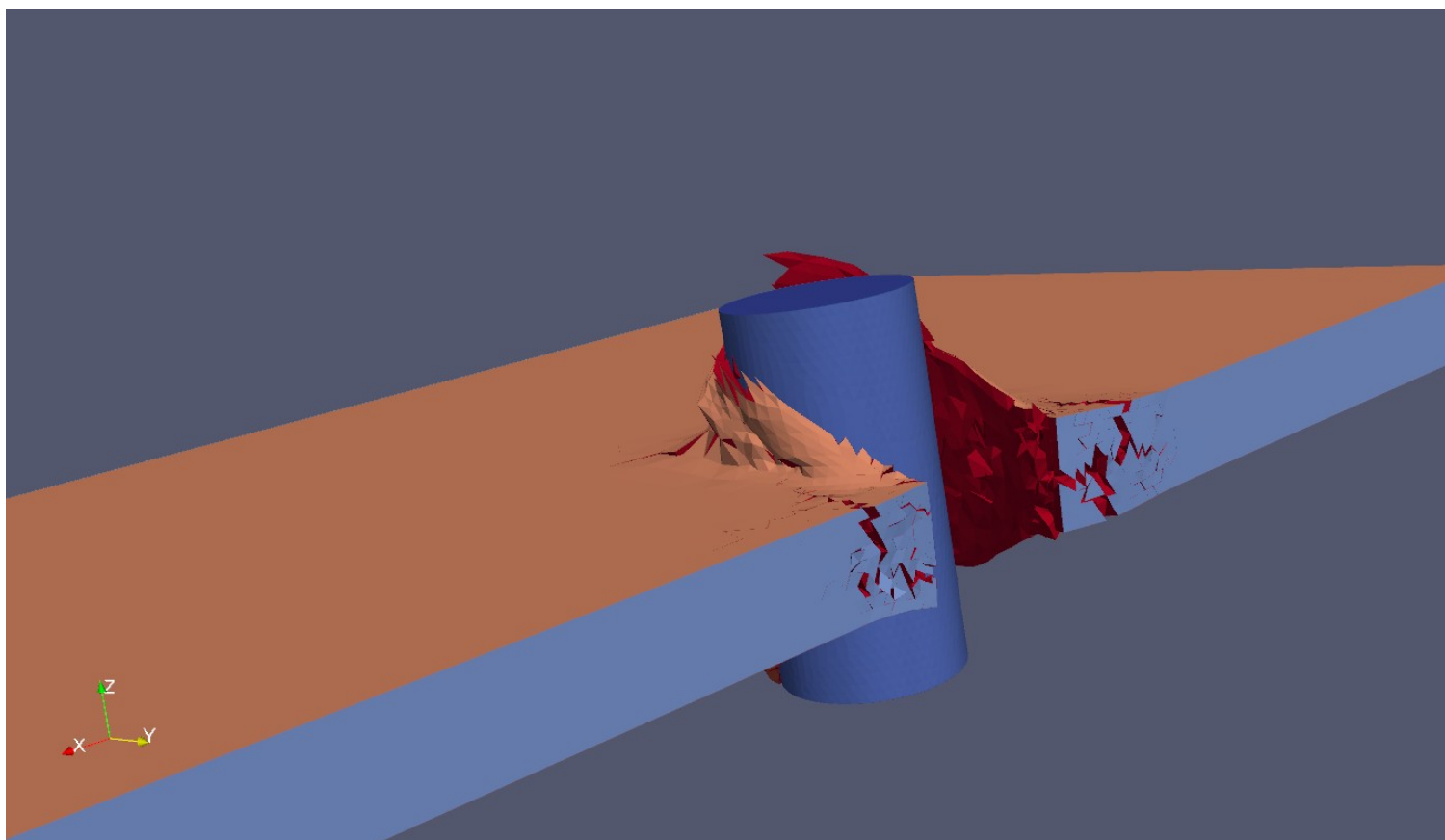
Module offset distribution, m



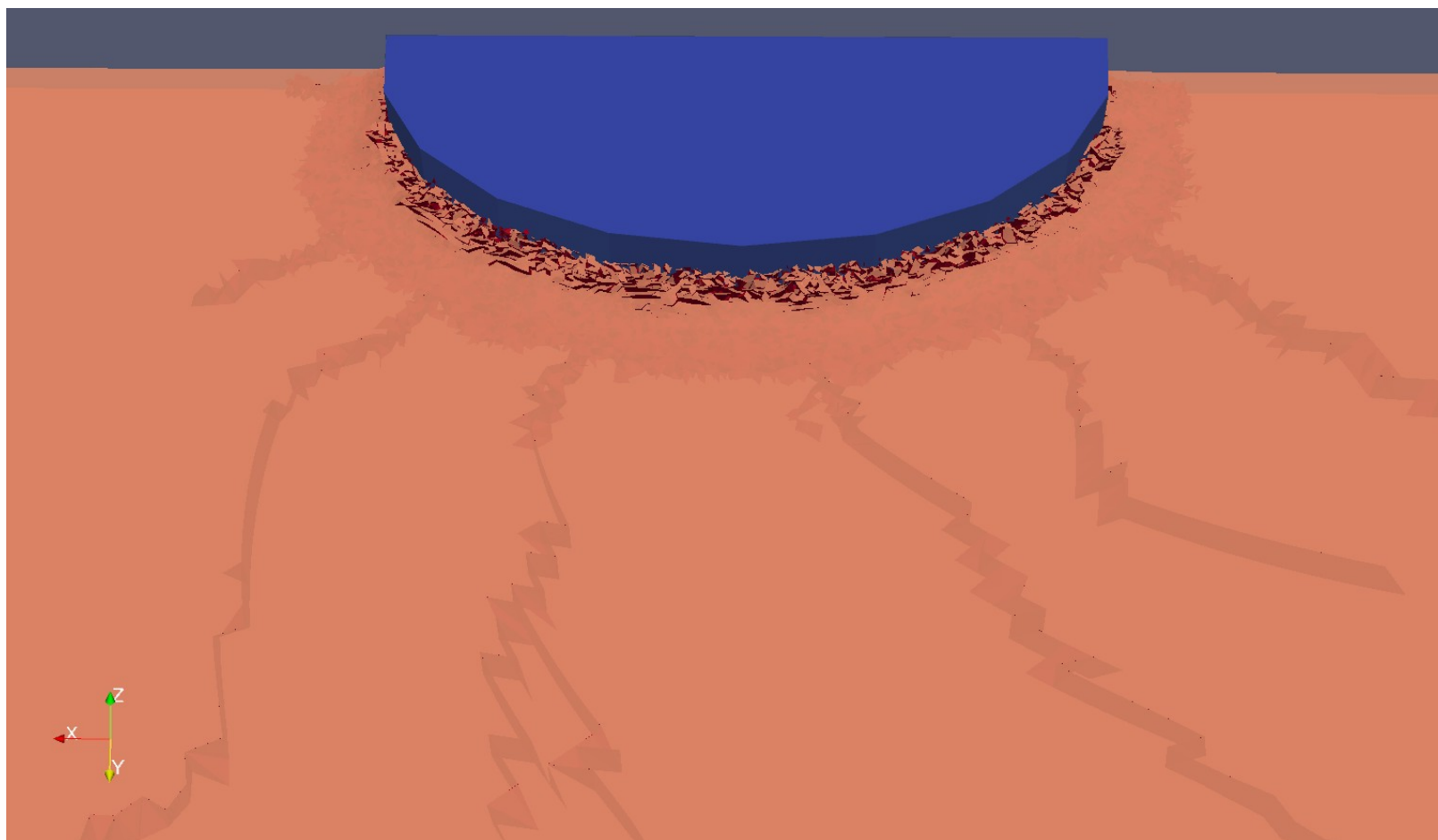
Ледяное тело заданной формы с заданным распределением водонасыщенных и газонасыщенных полостей и трещин



# Прорезание стойки платформы ледяным полем

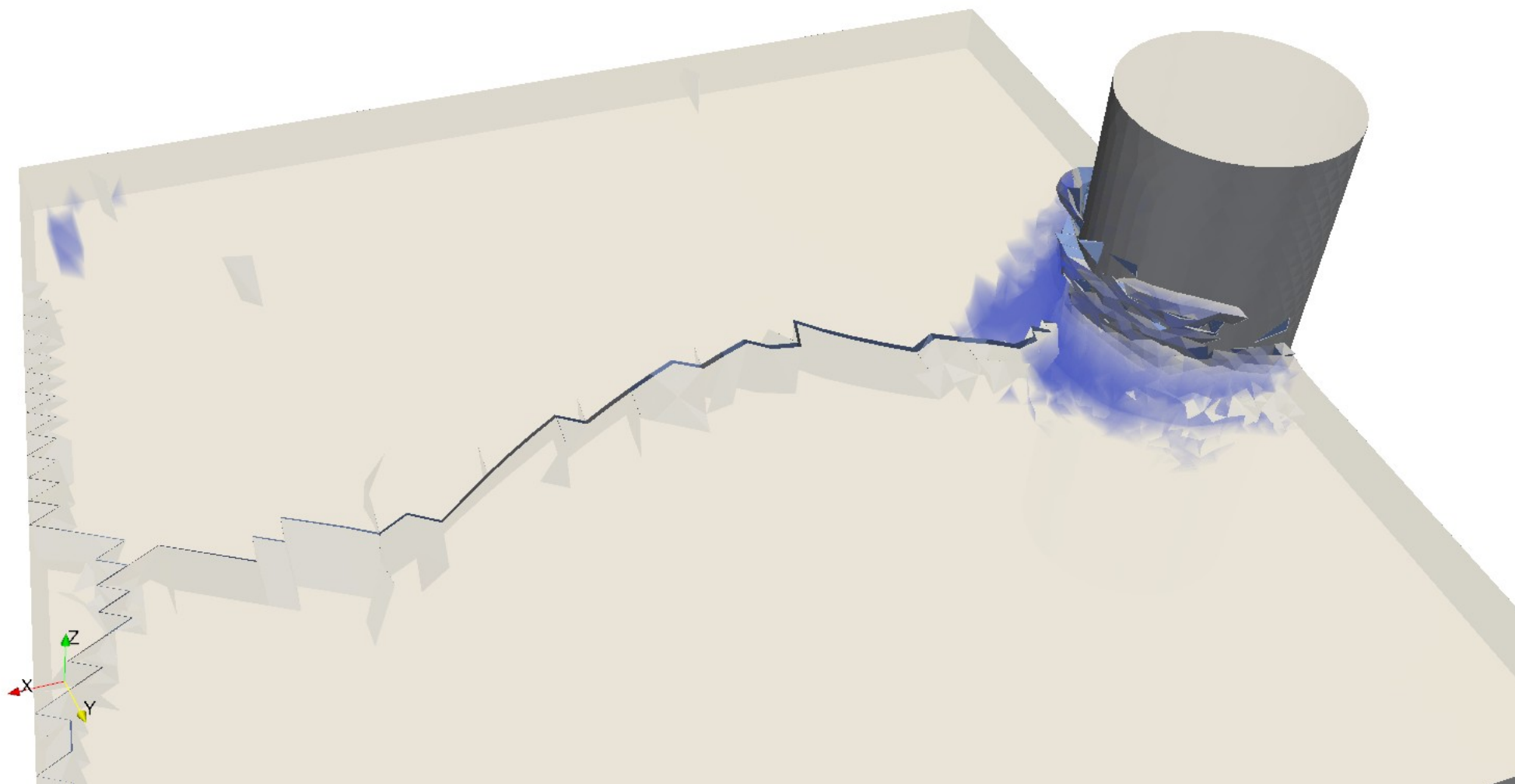


# Прорезание стойки платформы ледяным полем

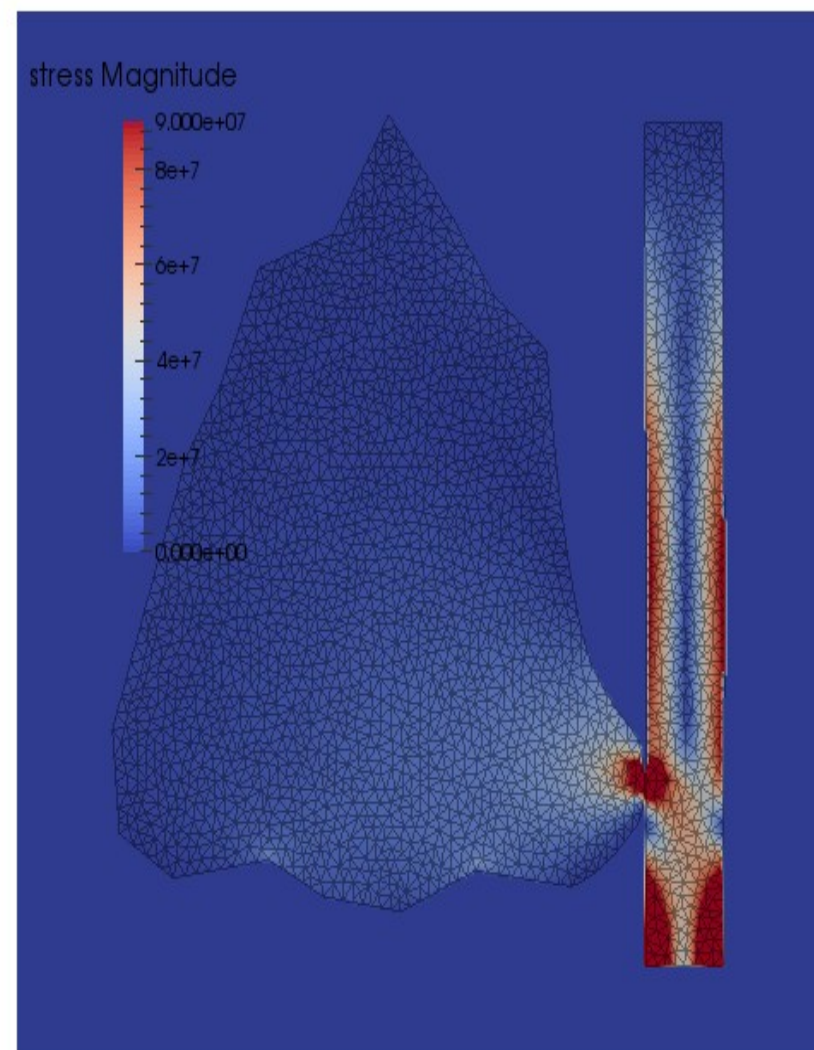
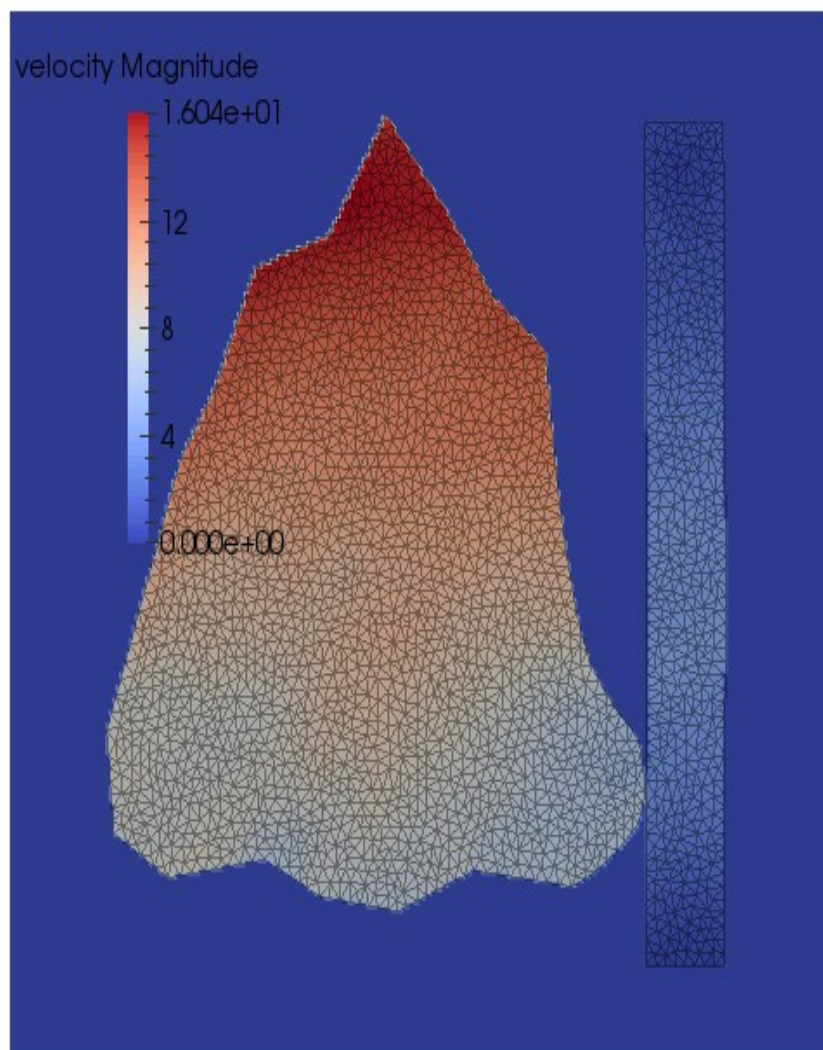


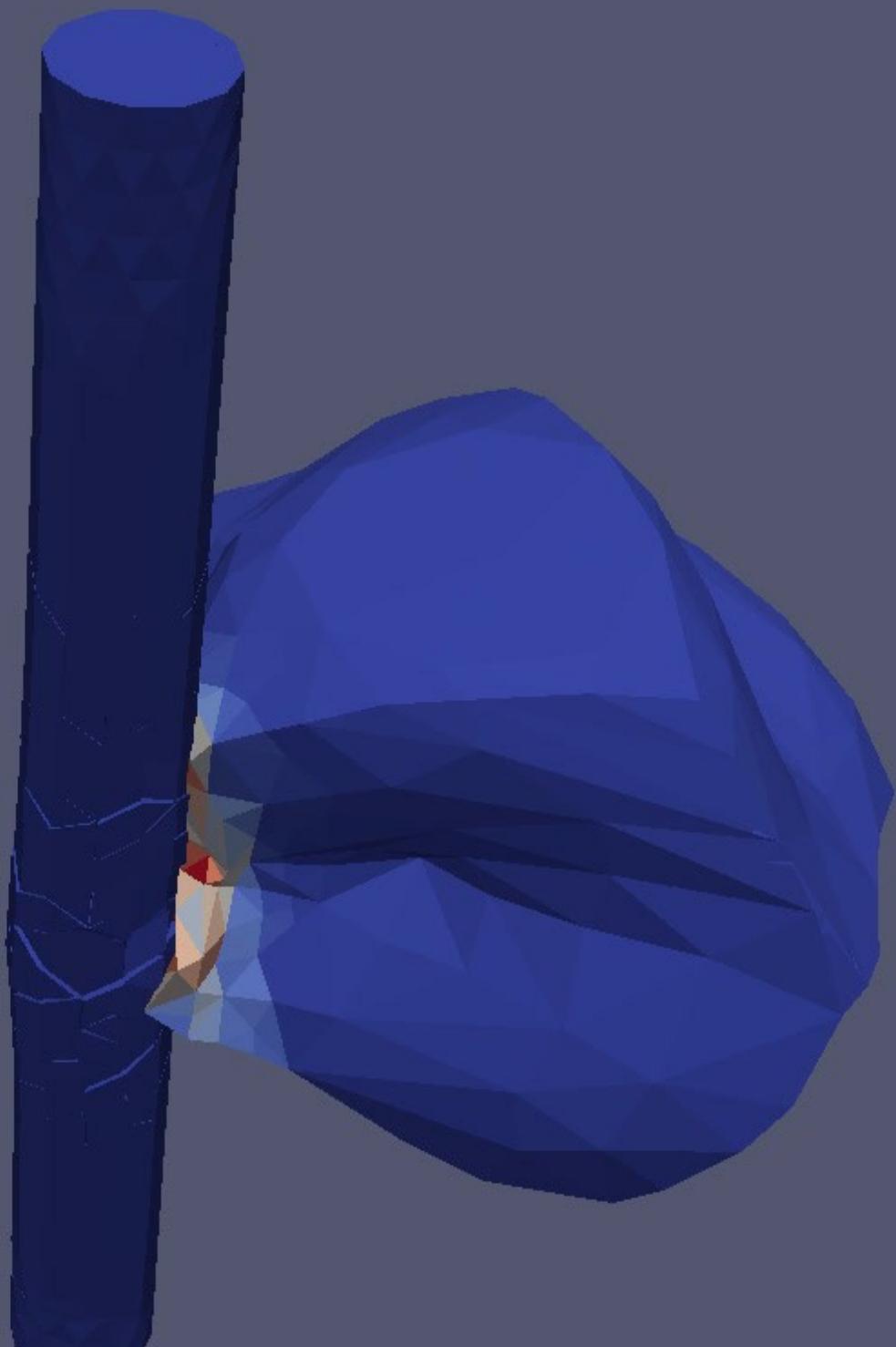


# Соударение ледяного массива со стойкой нефтедобывающей платформы



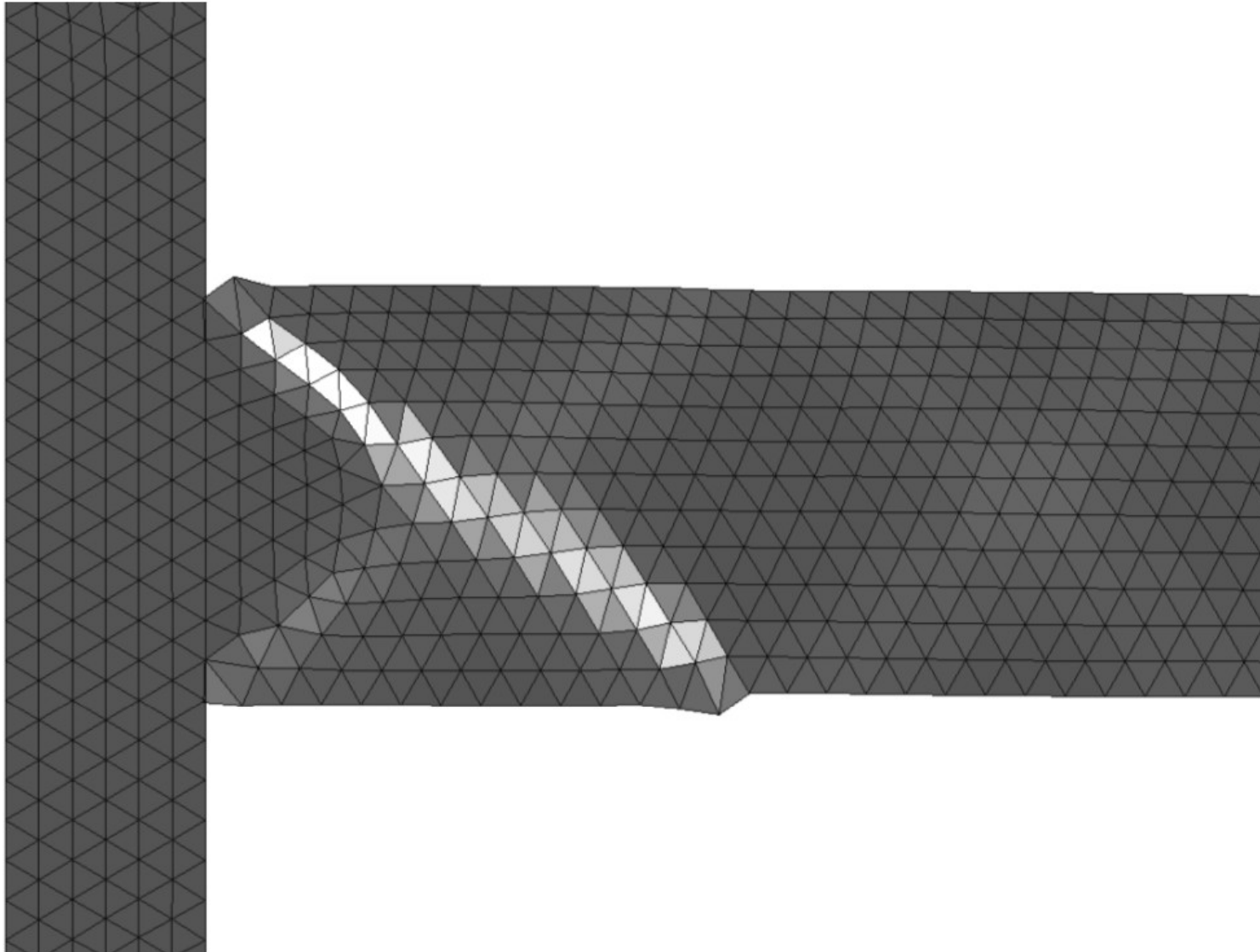
# Столкновение айсберга со стойкой стационарной нефтедобывающей платформы





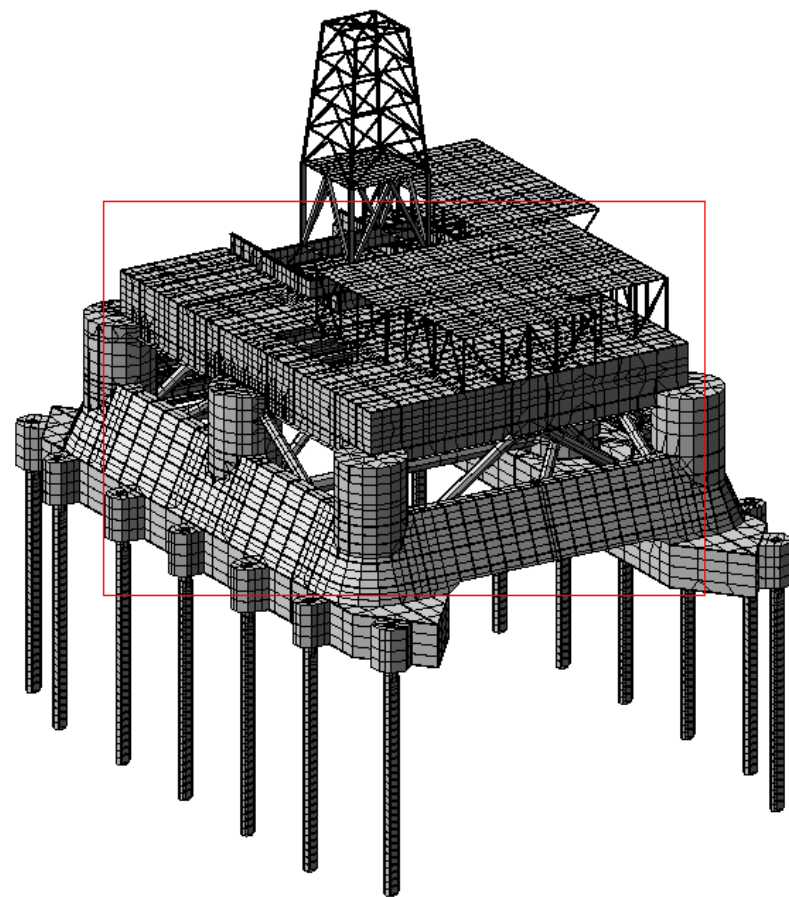
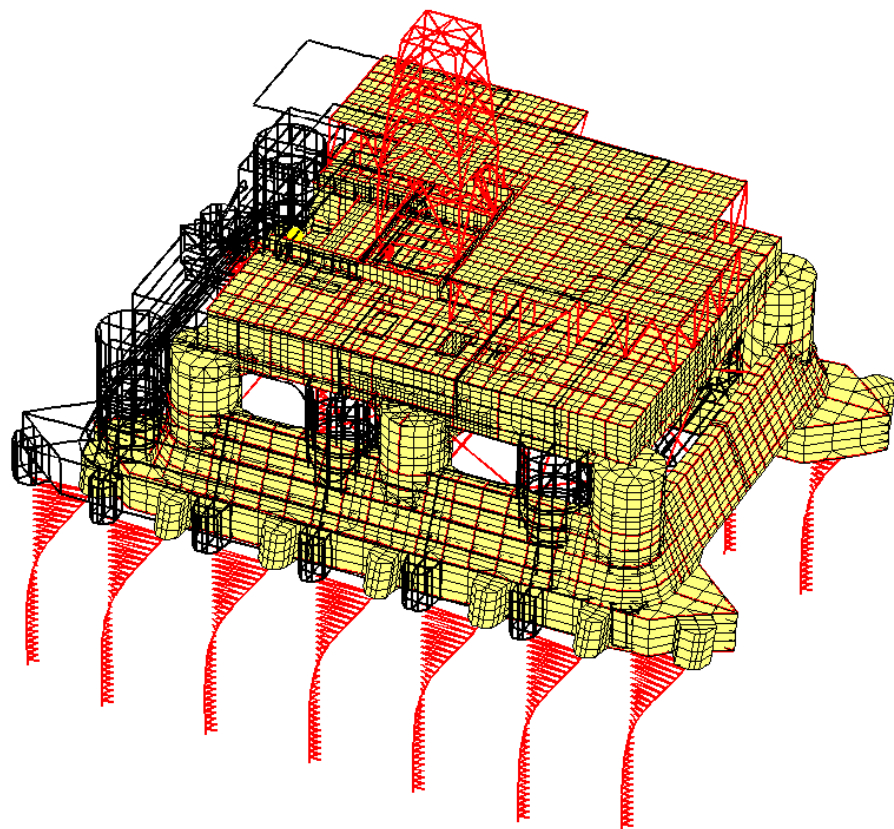


Iceberg collision with the stand of a fixed oil-extracting platform: plastic deformation value

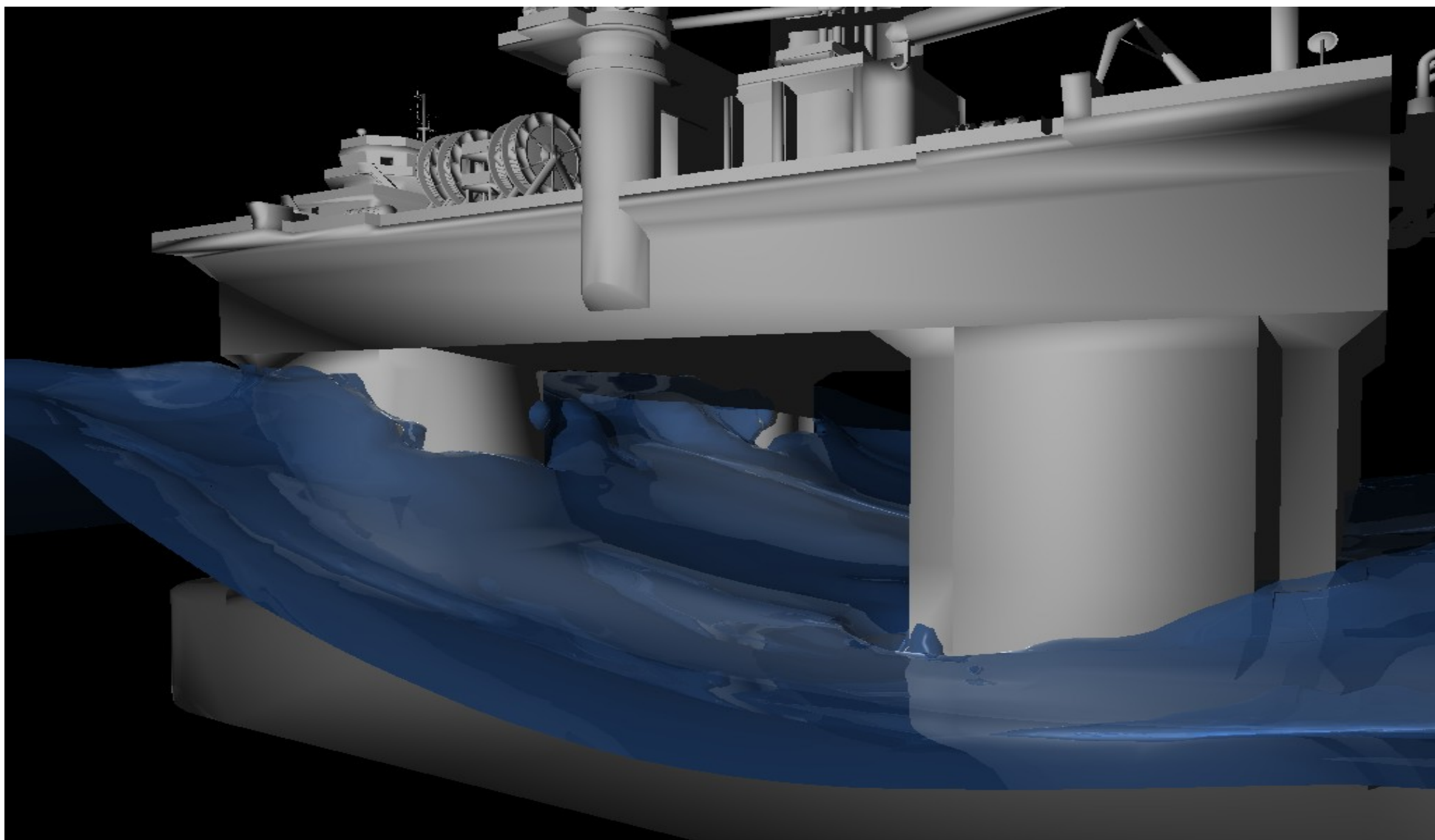


# Пример задачи о деформировании в многосвязной области интегрирования

## Морская ледостойкая стационарная платформа



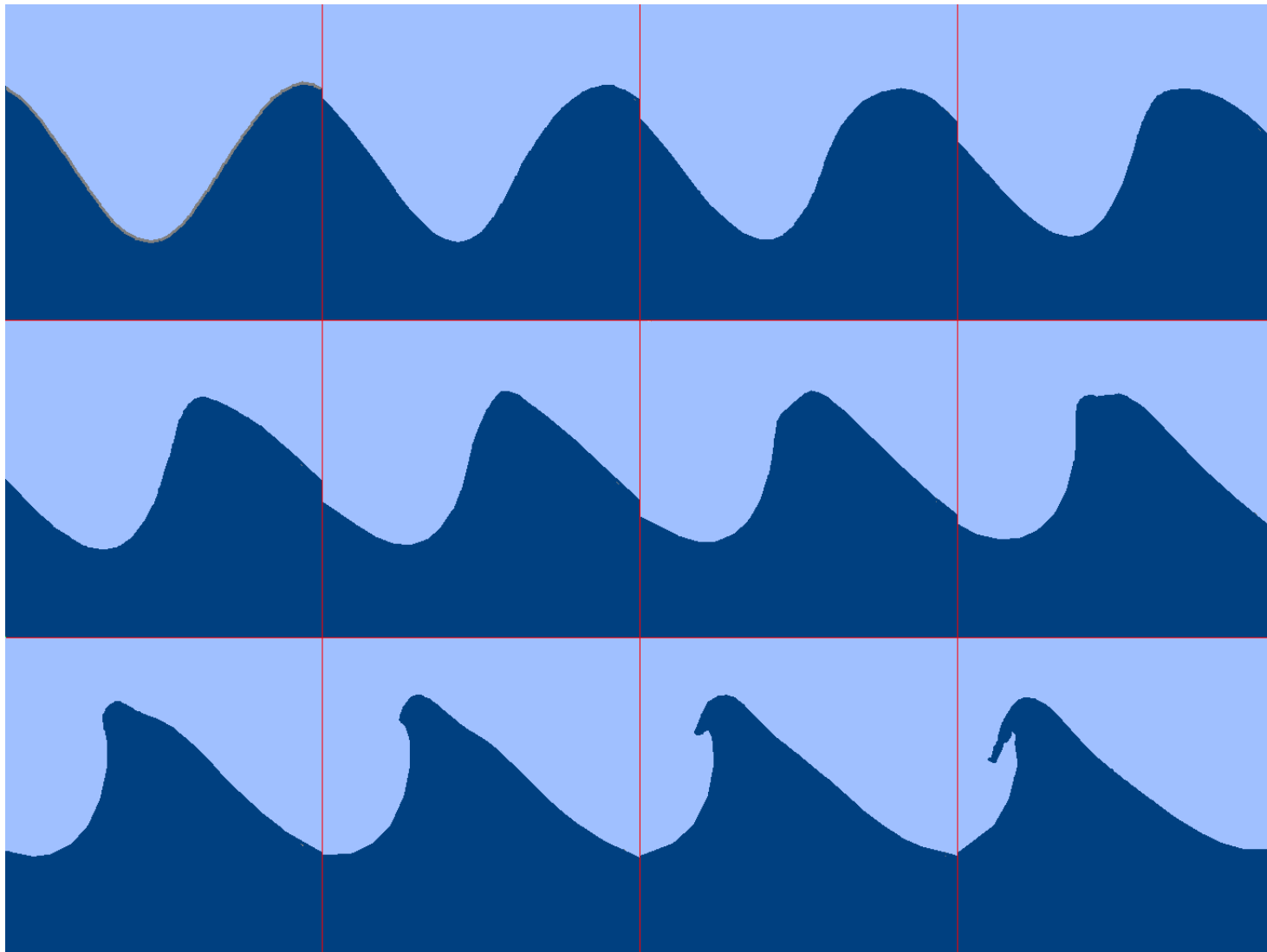
# Штормовое воздействие на ледостойкую платформу (ИВМ РАН)



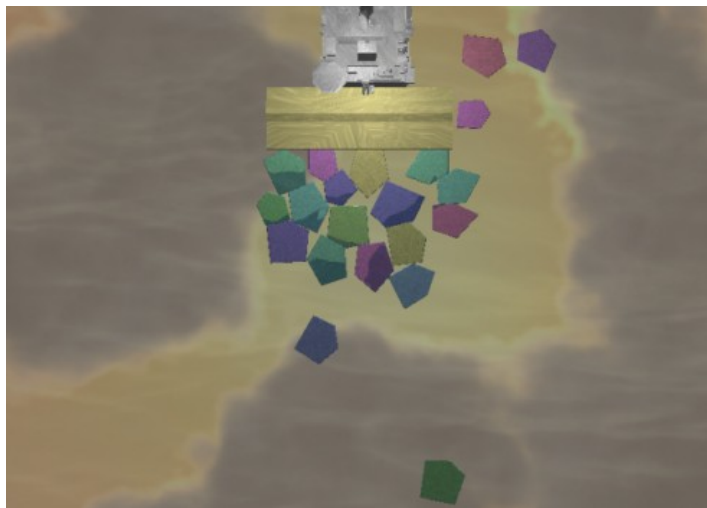
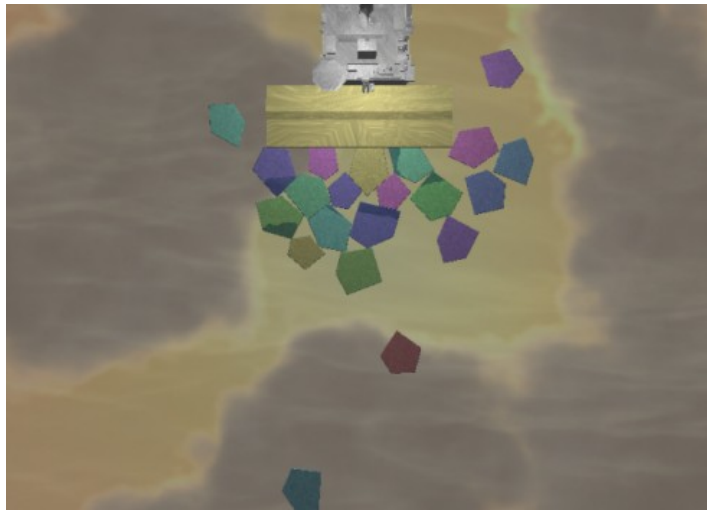


# Эволюция формы морской волны, набегающей на берег.

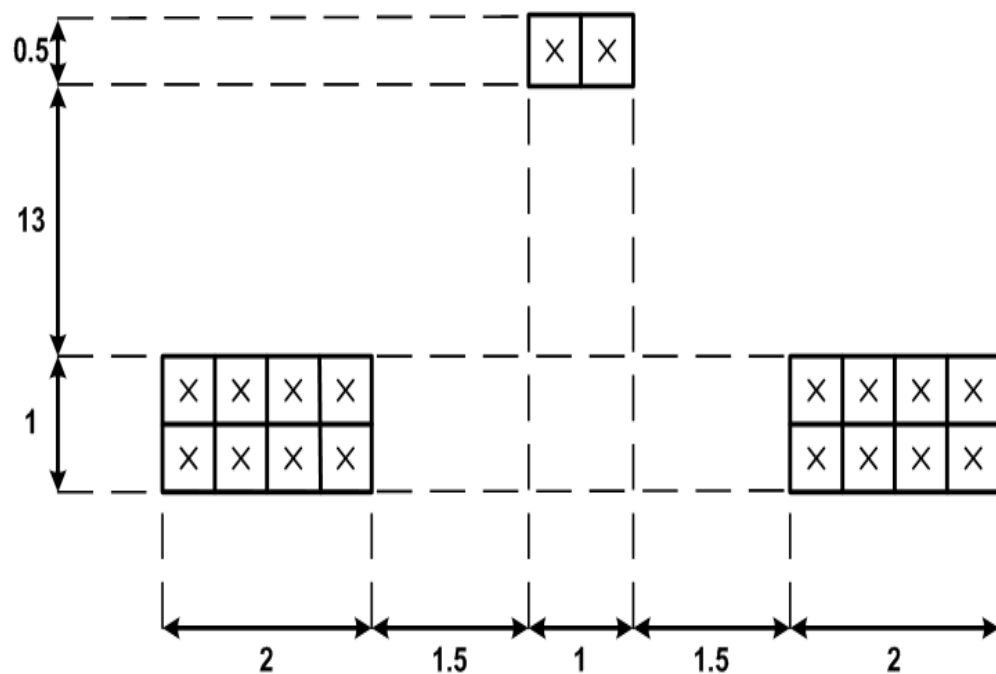
*Л.А.Иншакова (Харина)* Комплекс программ "Океан" моделирования динамики гравитационных волн



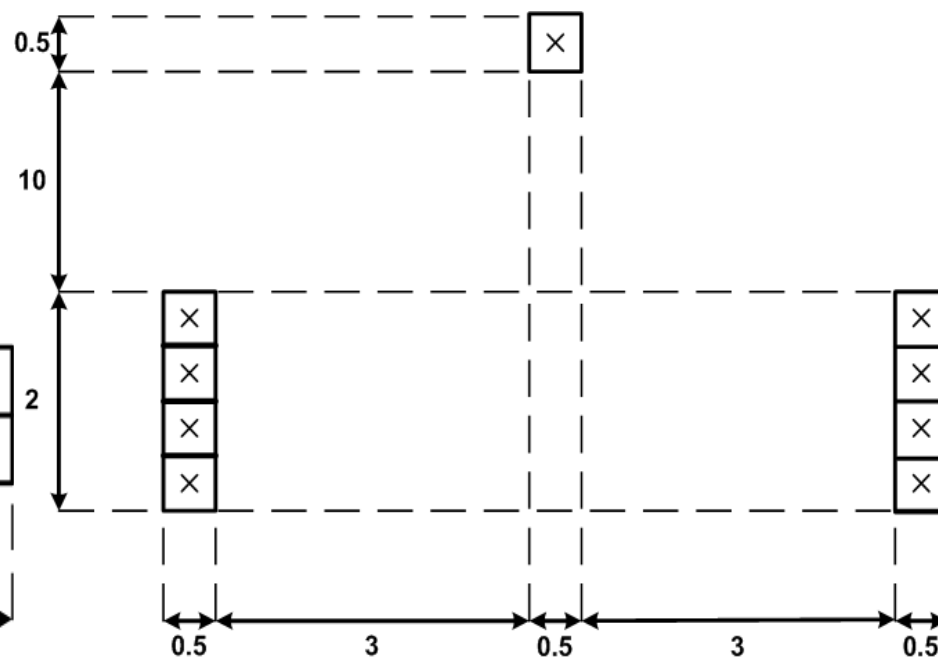
# Торосы и нефтедобывающая платформа



- Схема распределения нагрузки от шасси самолетов: а) ИЛ-76 ТД, б) С-130Н Hercules.

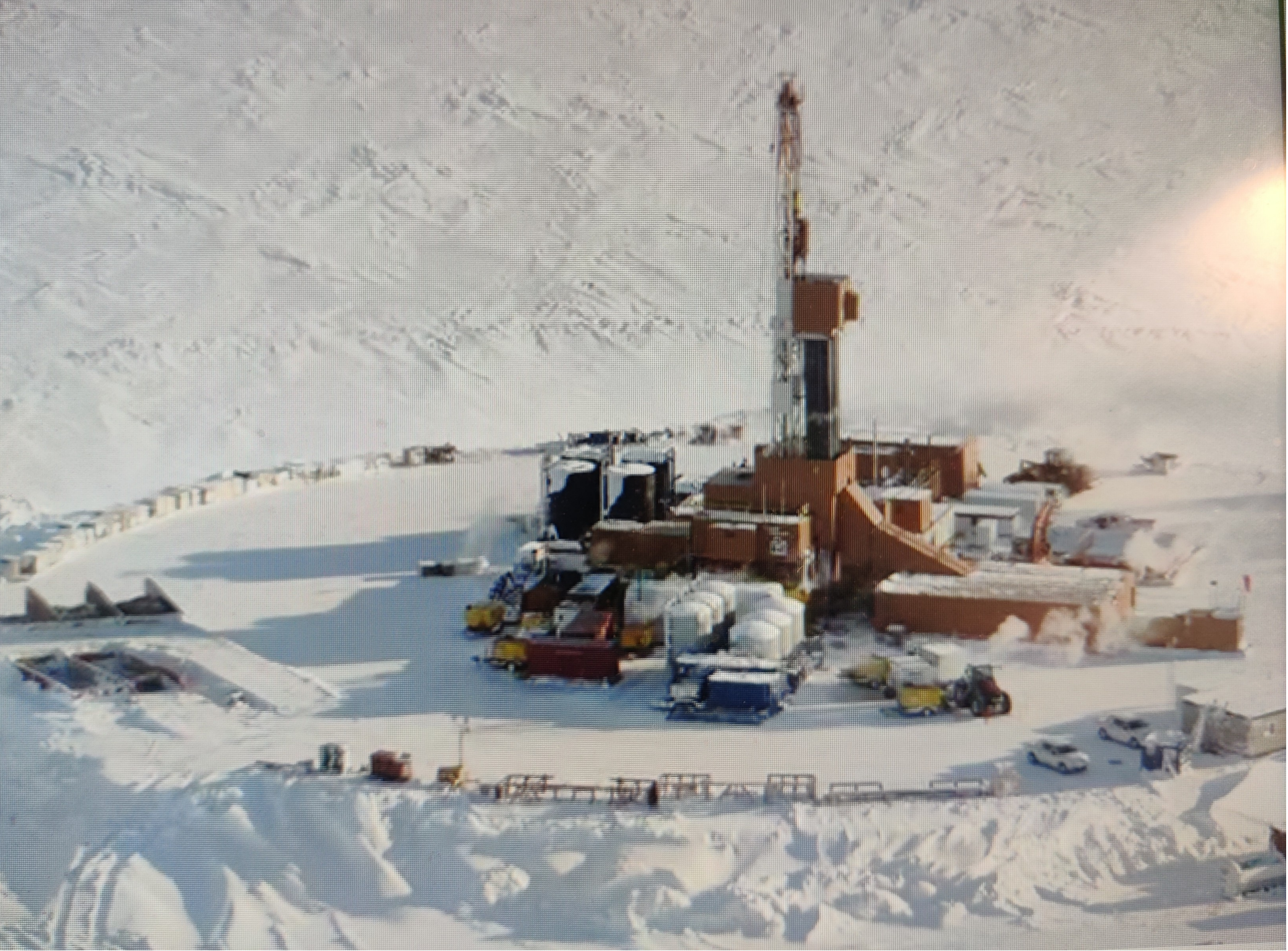


■ а)

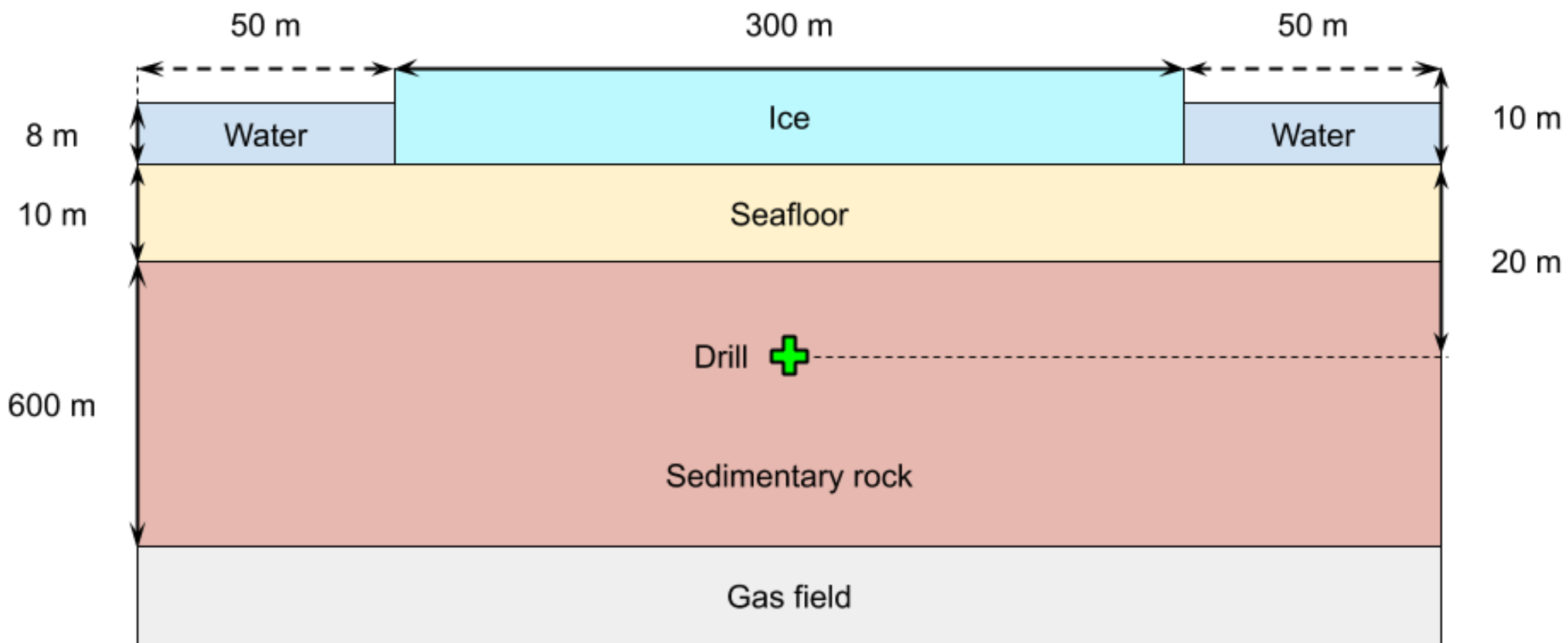


■ б)



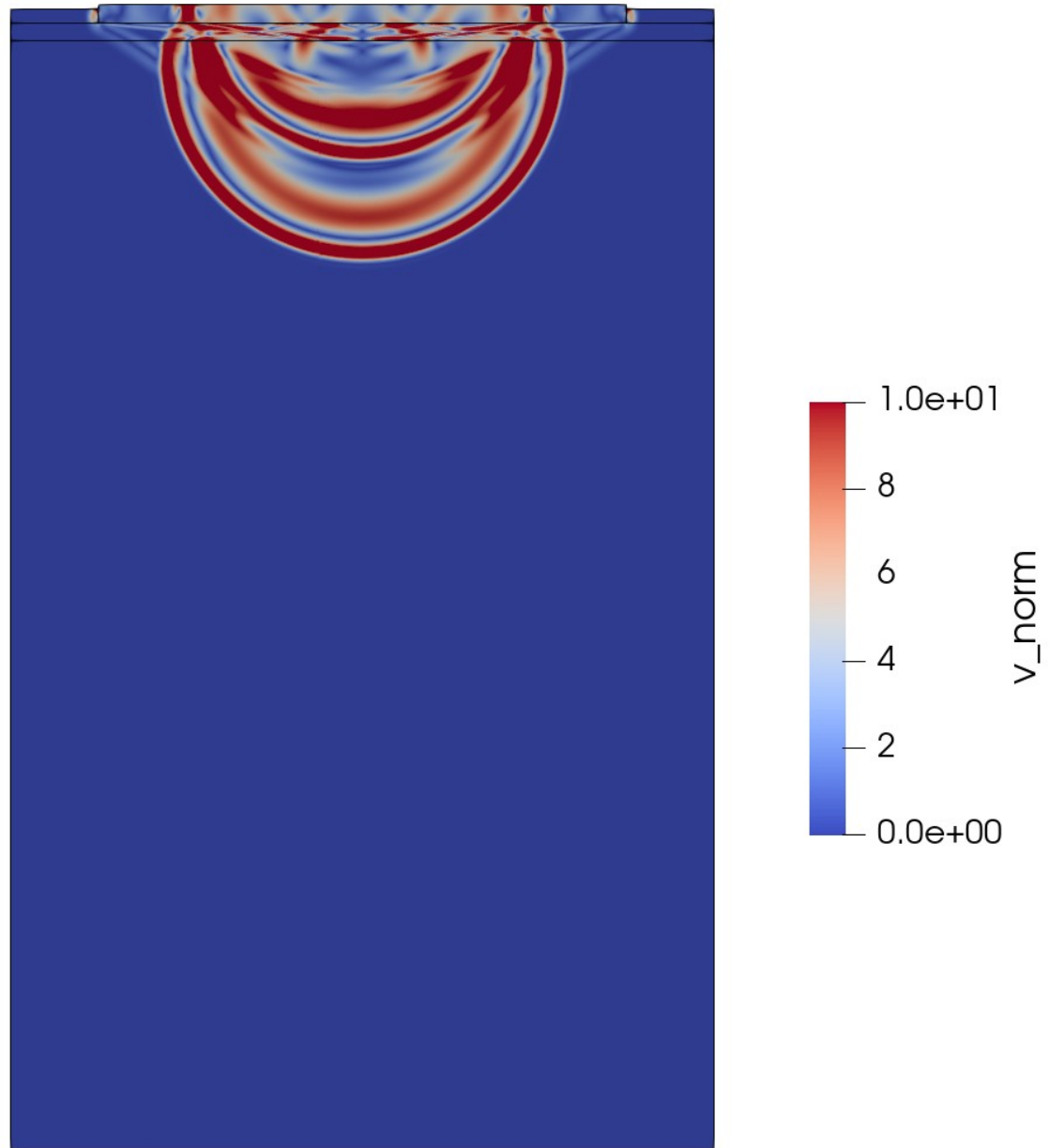
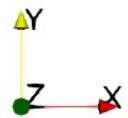




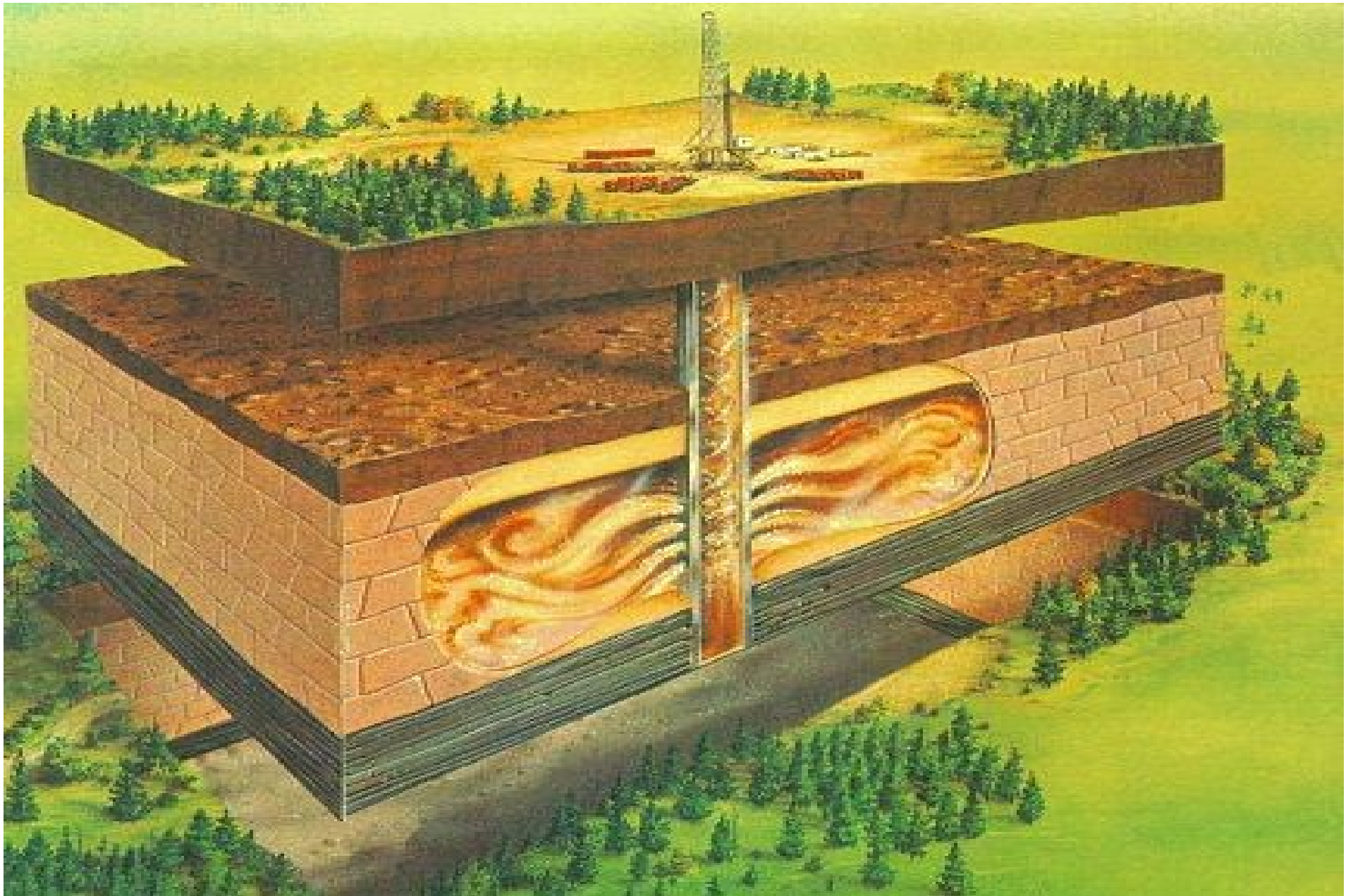




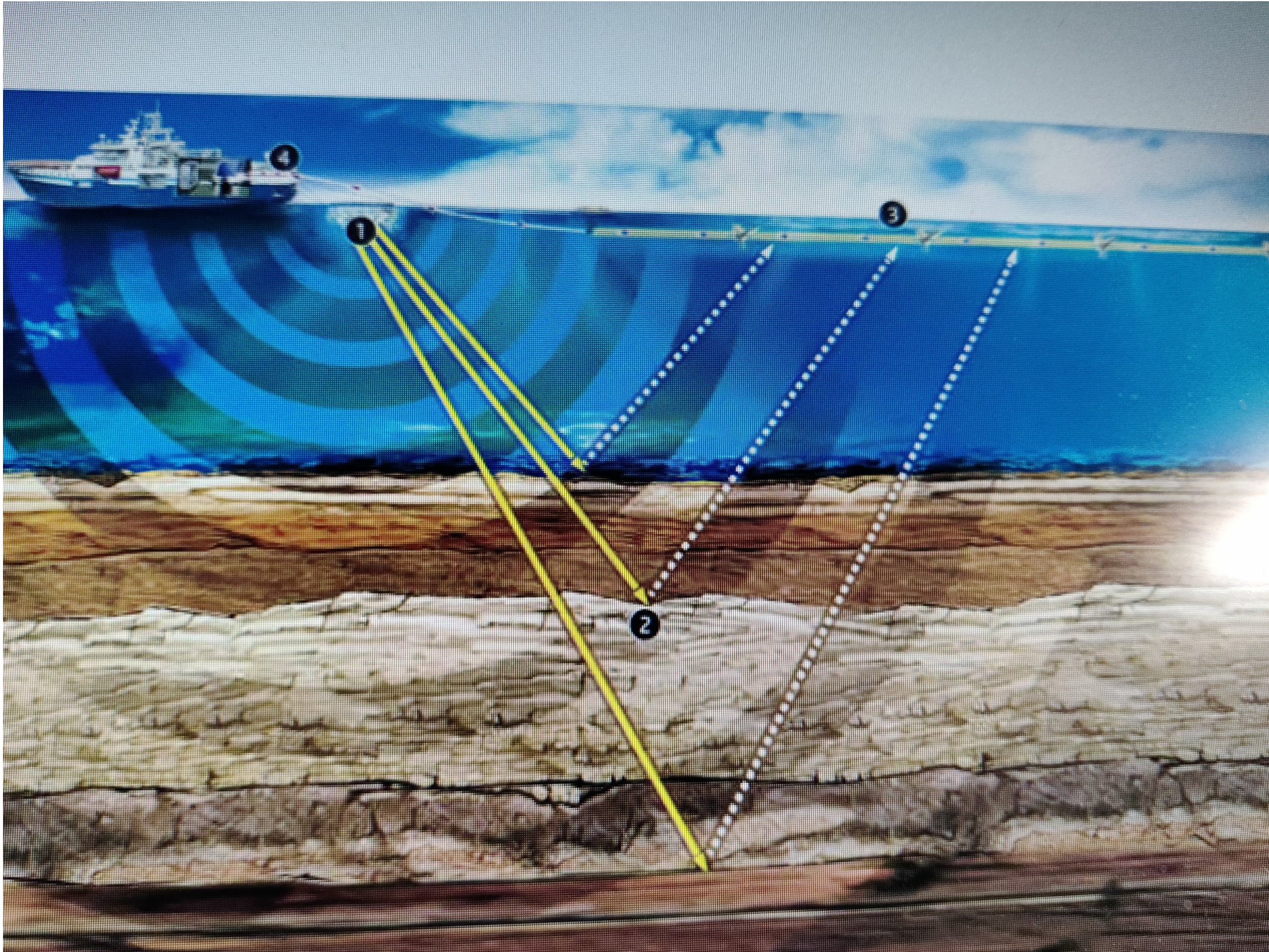
$t = 0.05 \text{ (s)}$



# Численное моделирование в геологии

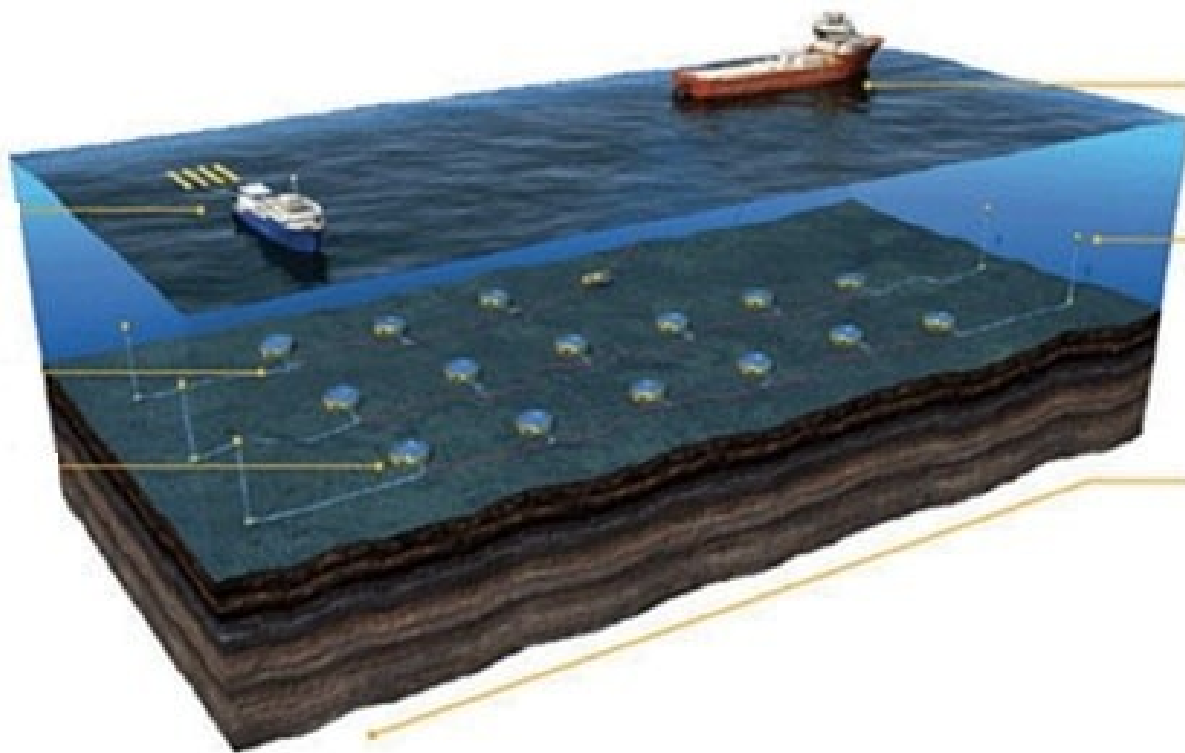








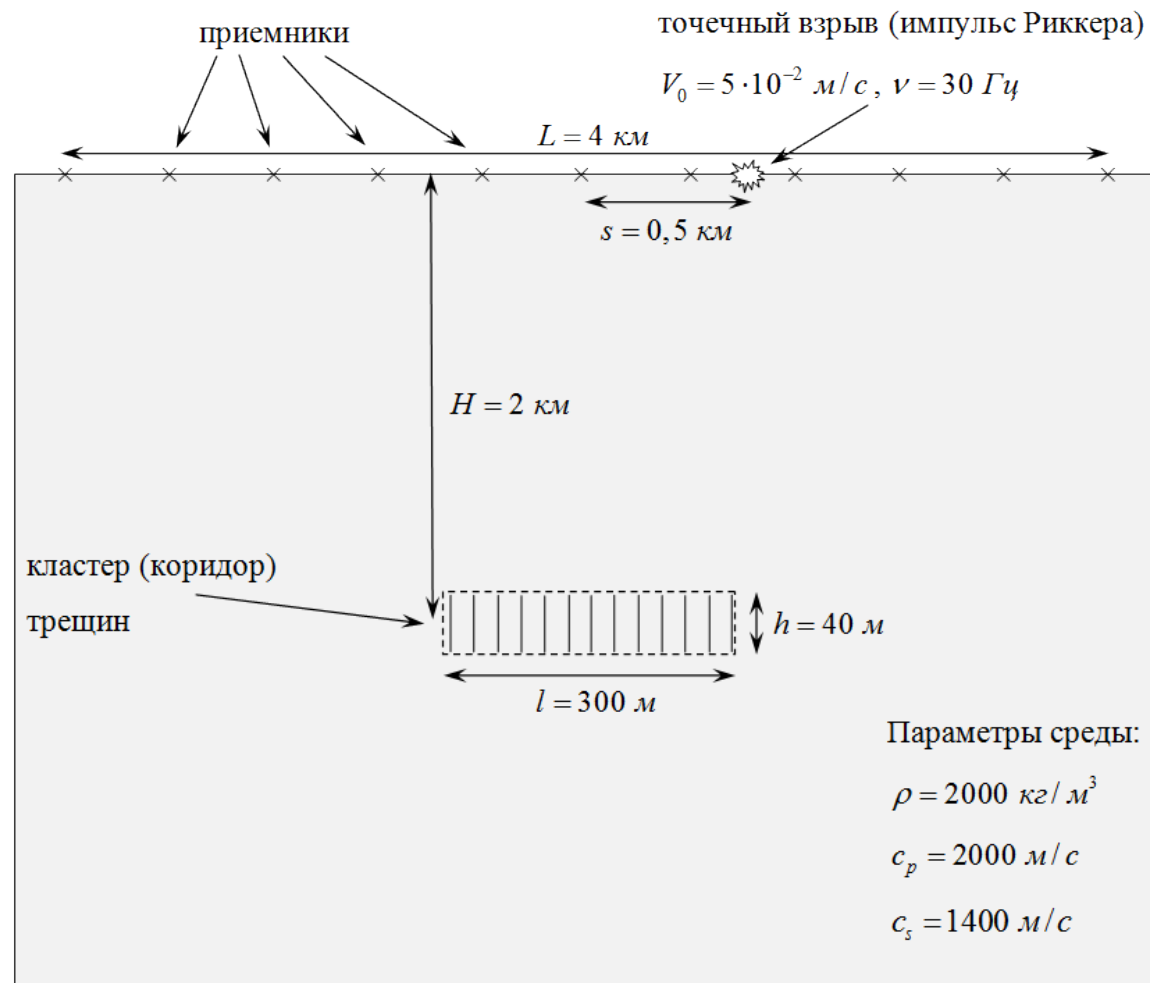
# Сейсмика – донные станции



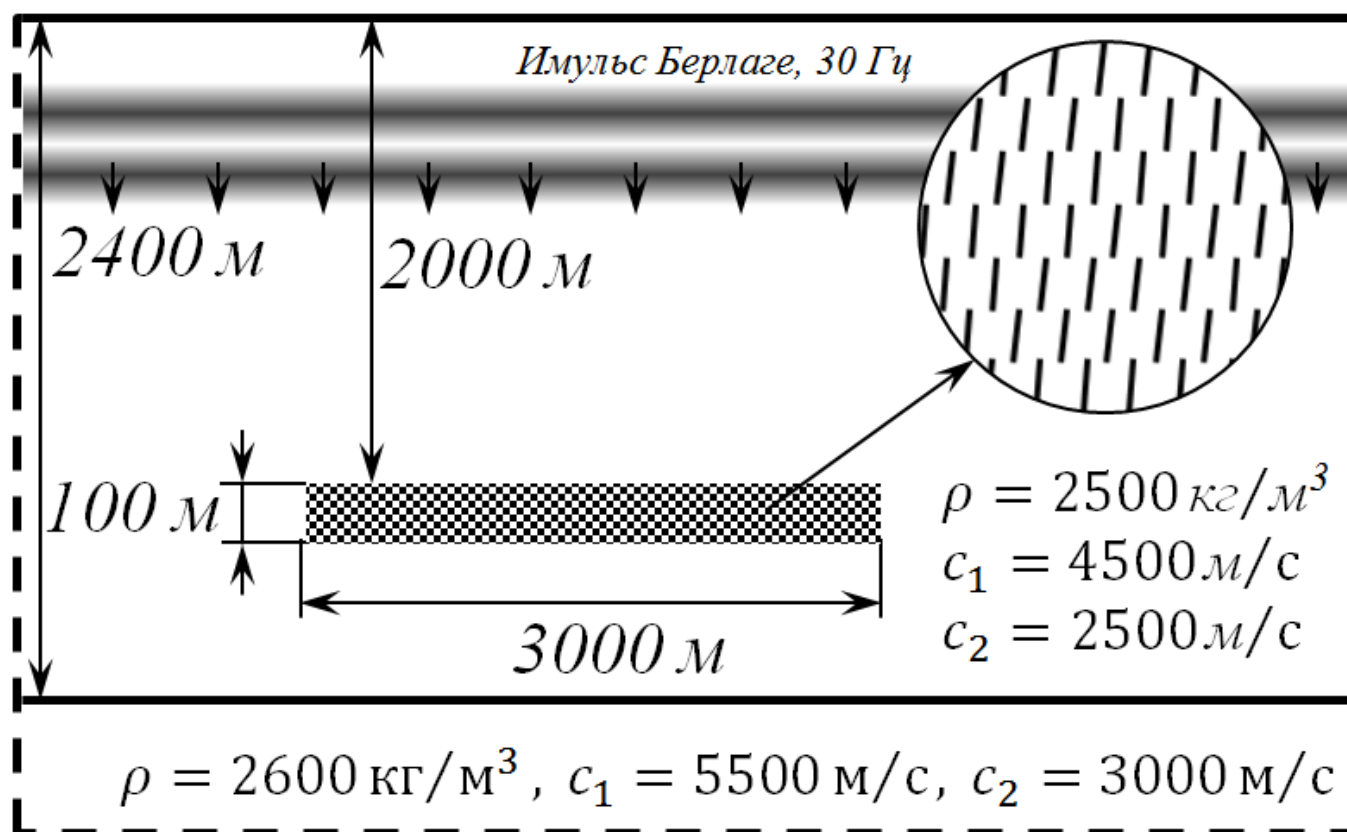
- 3D/4C
- Высокая стоимость
- Высокая информативность данных

# Задачи численного моделирования

- Исследование свойств геологических сред
- Выявление закономерностей откликов
- Построение осредненных моделей сред
- Обратные задачи численного моделирования





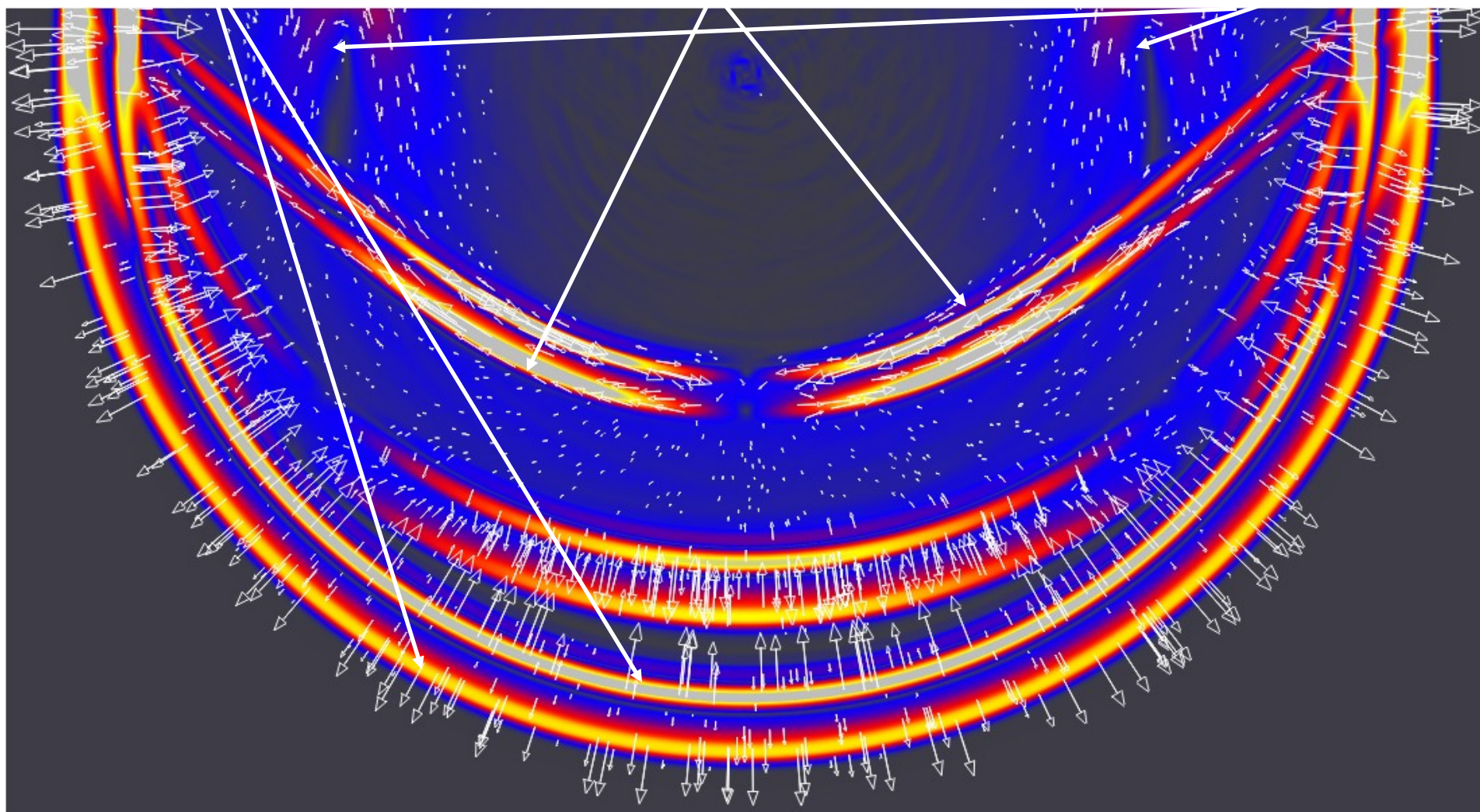


# Взрыв рядом с поверхностью

продольные волны

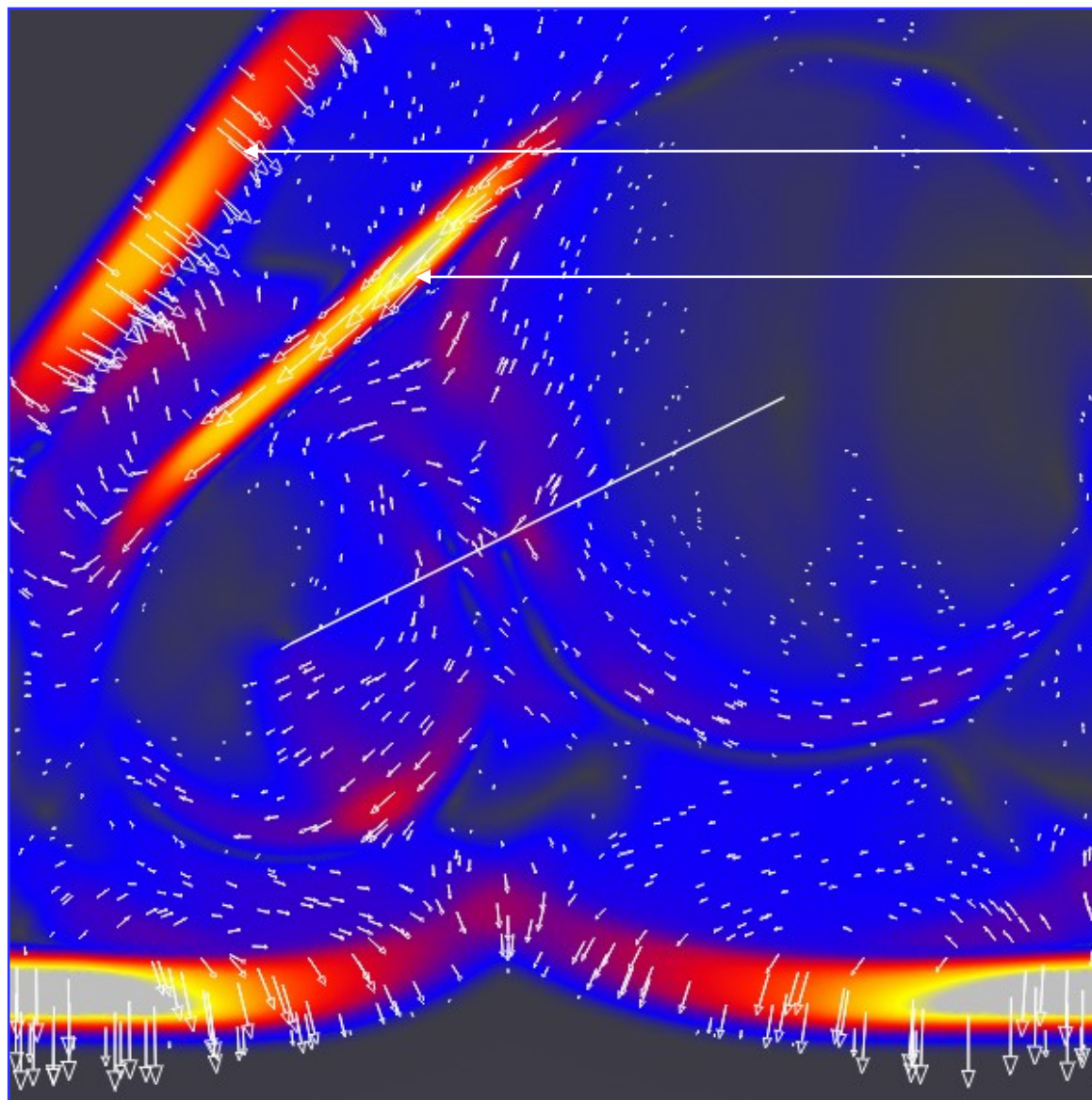
поперечные волны

Волна Релея





# Газонасыщенная трещина



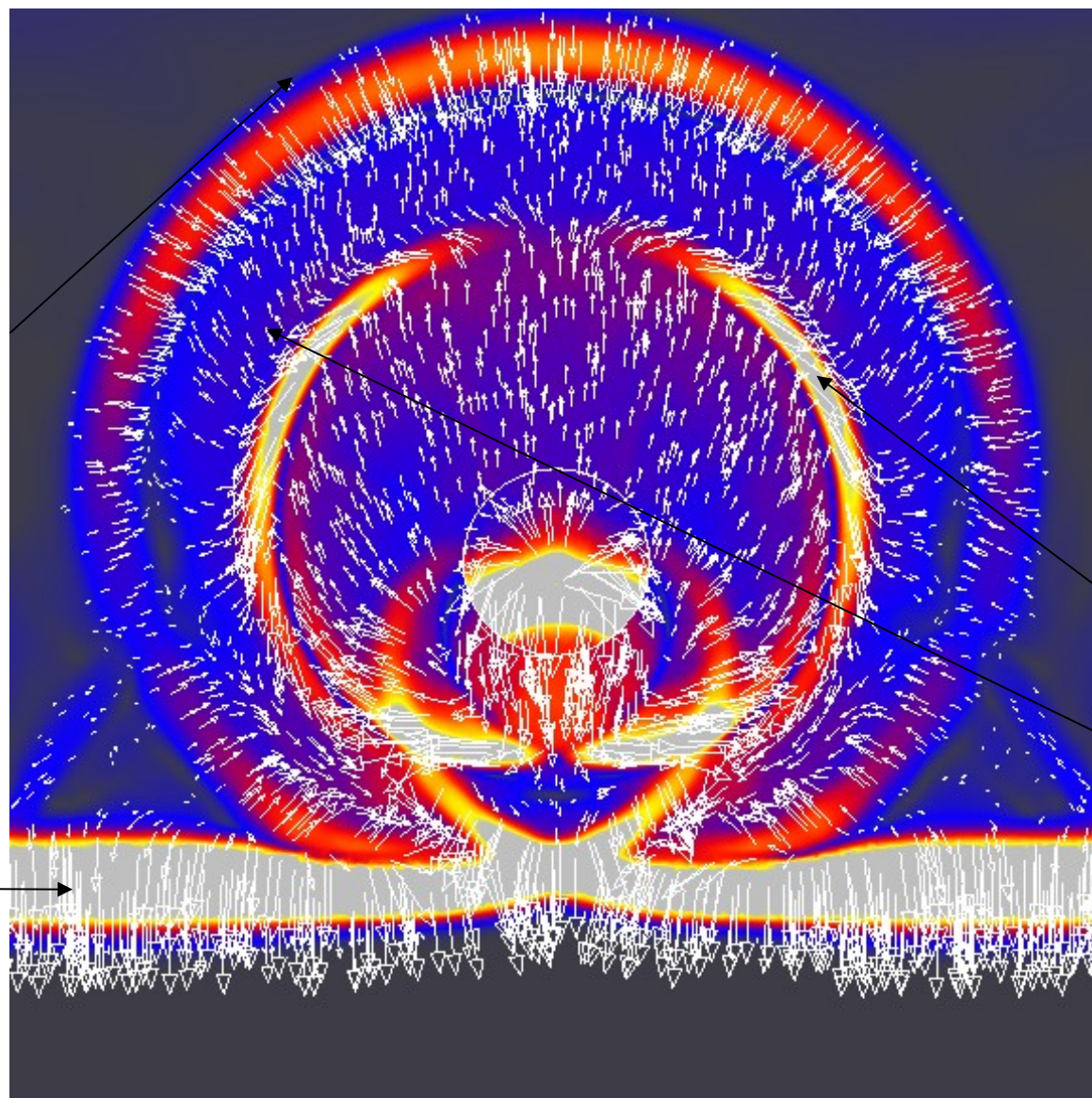
Отраженные  
продольная  
и поперечная  
волны

Поле скоростей

# Простая флюидонасыщенная полость

Отраженная  
продольная  
волна

Прошедшая волна



Отраженная  
волна



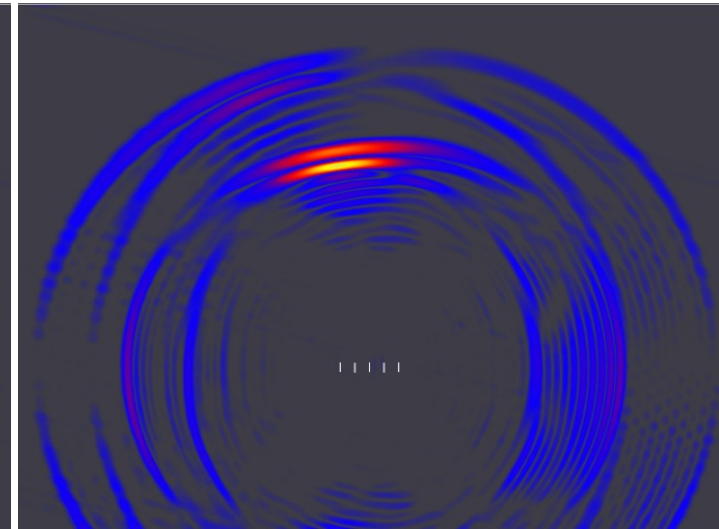
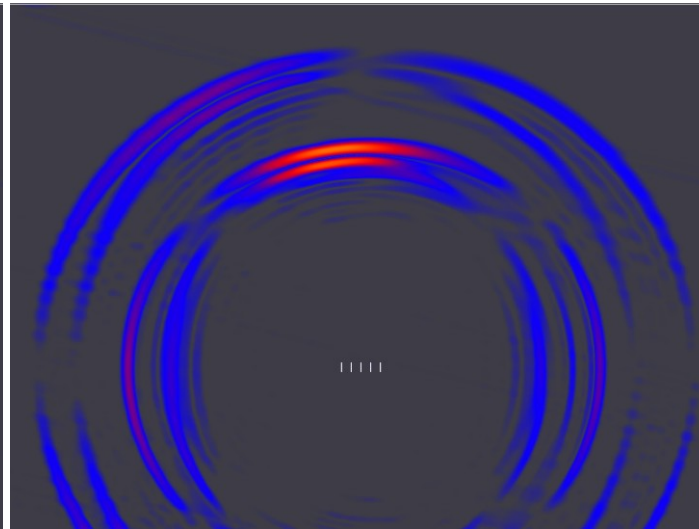
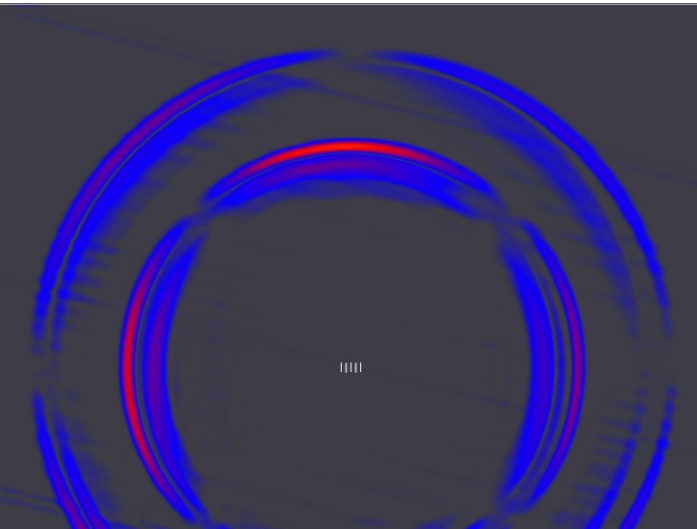
# Коридор флюидонасыщенных вертикальных трещин

расстояние между трещинами / длина трещин

0,5

1,0

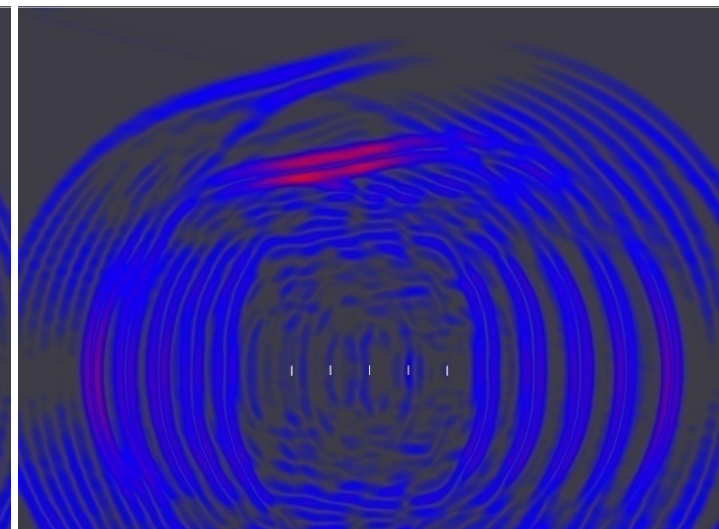
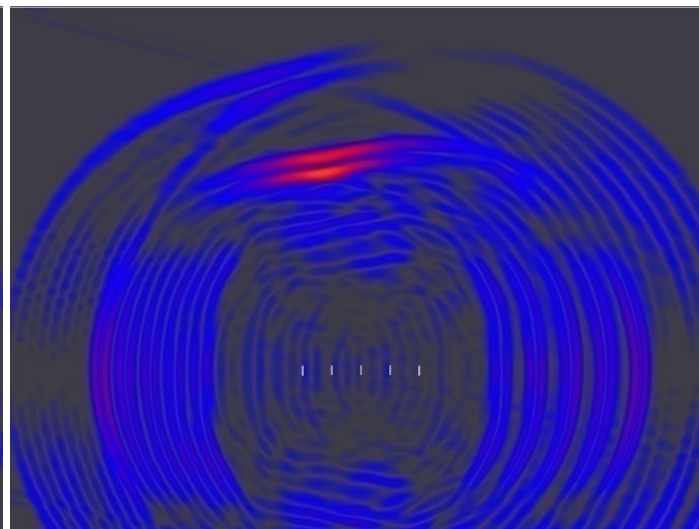
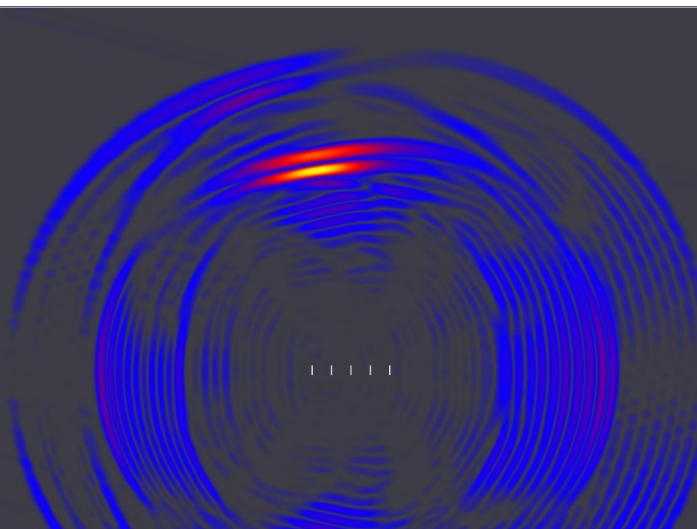
1,5



2,0

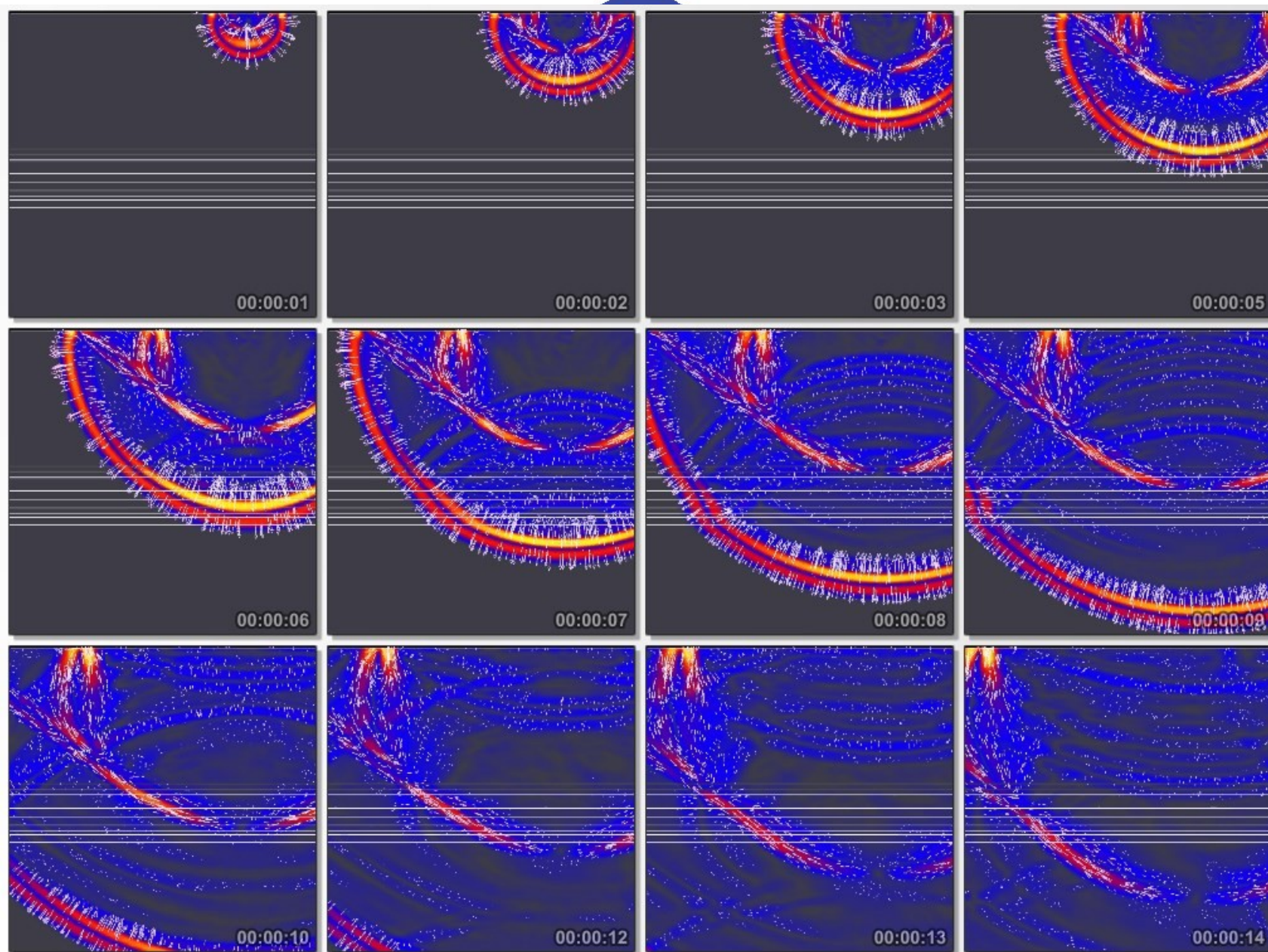
3,0

4,0

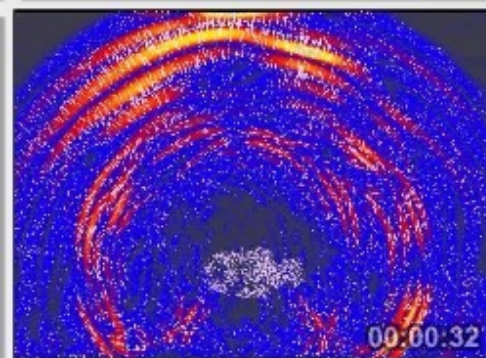
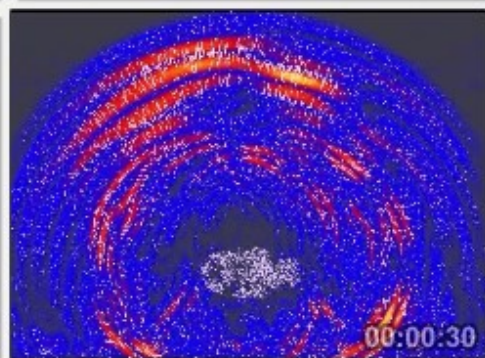
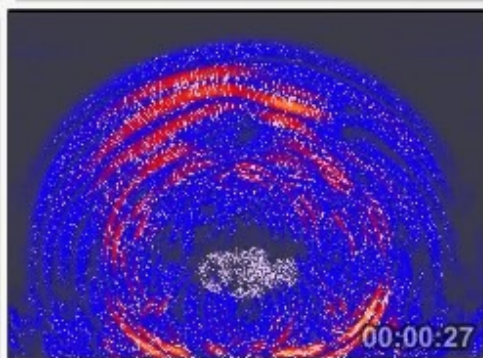
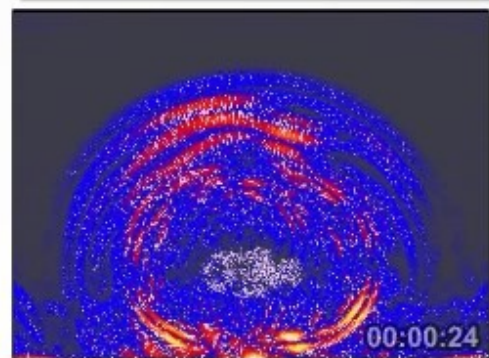
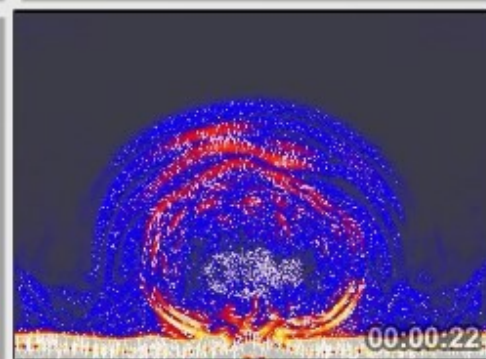
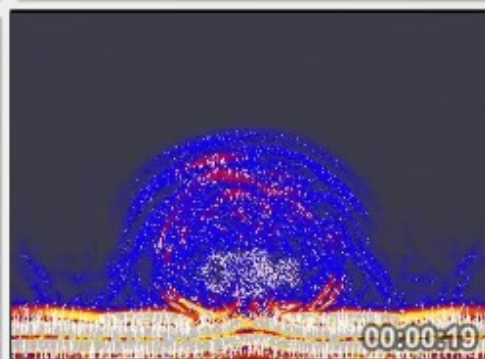
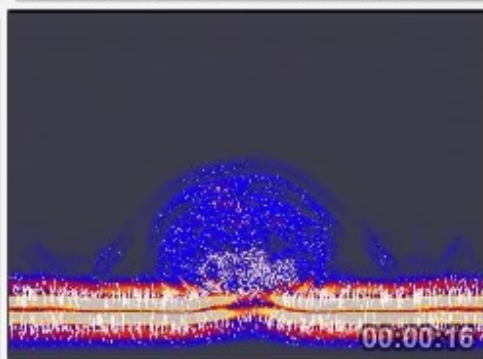
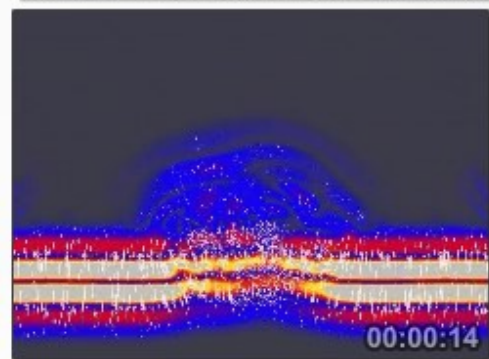
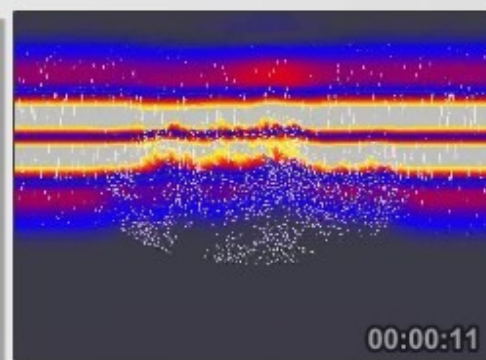
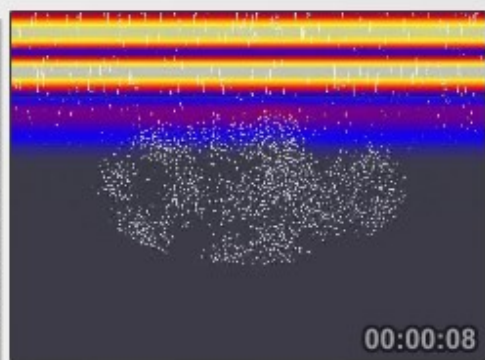
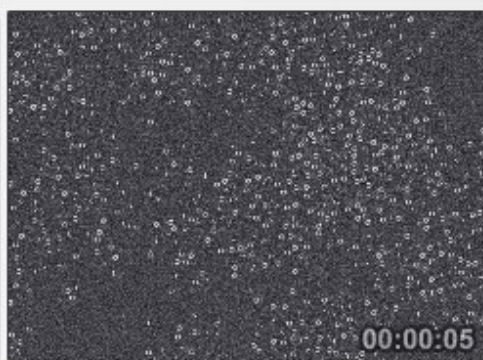
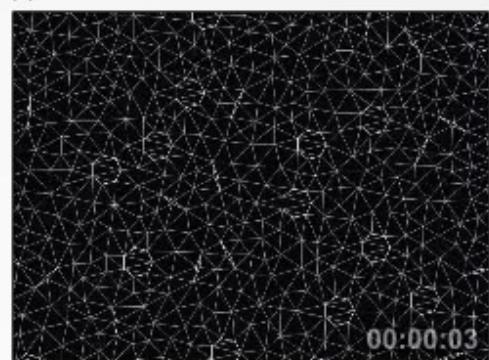




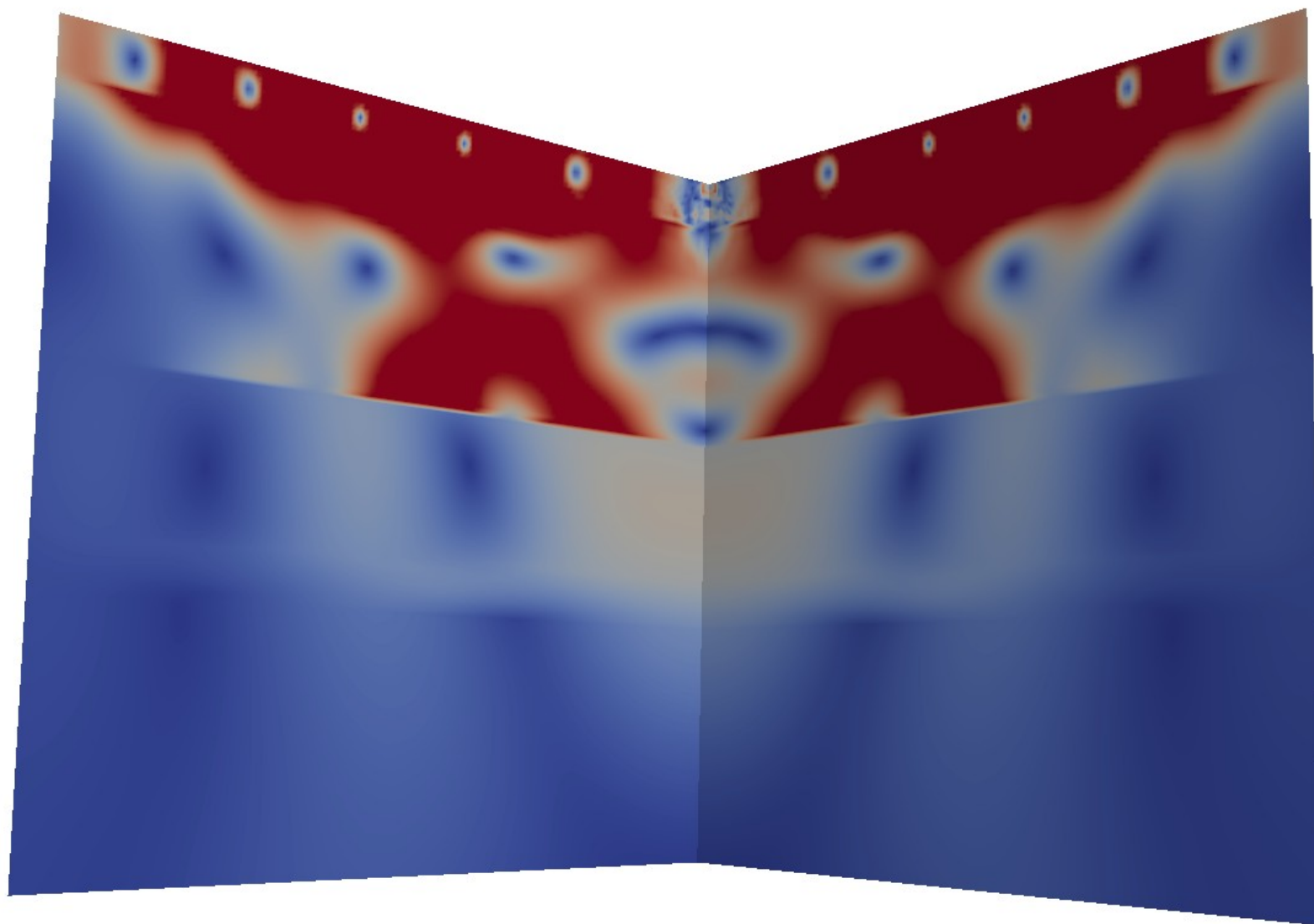
# Волновая картина в слое льда





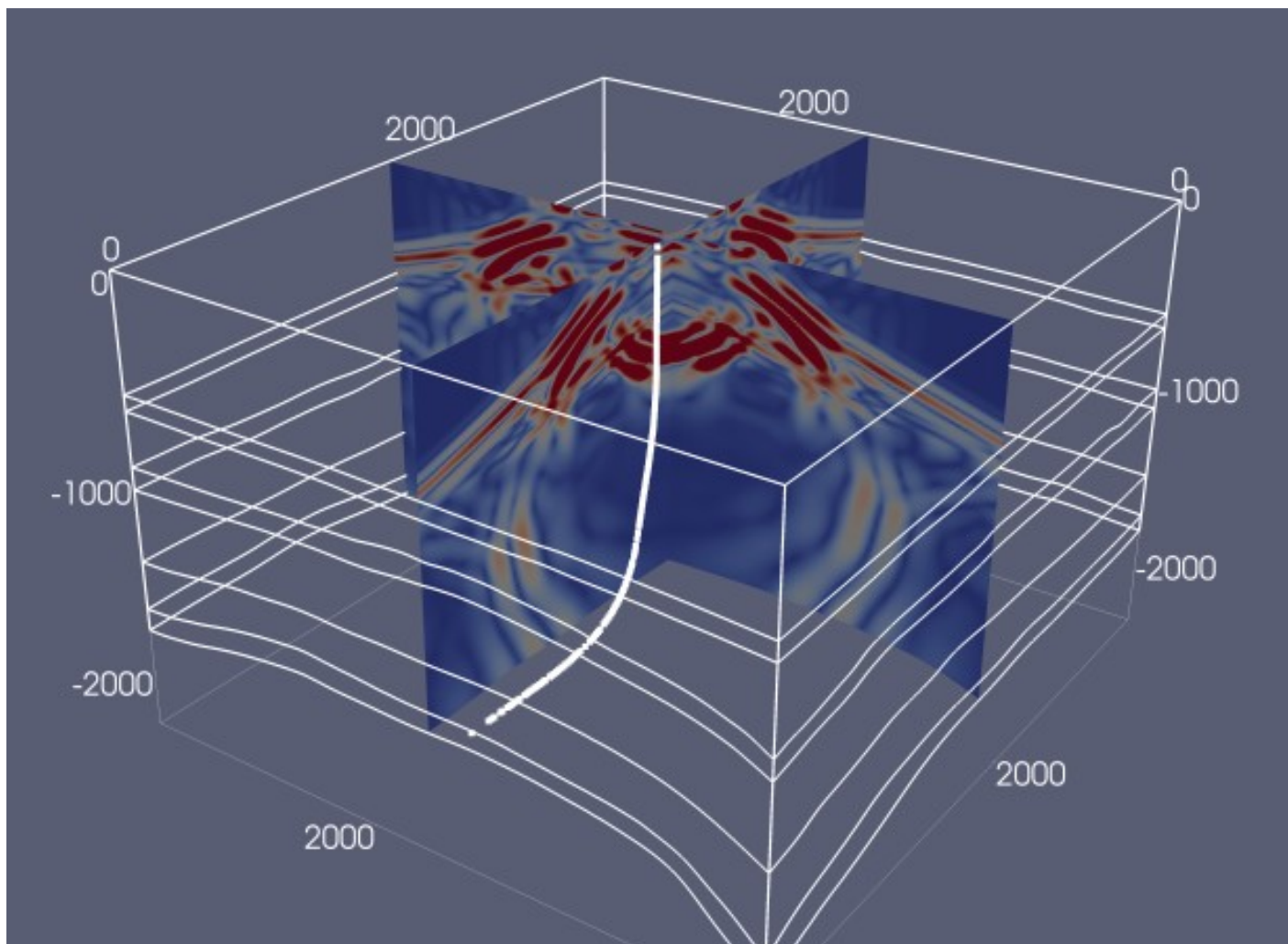


# Сейсмическая разведка Арктического шельфа

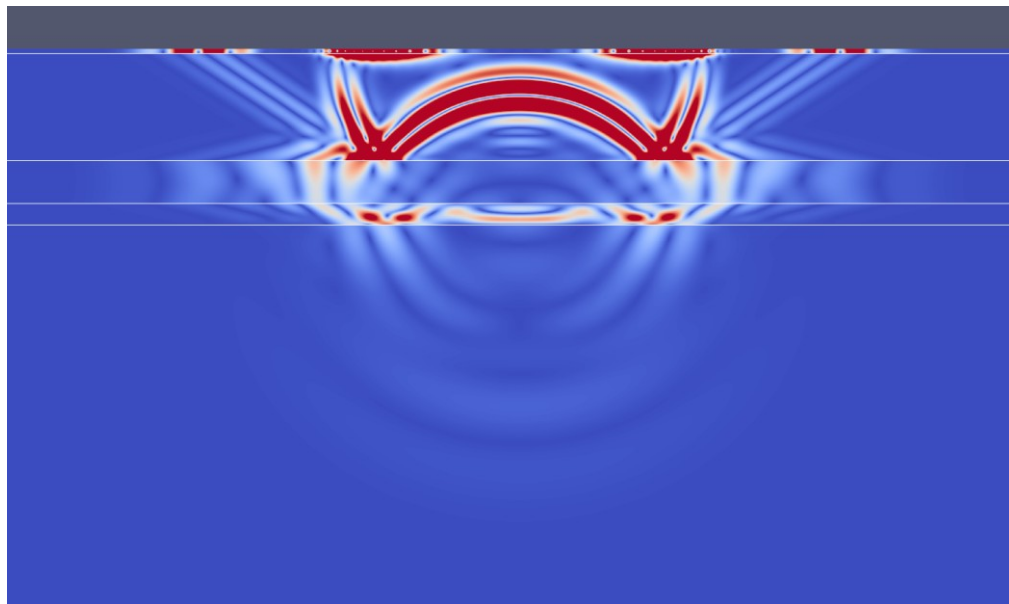




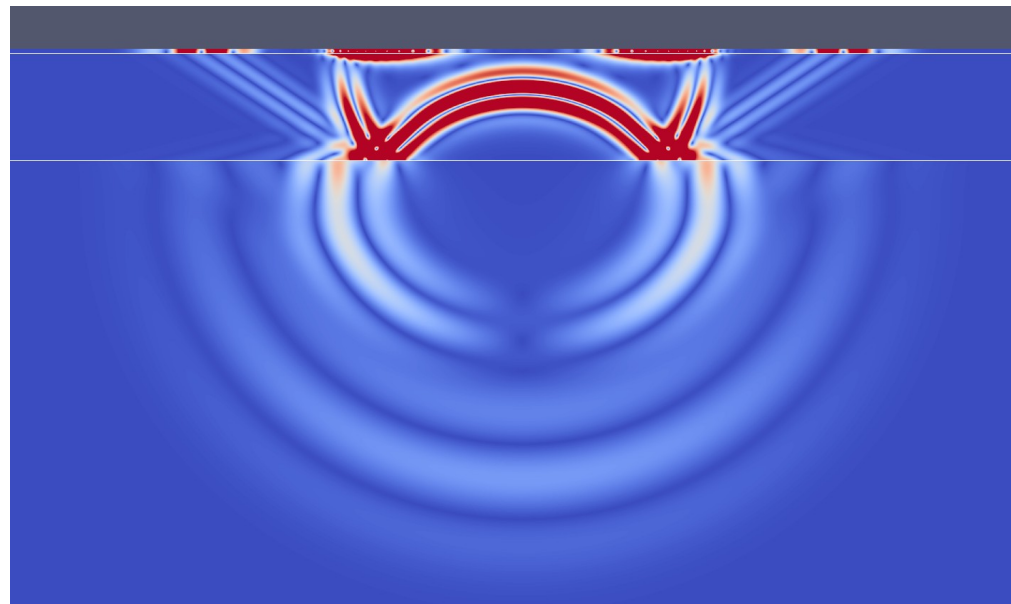
# Волновое поле в гетерогенной модели



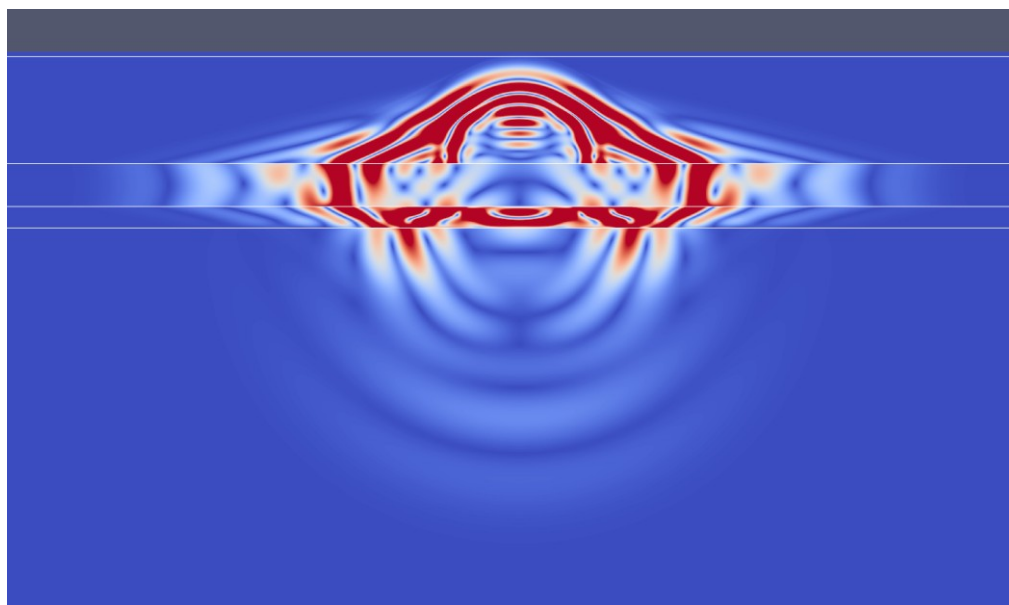
# Волновые картины



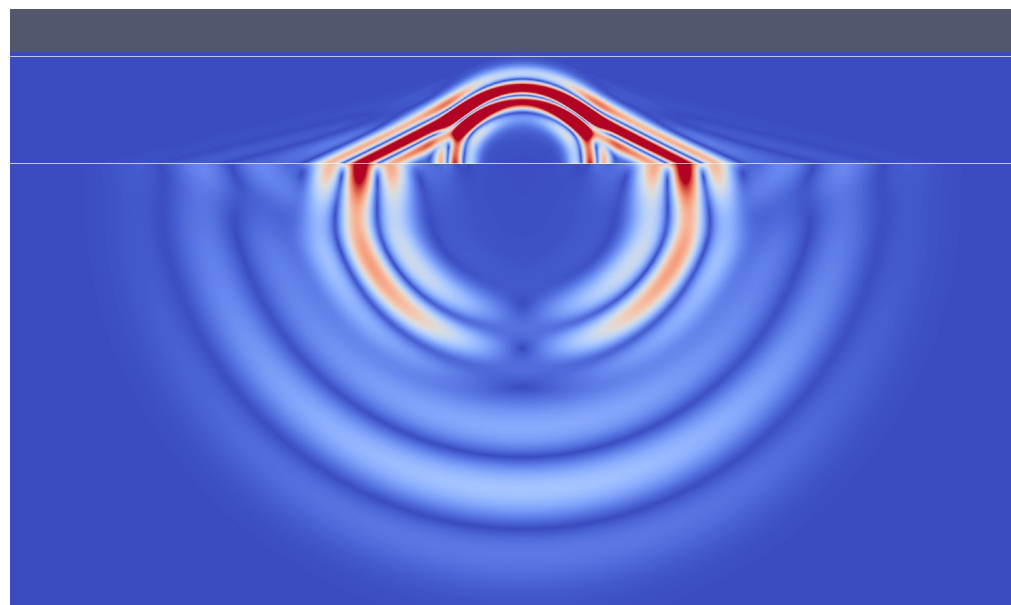
Источник во льду, 0.135 сек.



Источник во льду, без резервуара, 0.135 сек.

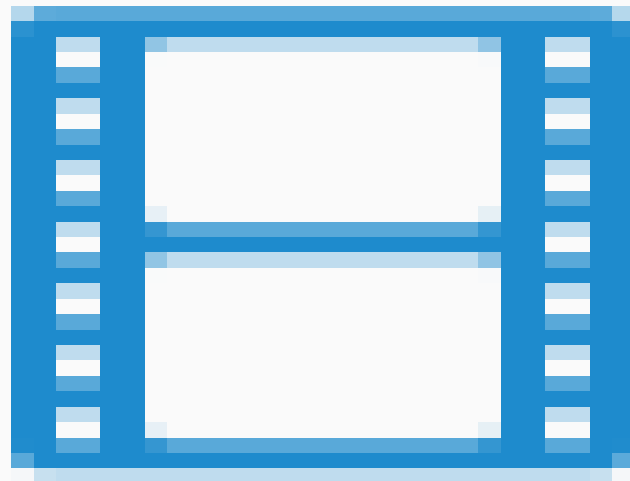


Источник на дне, 0.0675 сек.

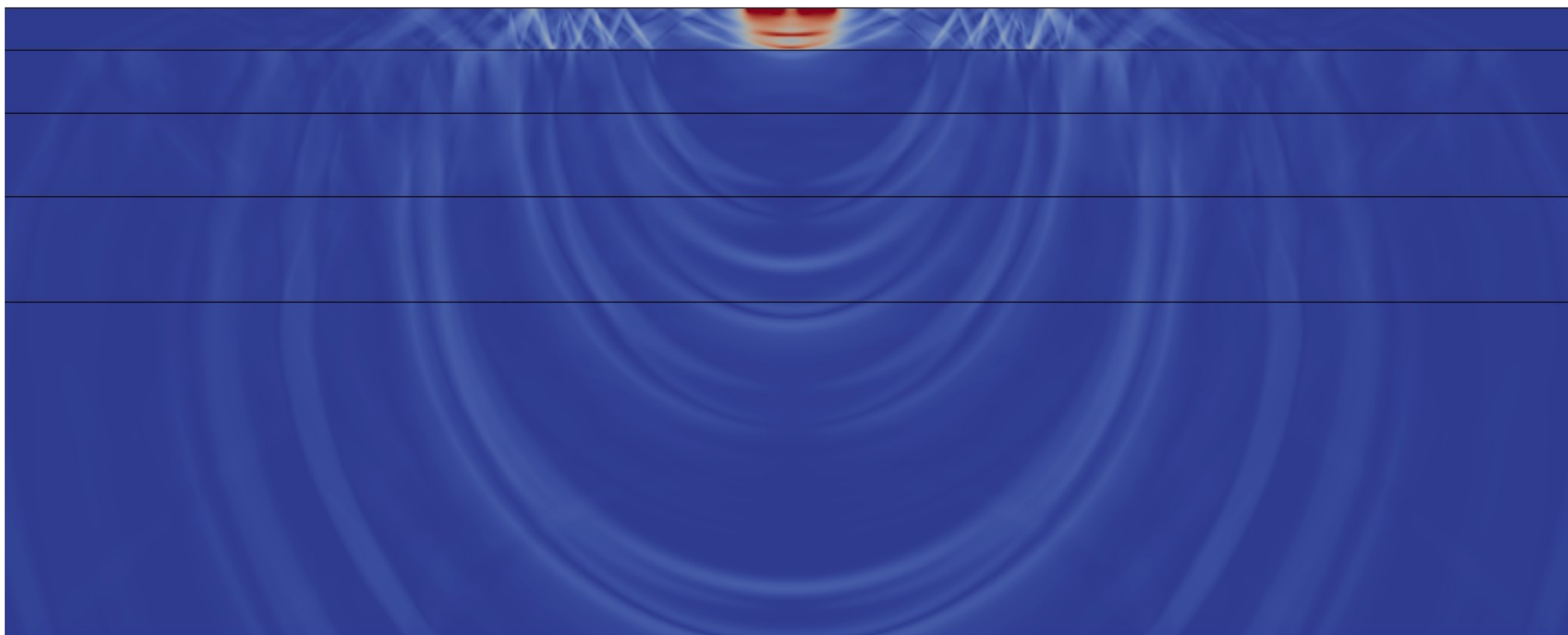


Источник в воде, без резервуара, 0.0675 сек.



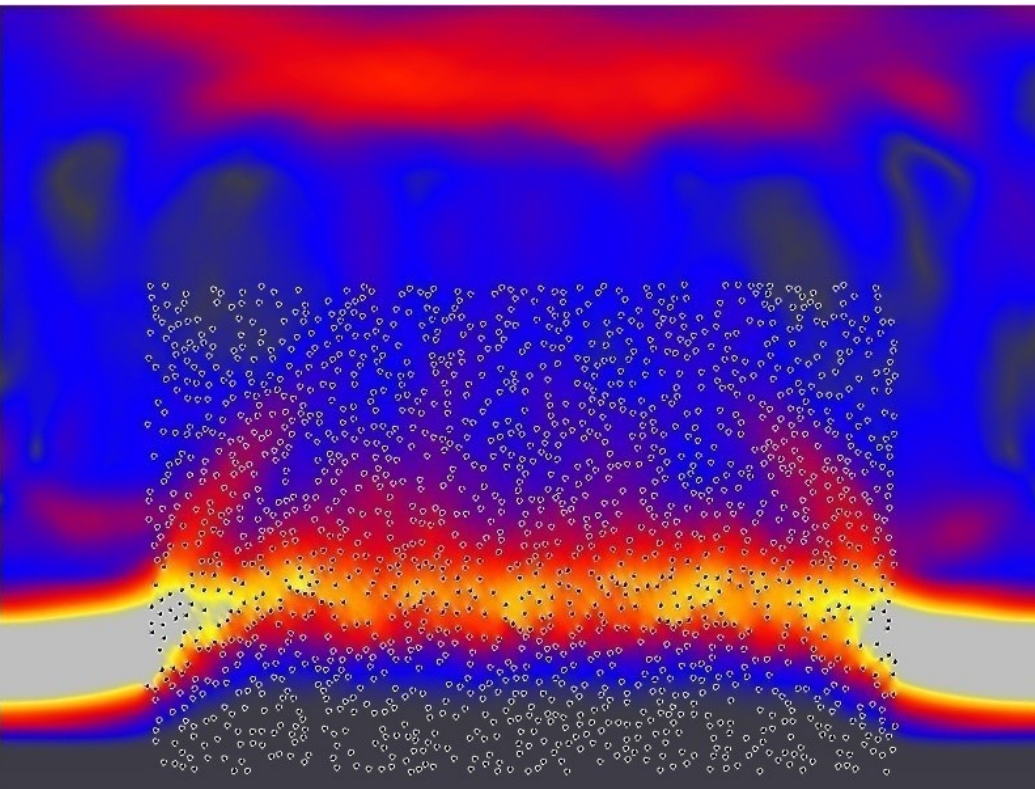


# Многослойная порода

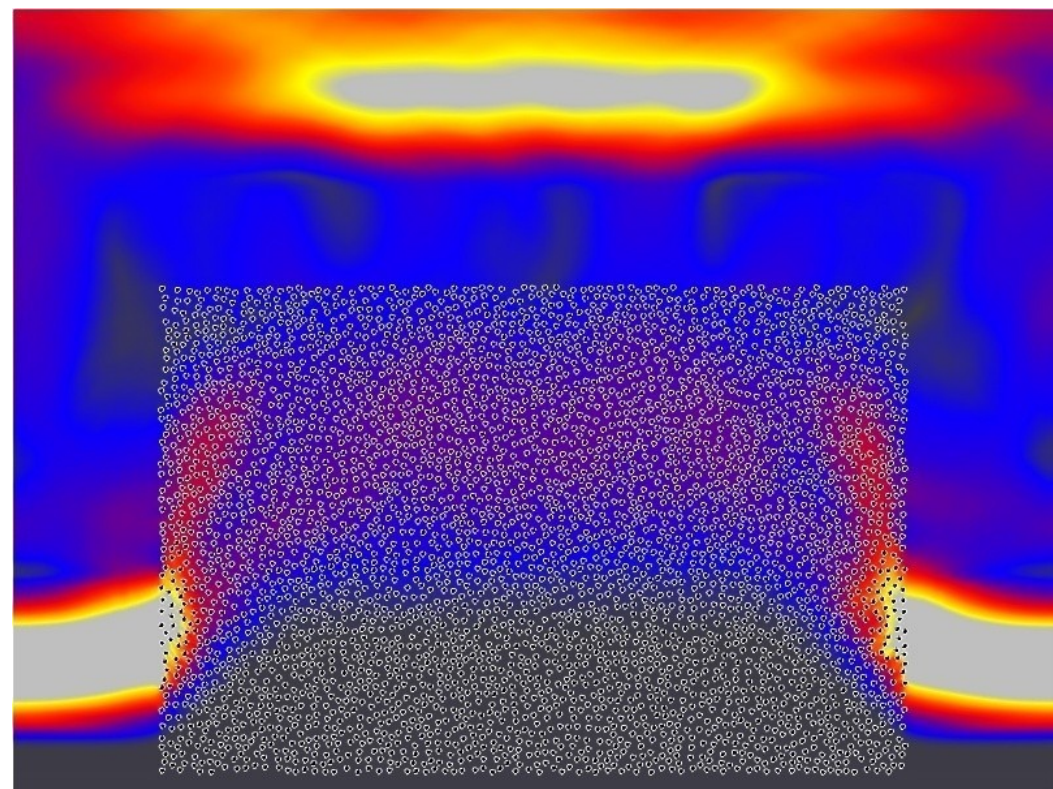




# Сравнение сред с разной пористостью

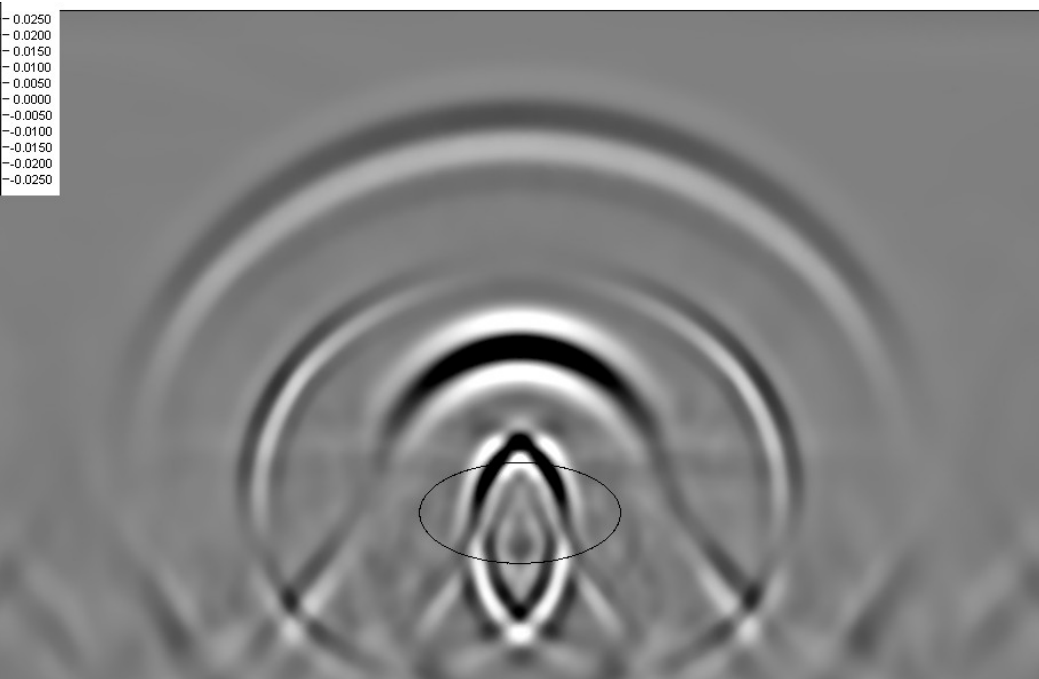


Porosity 10%

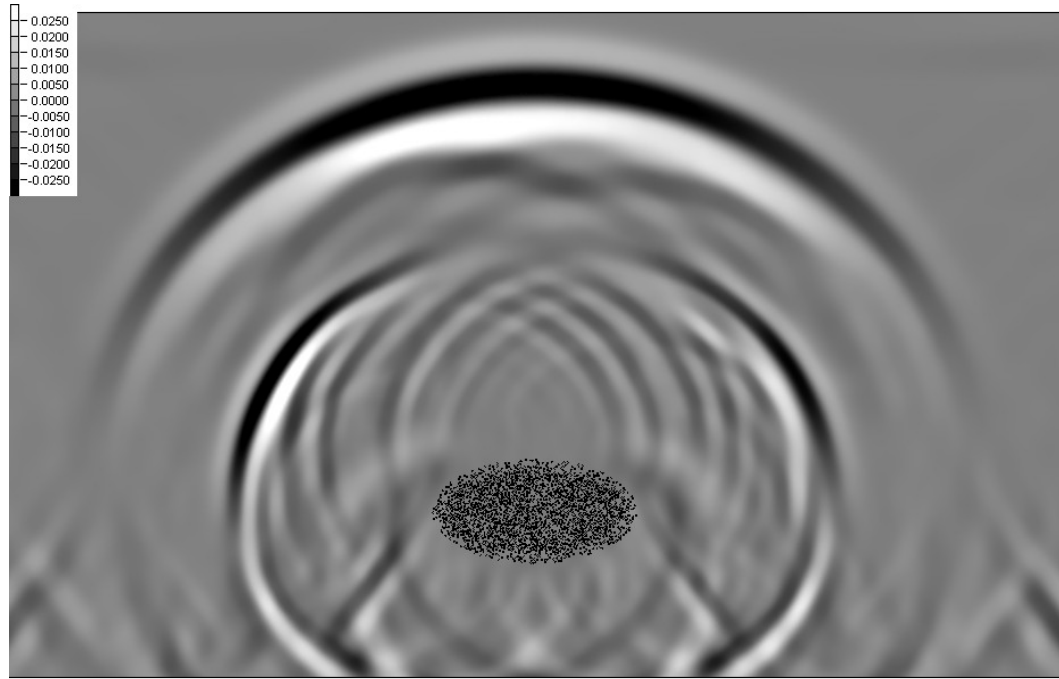


Porosity 40%

# Сравнение с осредненной моделью



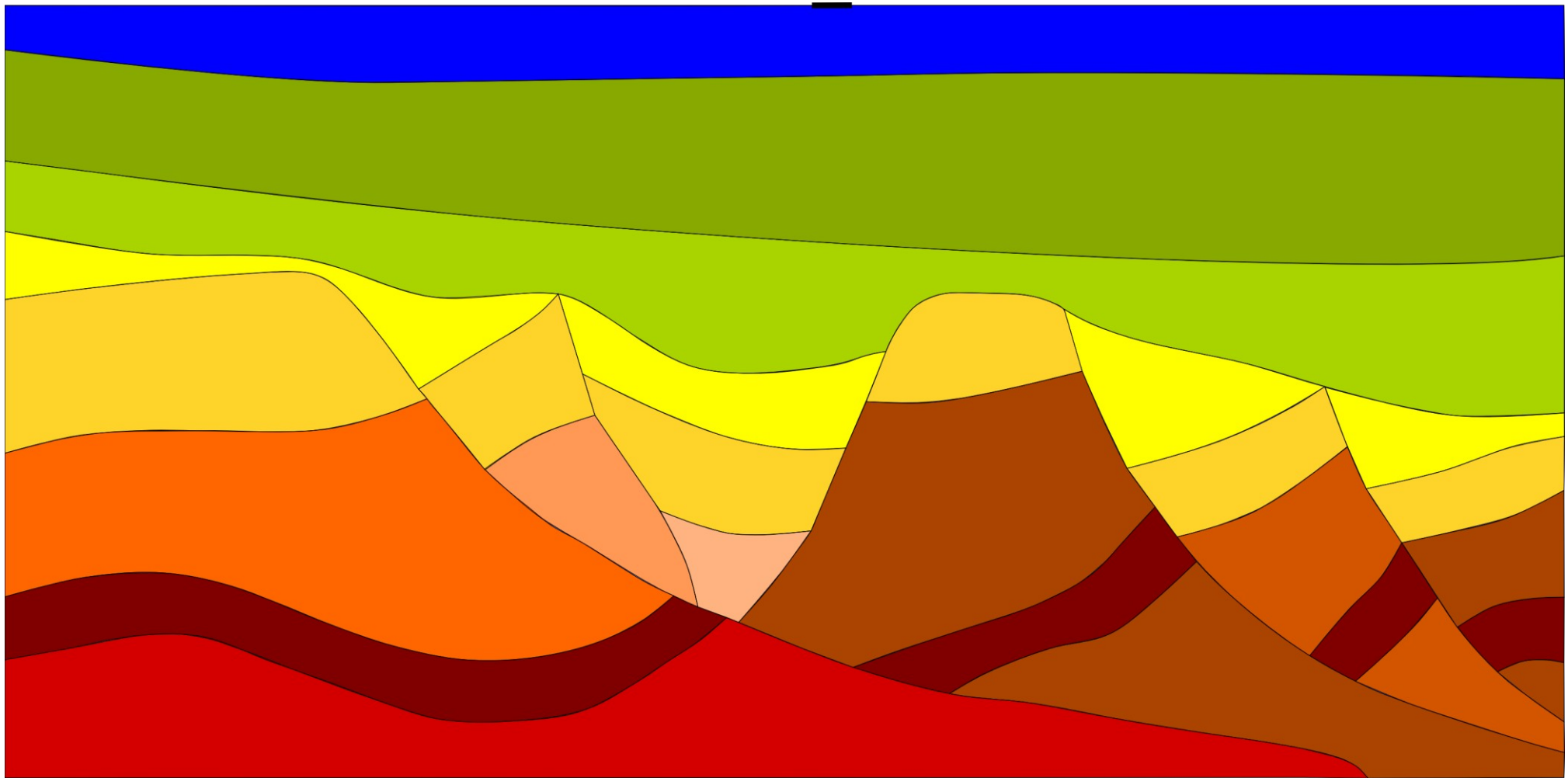
Averaged medium



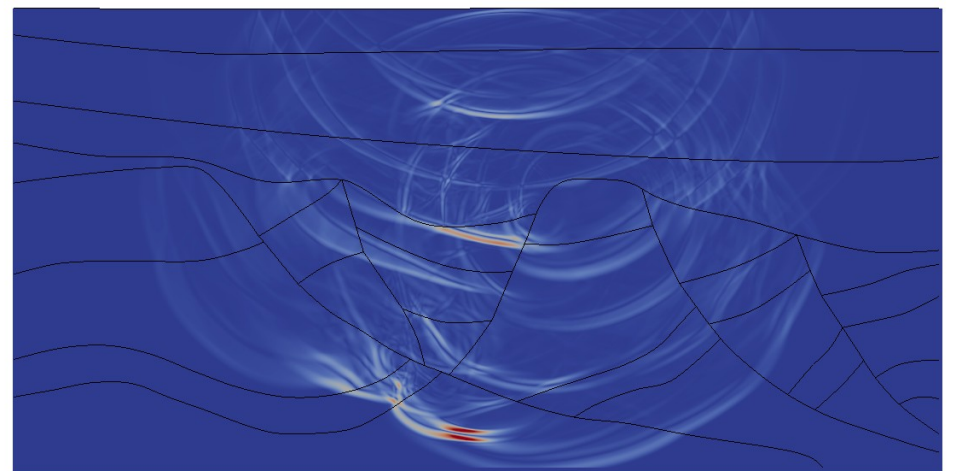
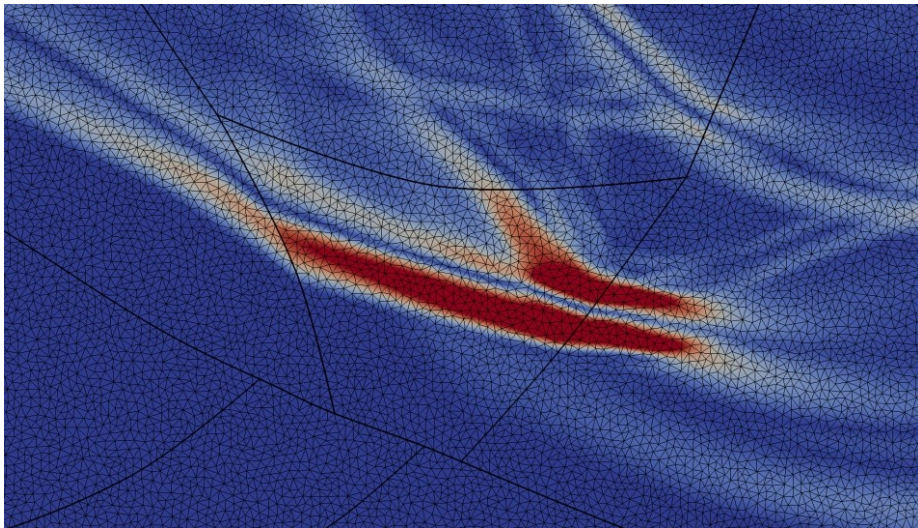
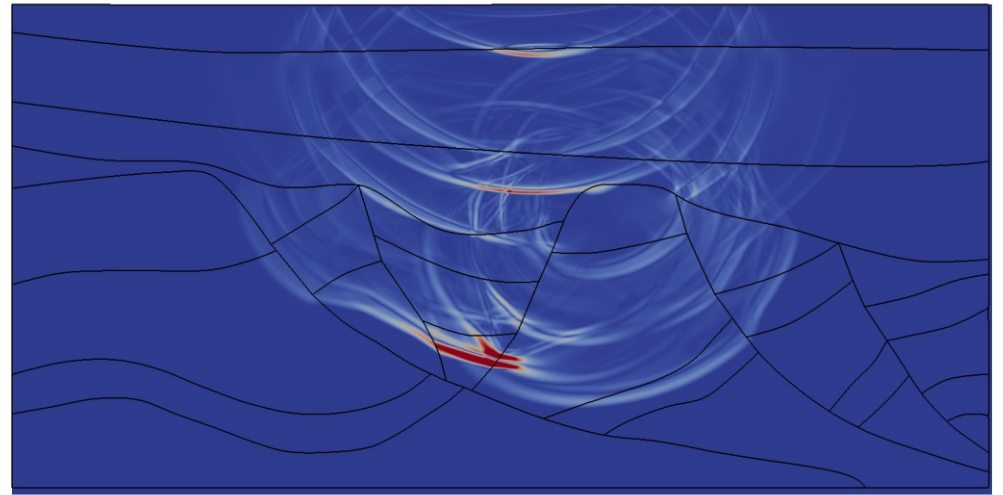
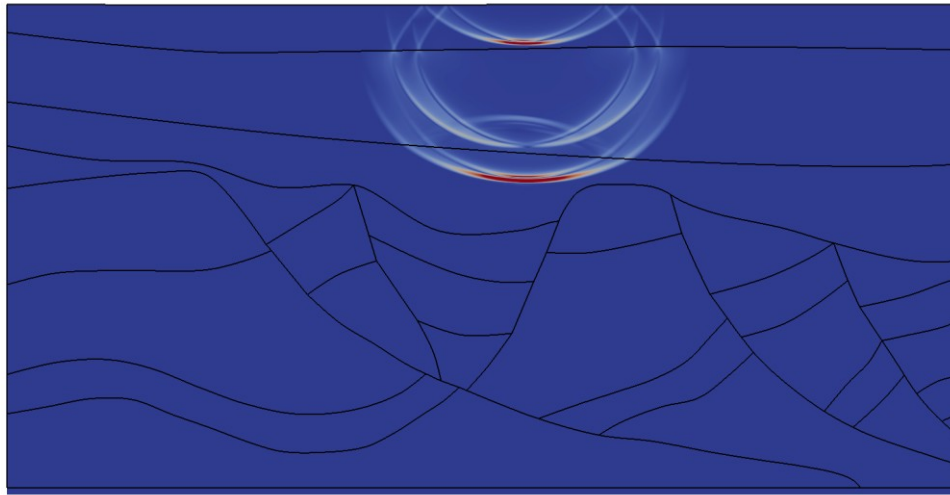
Cluster of cracks and  
cavities



# Геология со сложными границами

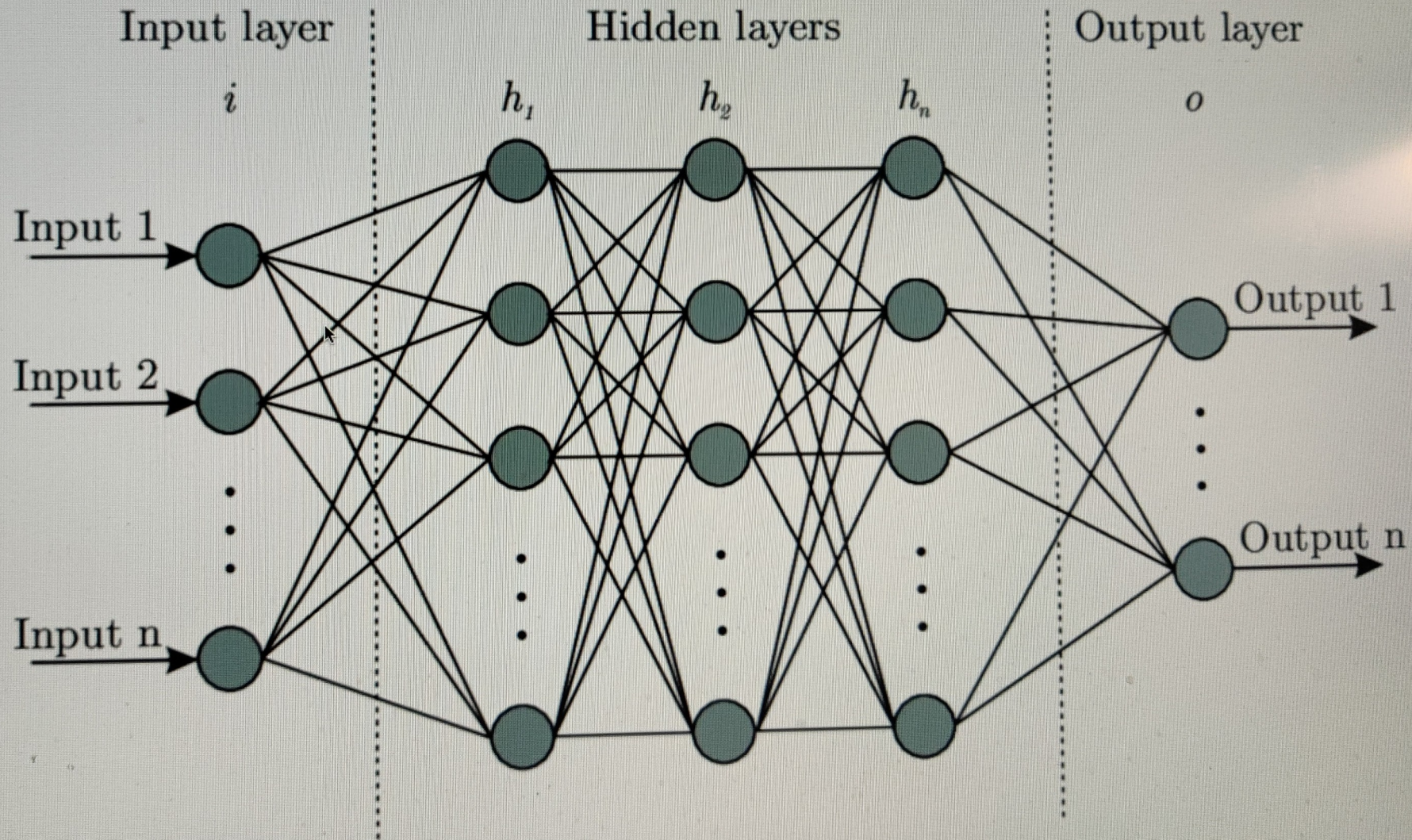


# Геология со сложными границами





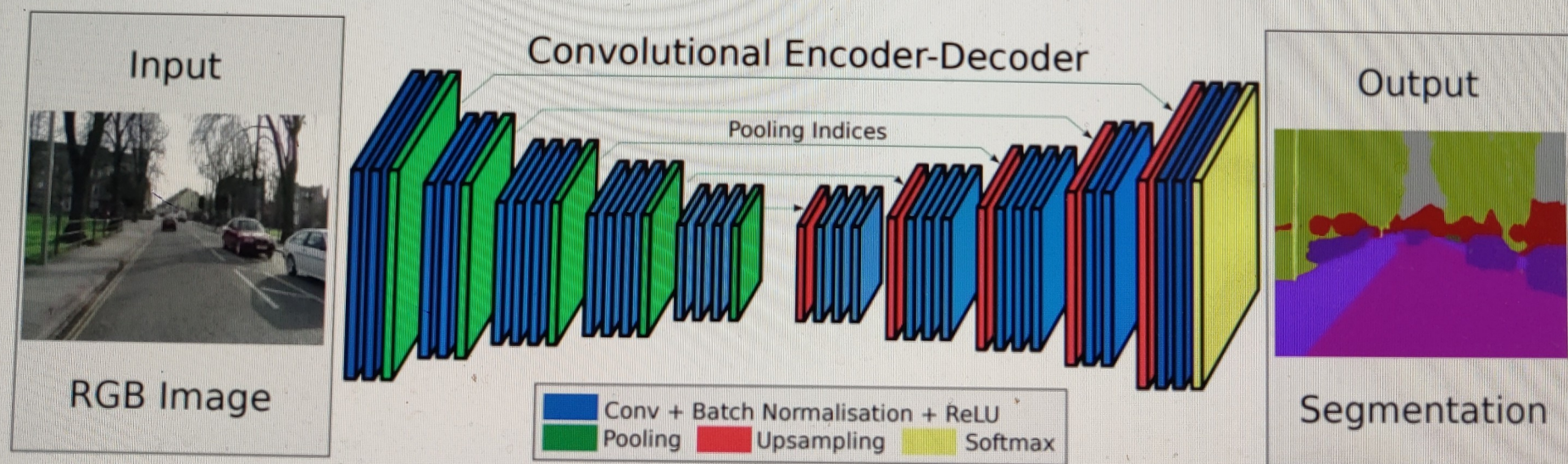
# The structure of neural network





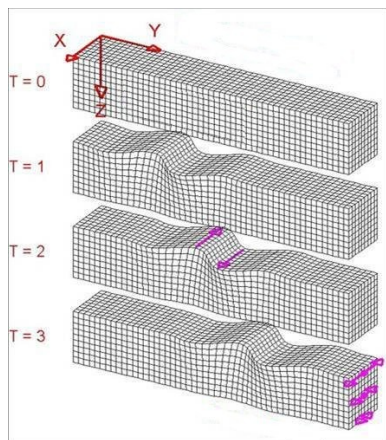
## Определение формы аббератора в 3D.

- Задача сегментации сформированного В-скана или uncompounded pre-beamformed данных.
- Свёрточная сеть архитектуры UNet.
- Обучение на расчётных данных.
- BCE в качестве функционала потерь, оптимизация Adam с постоянной скоростью обучения.

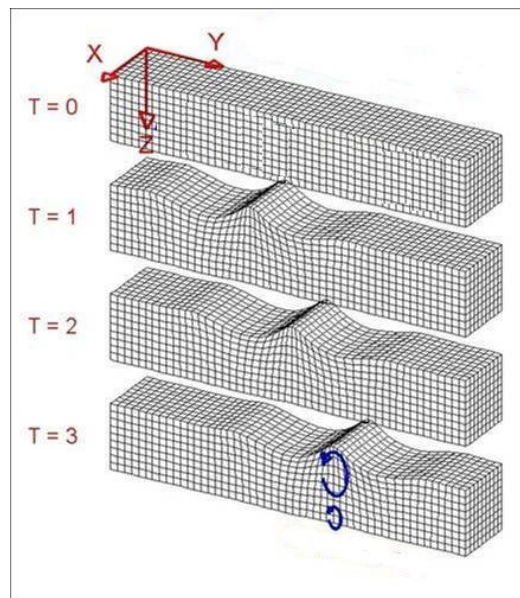
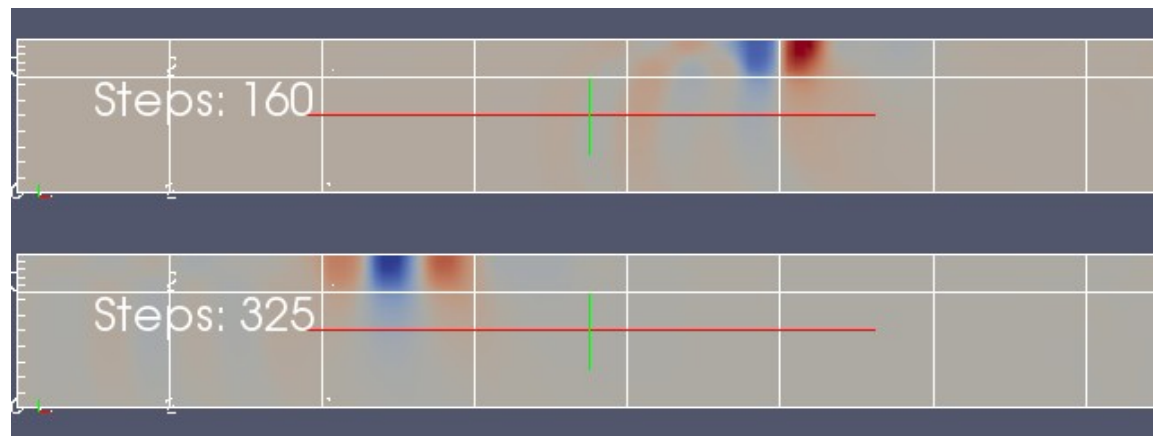




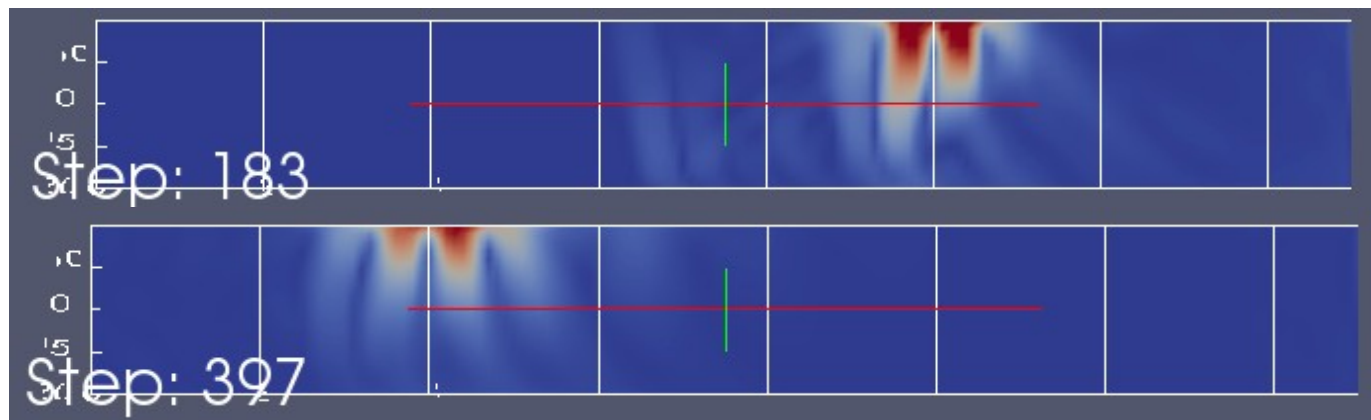
# Волны Лява и Релея



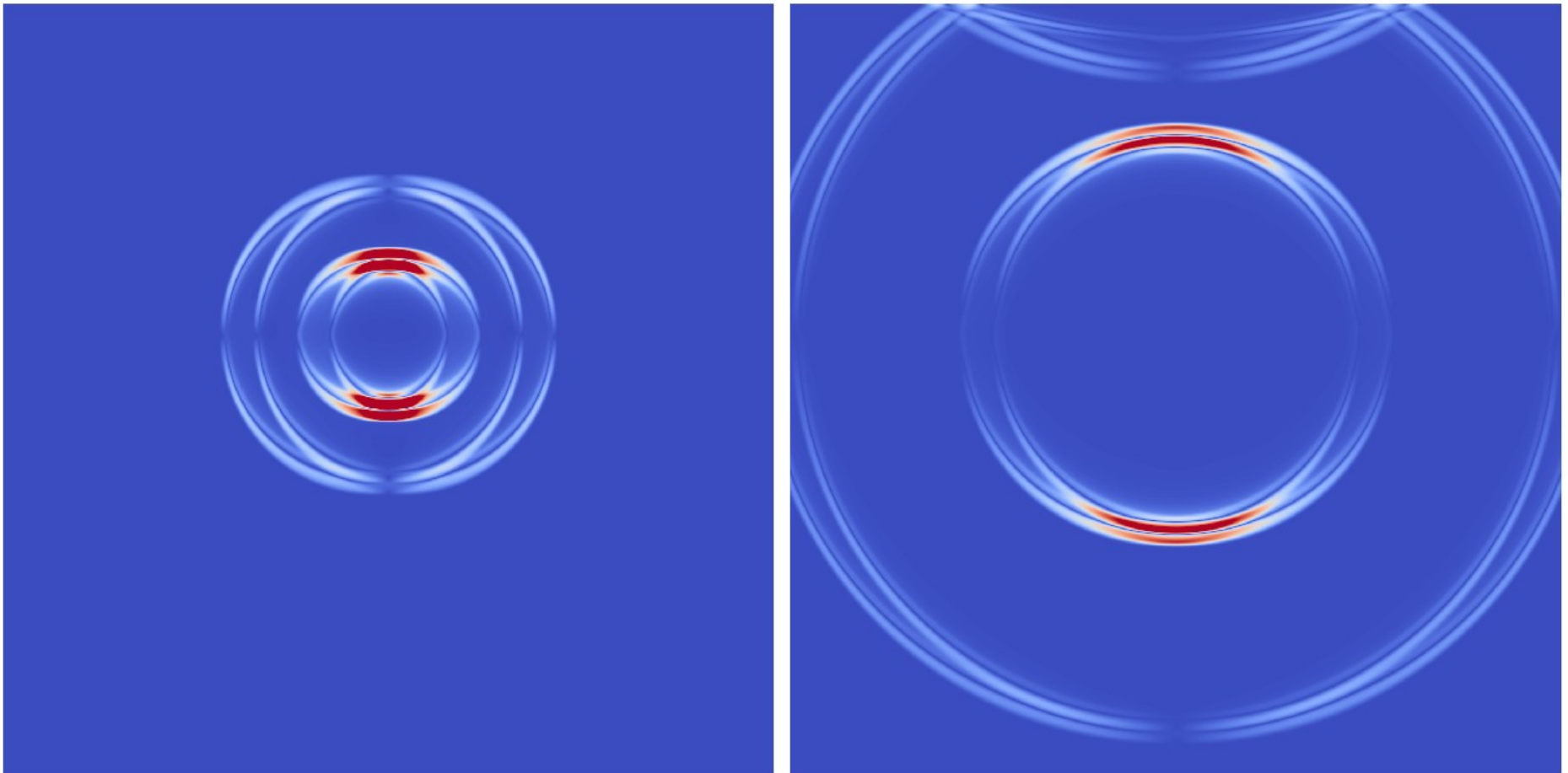
**Волны Лява**



**Волны Релея**

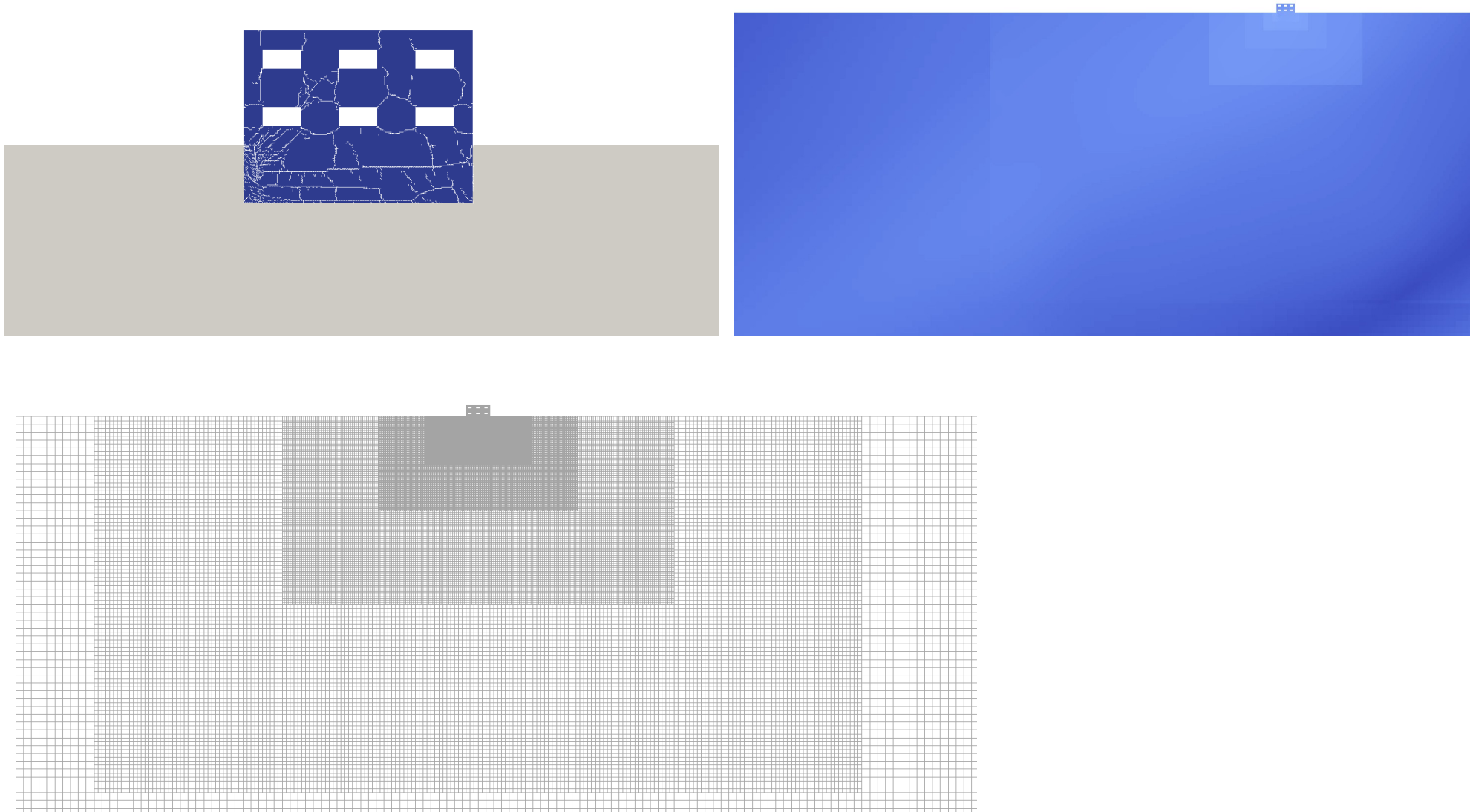


# Расчет воздействия на наземное сооружение сейсмических волн от эпицентра землетрясения





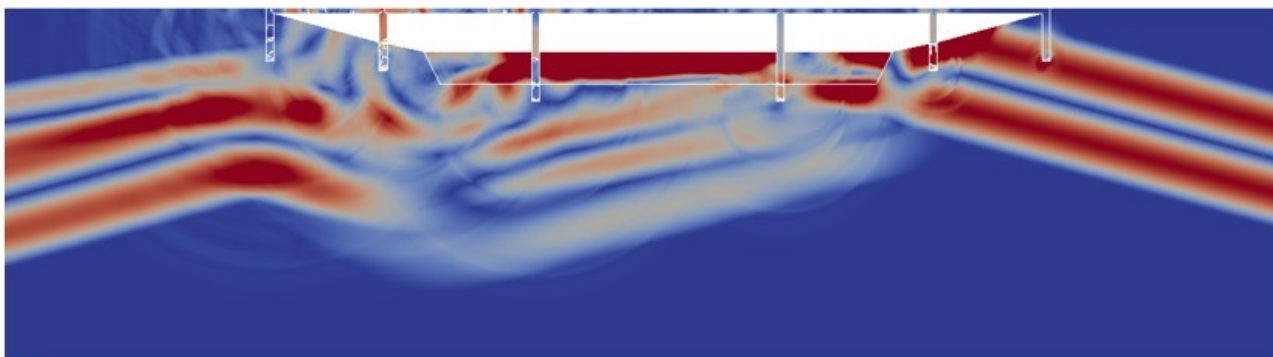
# Seismic stability of the building



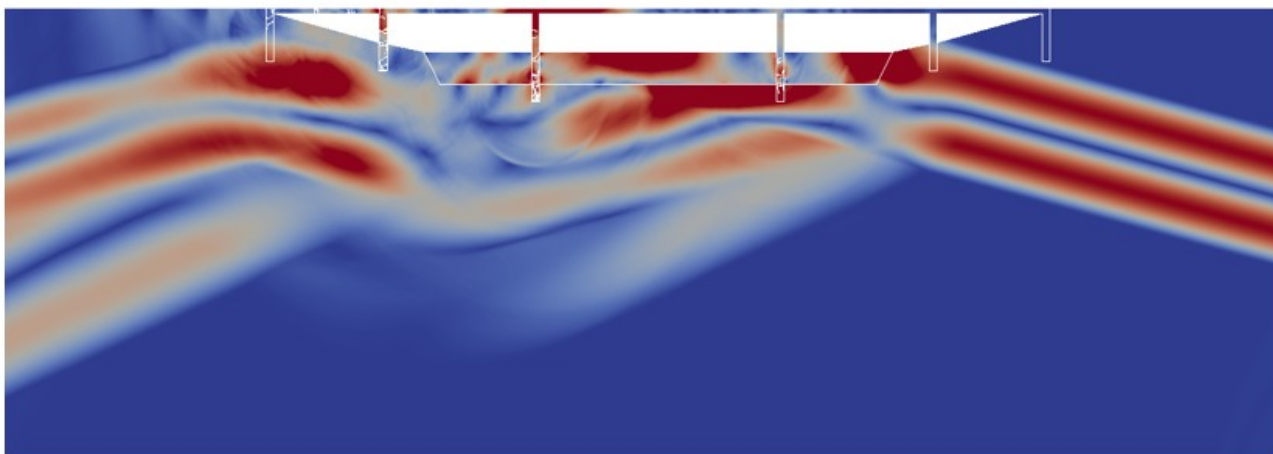
# Прочность конструкций

## Bridge over a River

### River Width, Wave Patterns



❖ Plane P-wave initial conditions



❖ Plane S-wave initial conditions

Dr Alena  
FAVORSKAYA

idt20-15



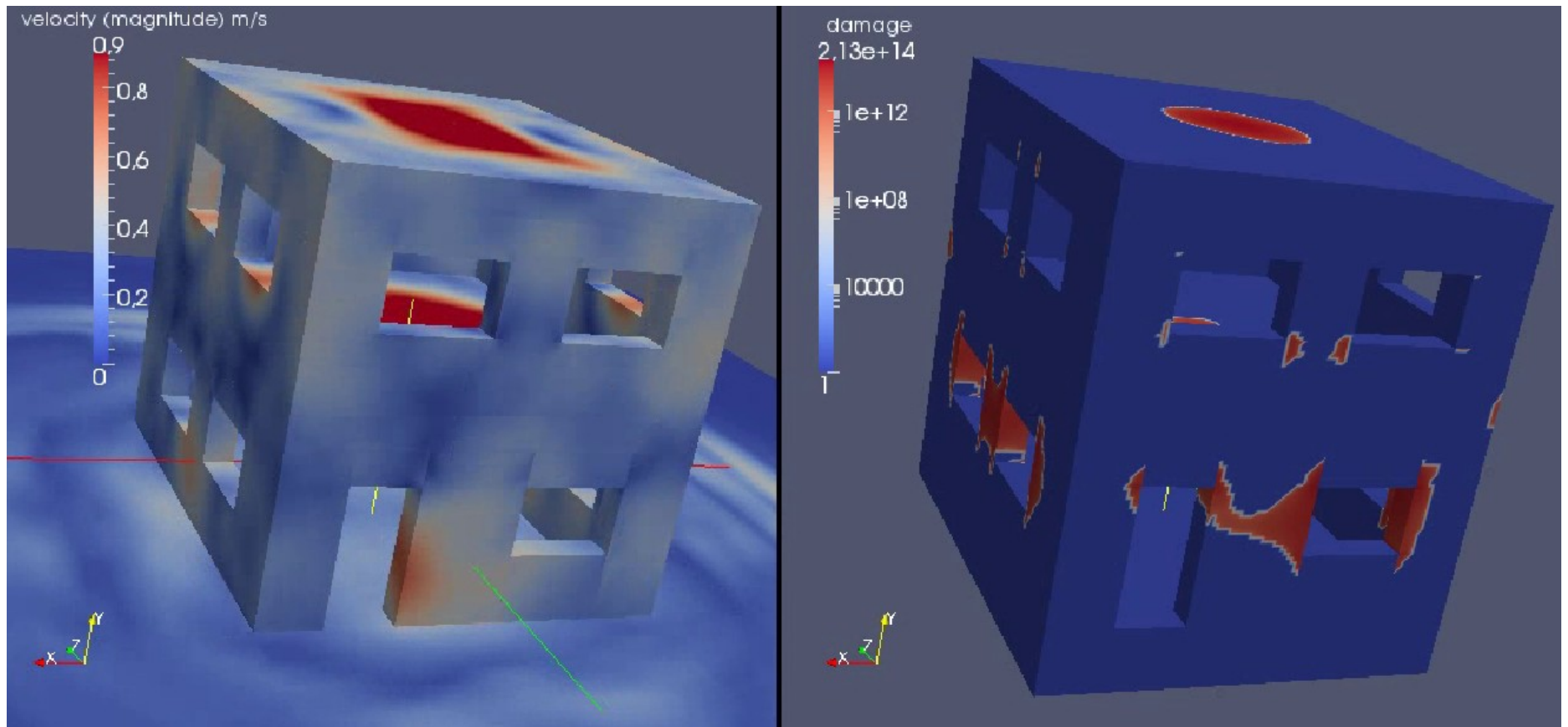
32/34



KES  
IDT  
2020

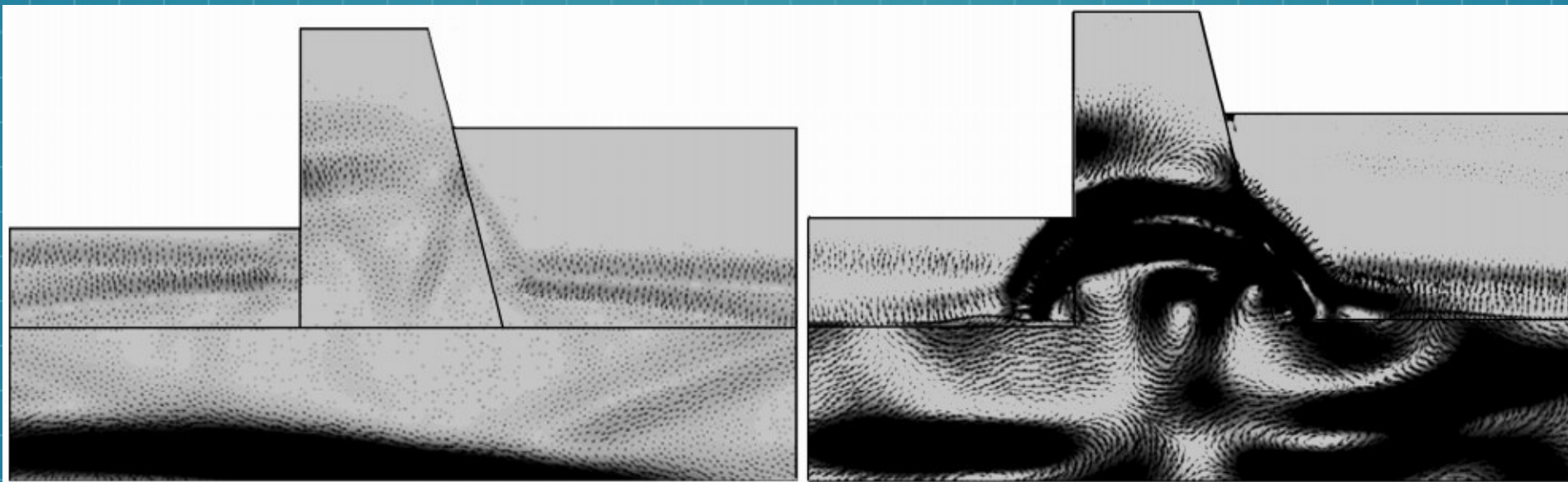


# Seismic stability of the building



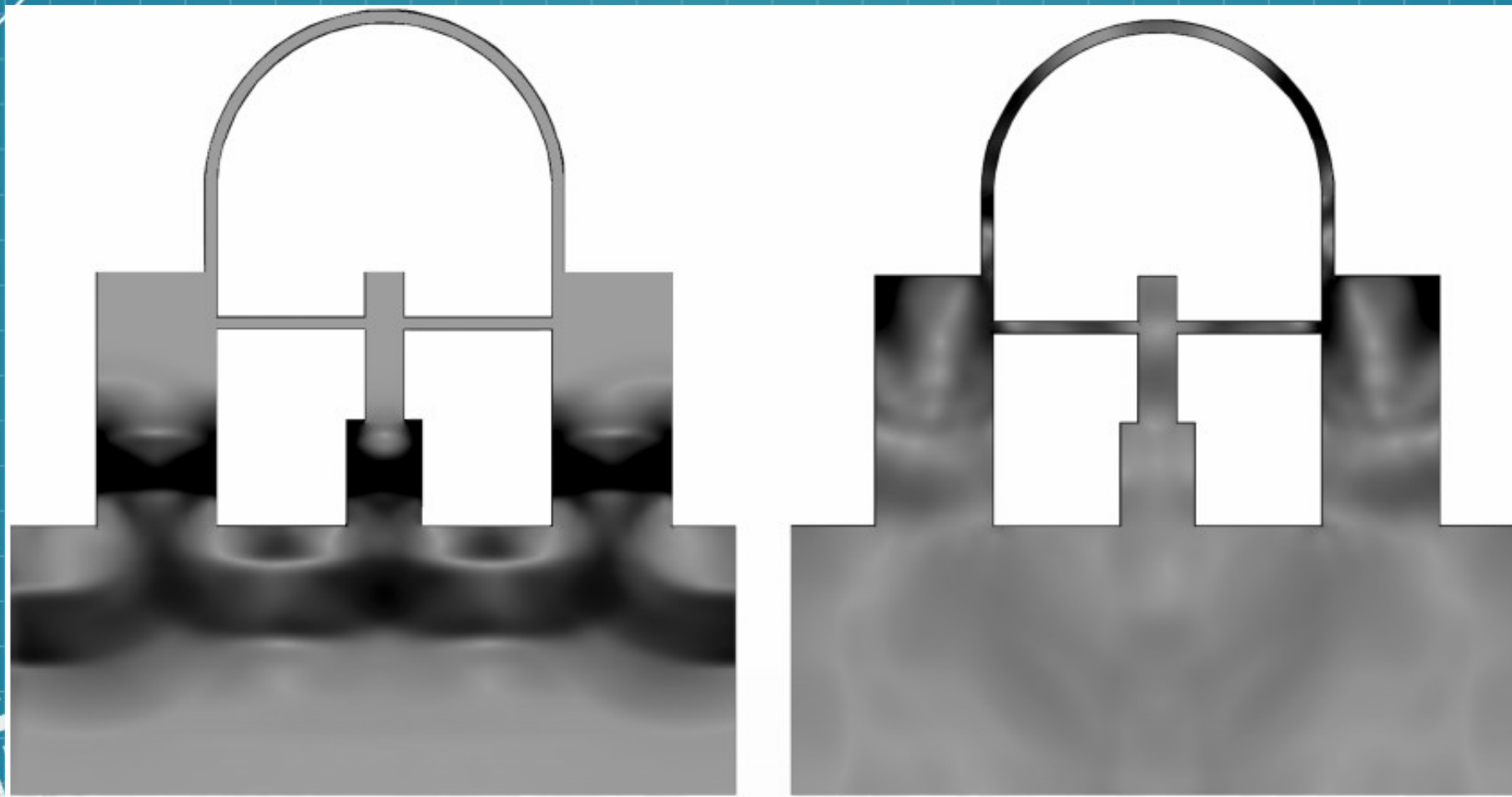
Absolute velocity (left) and destruction zones (right) in red

# Динамические процессы в наземных сооружениях



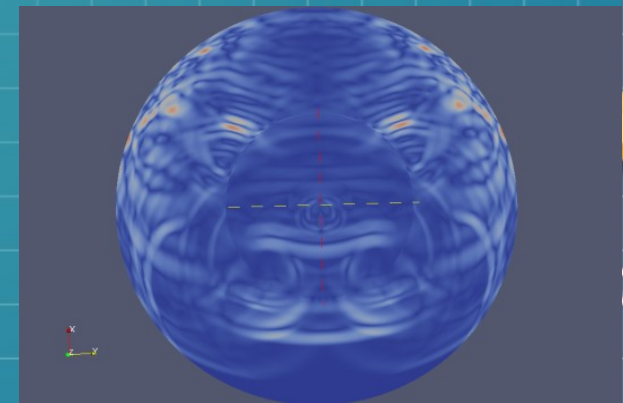
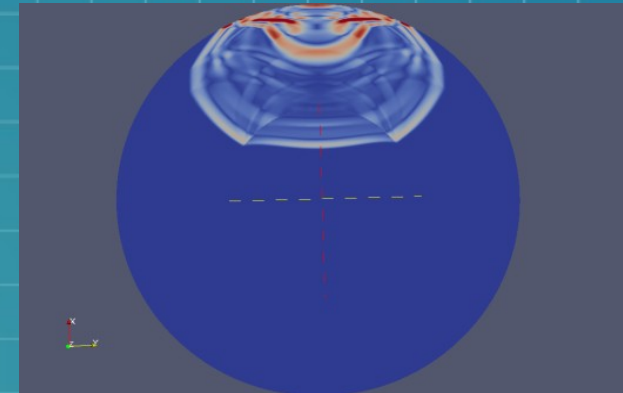


# Динамические процессы в наземных сооружениях



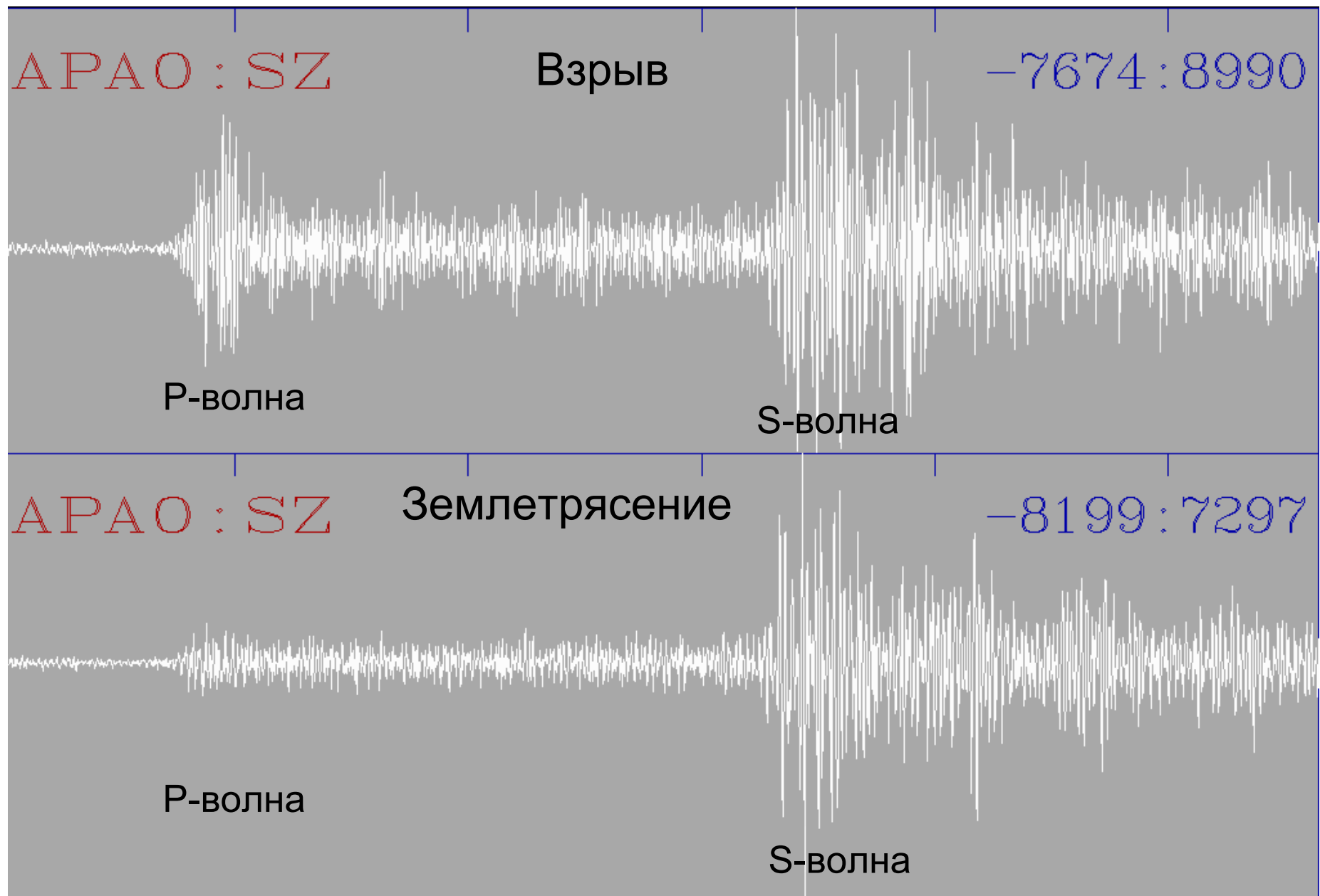
# Сейсмические процессы в недрах планеты

Слой	Внешний радиус	Внутренний радиус	Плотность среды	Продольная скорость	Поперечная скорость
1	6370	5870	4000	5000	3000
2	5870	5370	4000	10000	5100
3	5370	3000	5000	13000	6500
4	3000	1000	11000	9000	100
5	1000	0	12000	10200	3500





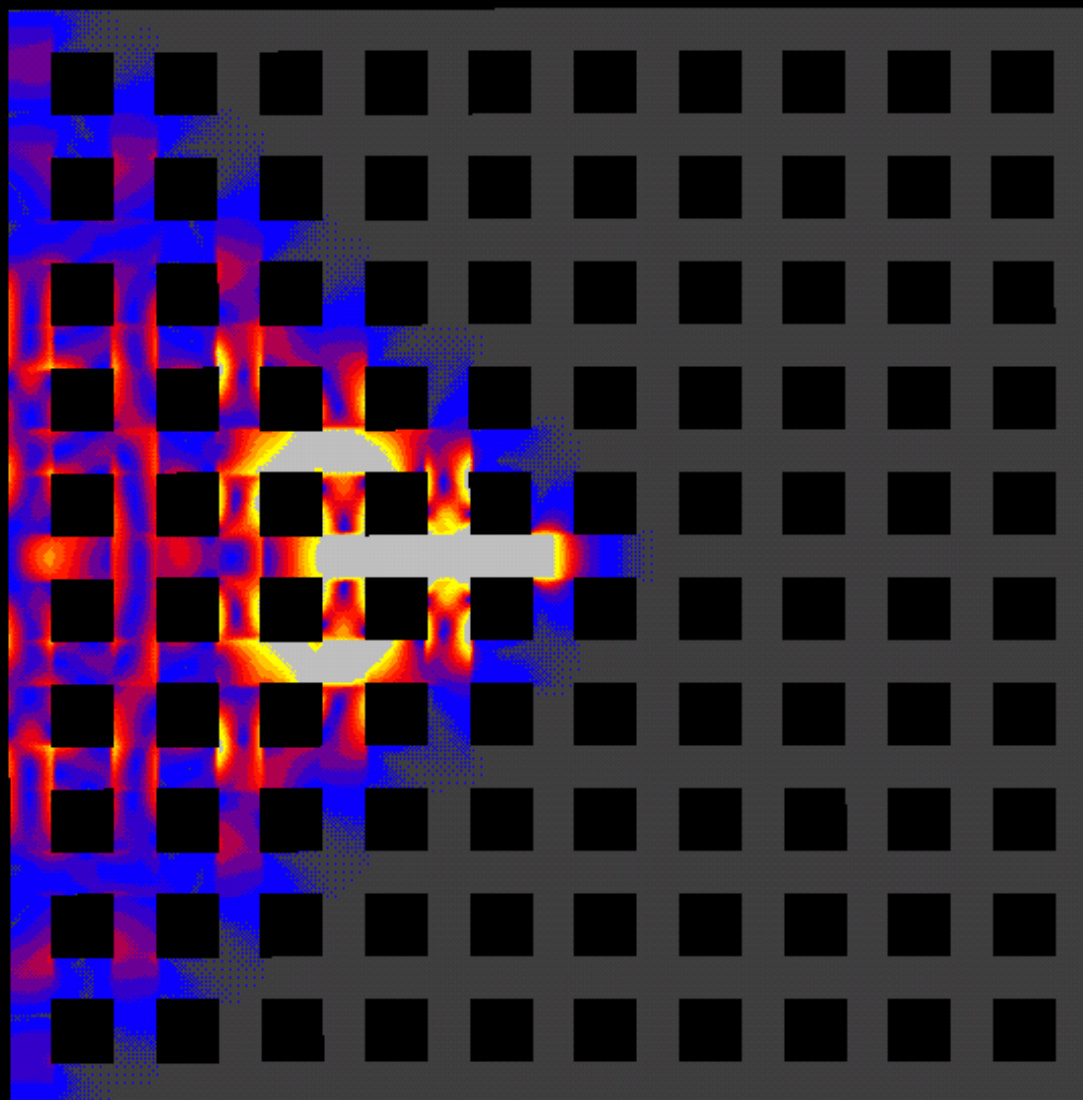
# Сравнение реальных сейсмограмм взрыва и землетрясения



# Взрыв в перфорированной конструкции

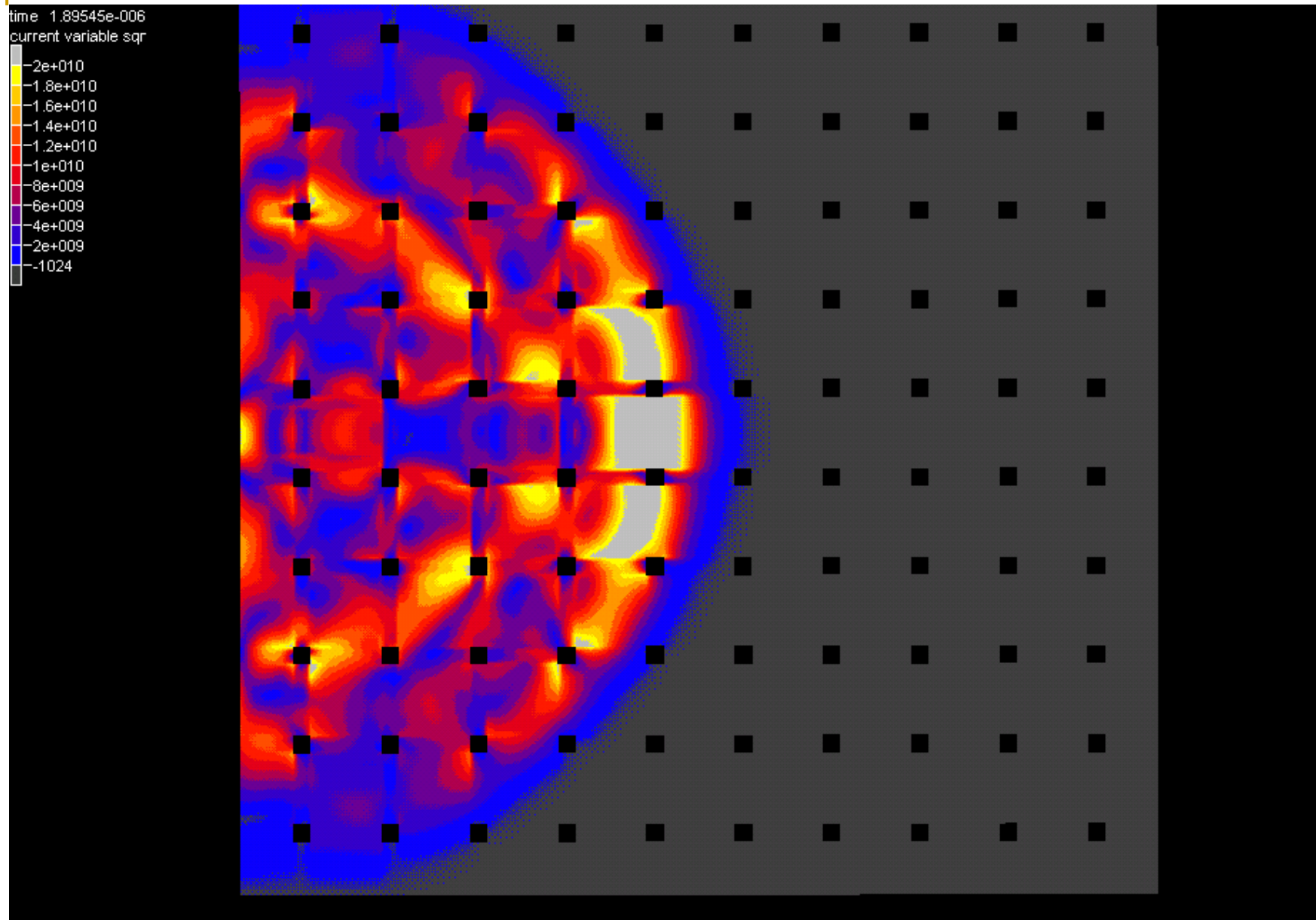
time 1.95468e-006  
current variable sqe

-2e+010  
-1.8e+010  
-1.6e+010  
-1.4e+010  
-1.2e+010  
-1e+010  
-8e+009  
-6e+009  
-4e+009  
-2e+009  
-1024

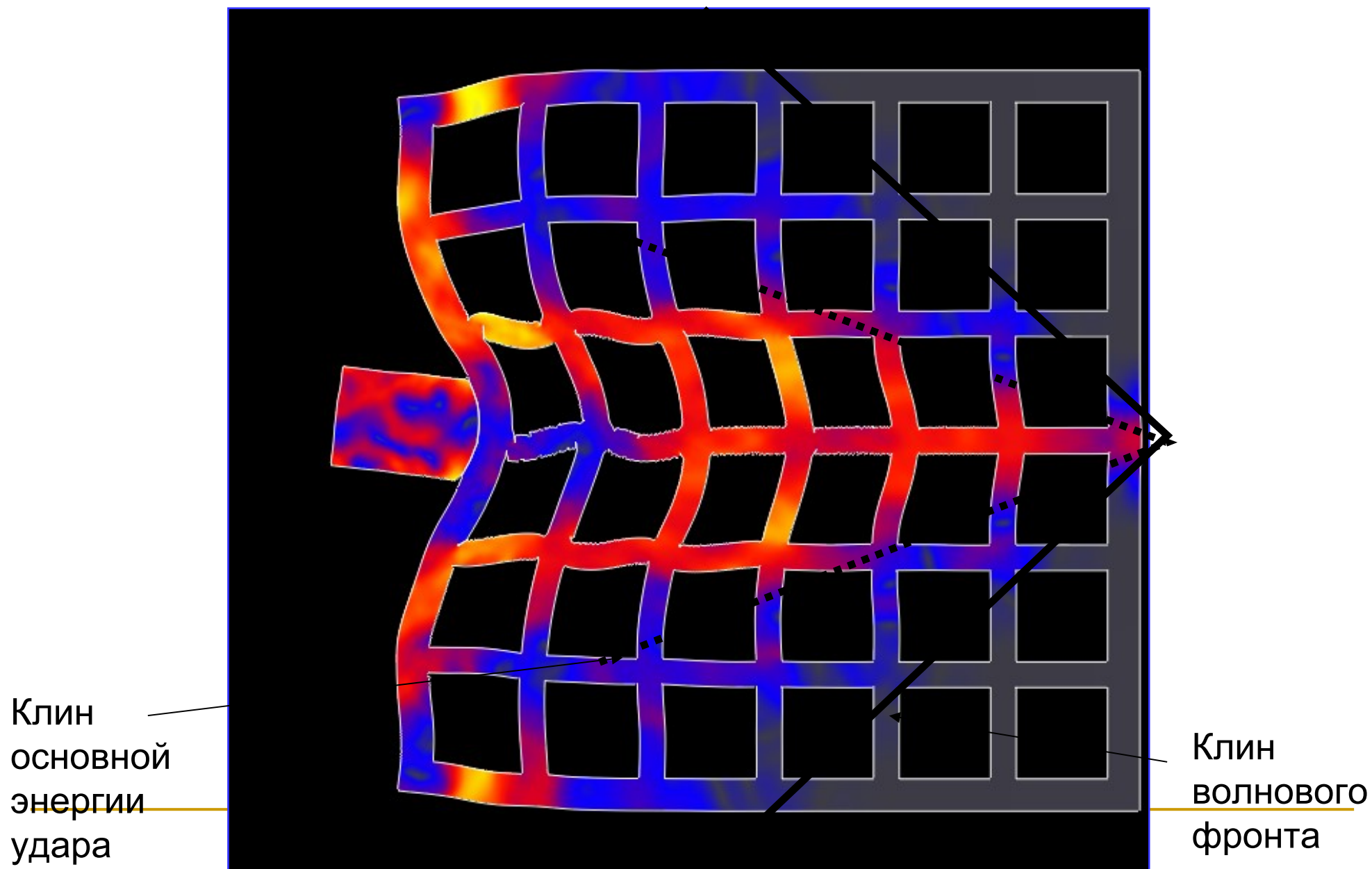




# Взрыв в перфорированной конструкции

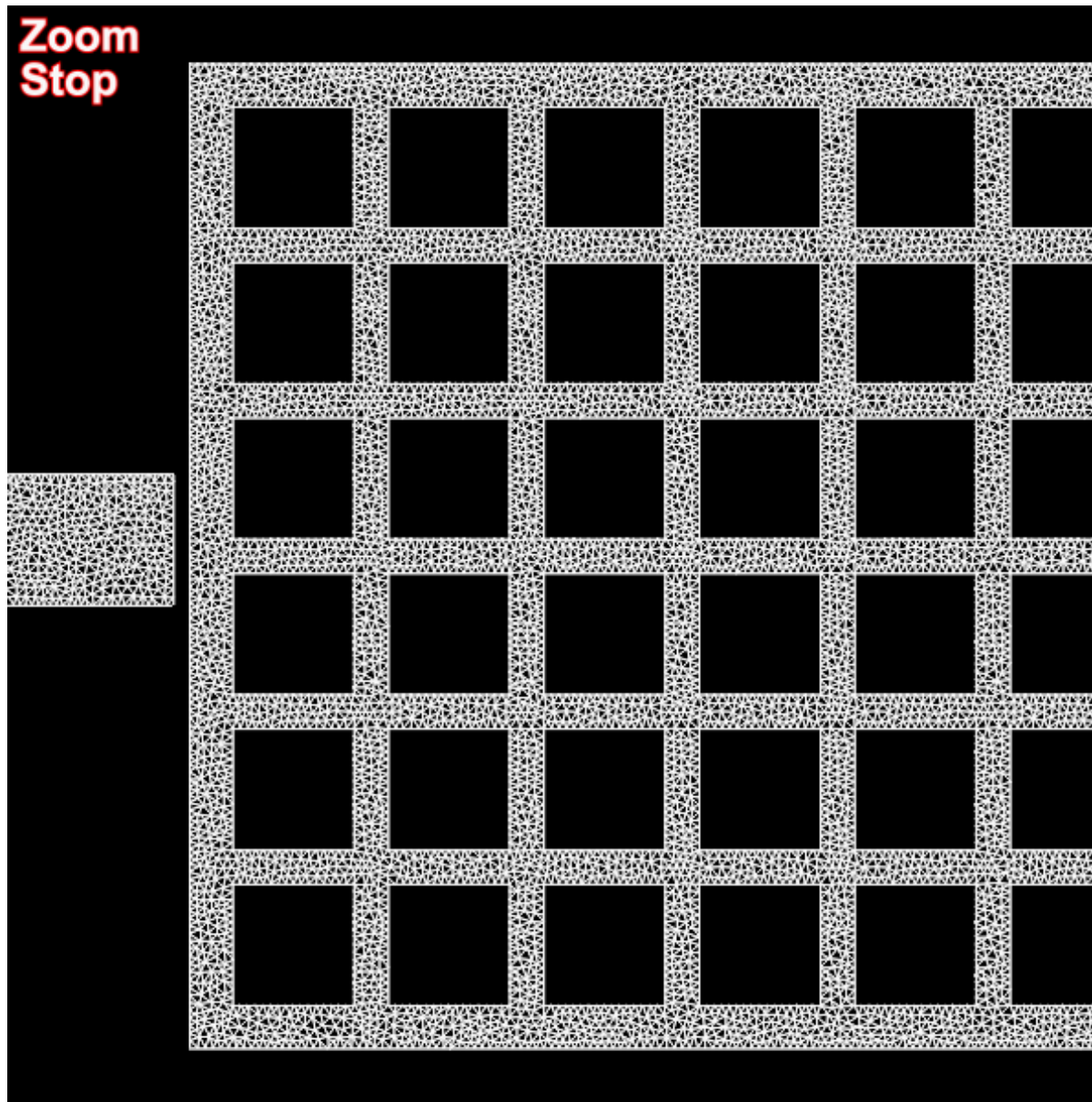


# Задача о соударении с перфорированной конструкцией

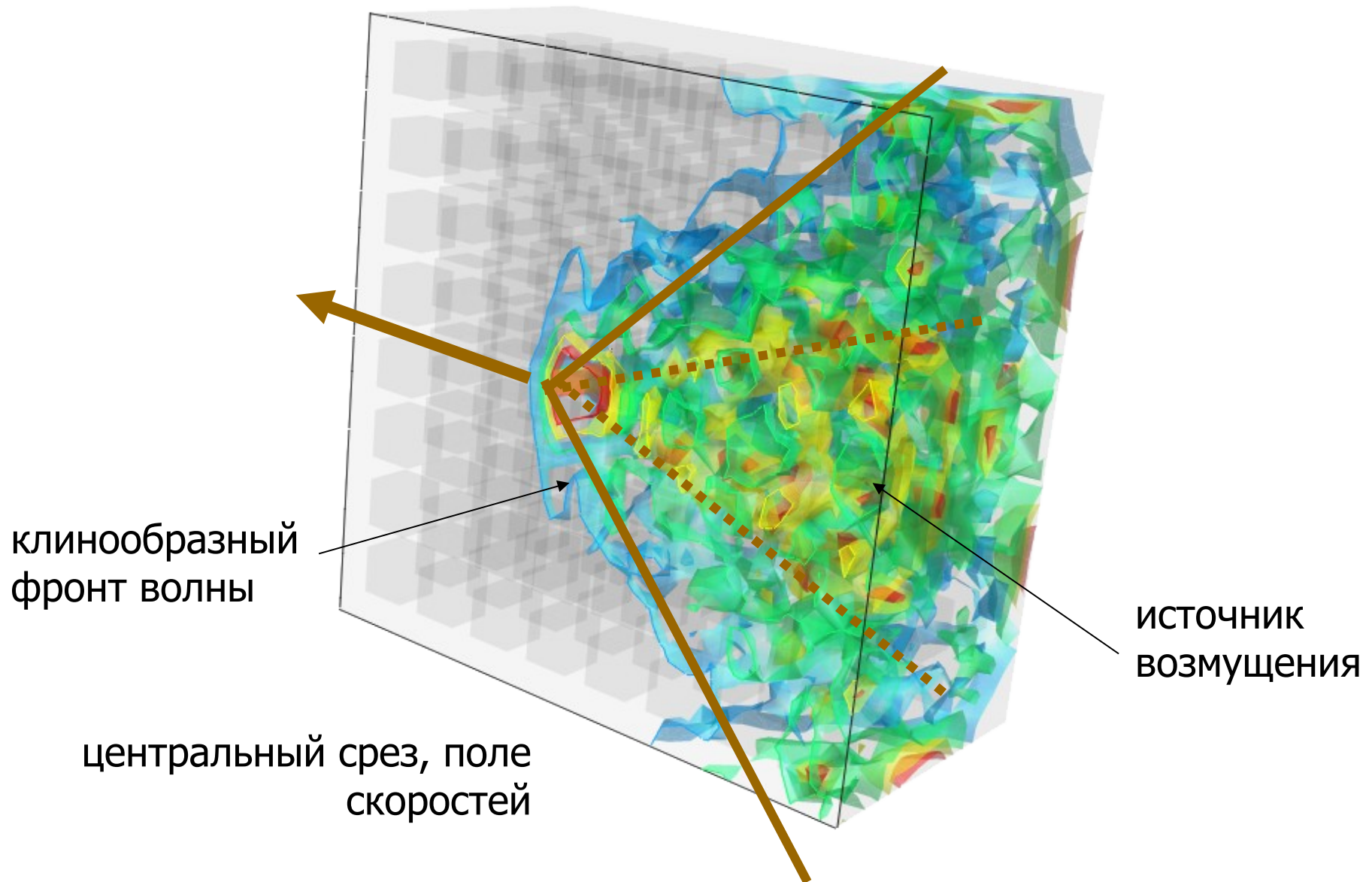




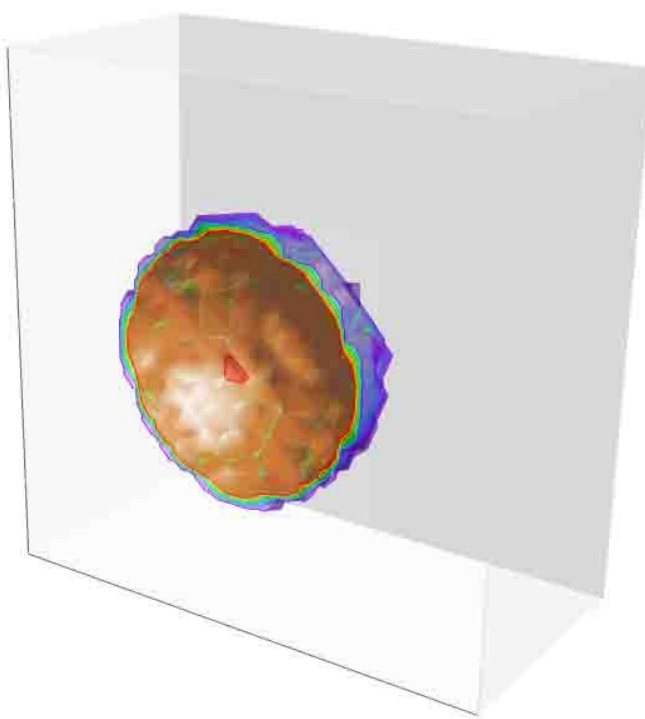
# Столкновение с перфорированной структурой



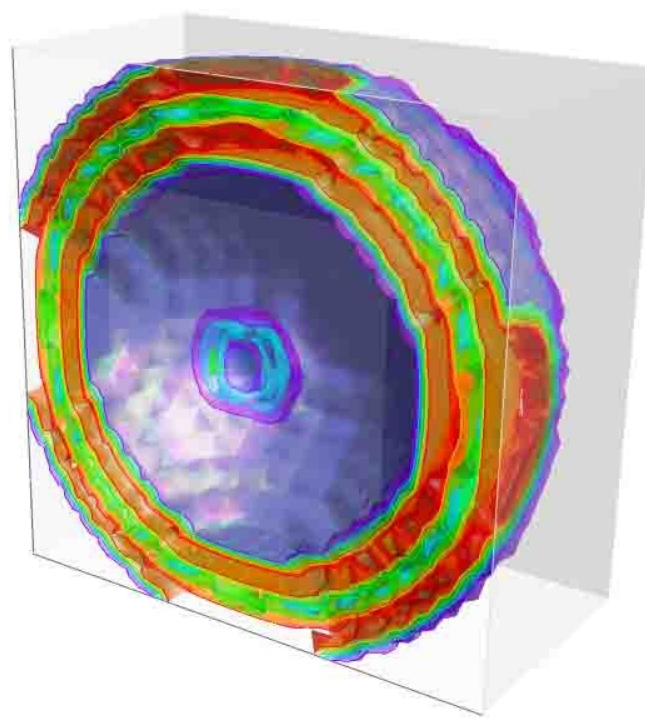
# Перфорированная среда (3D)



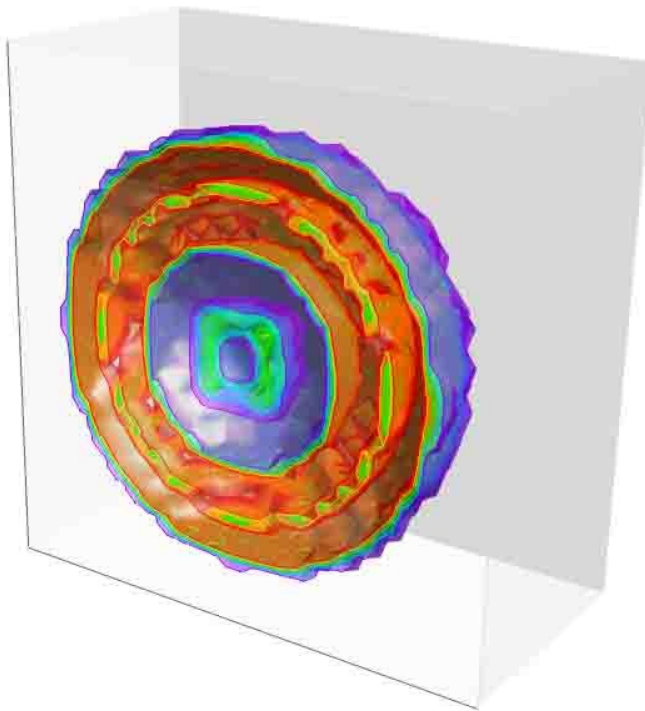




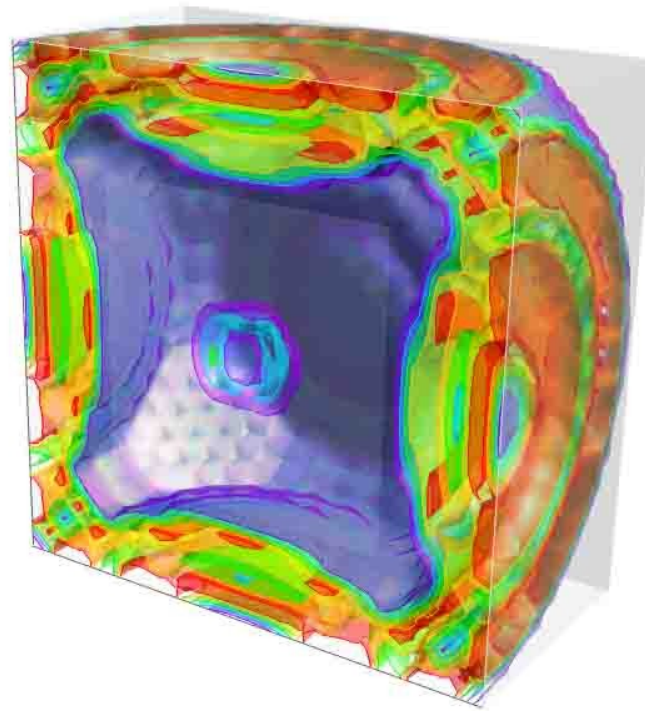
$$t/t_{\max} = 0.15$$



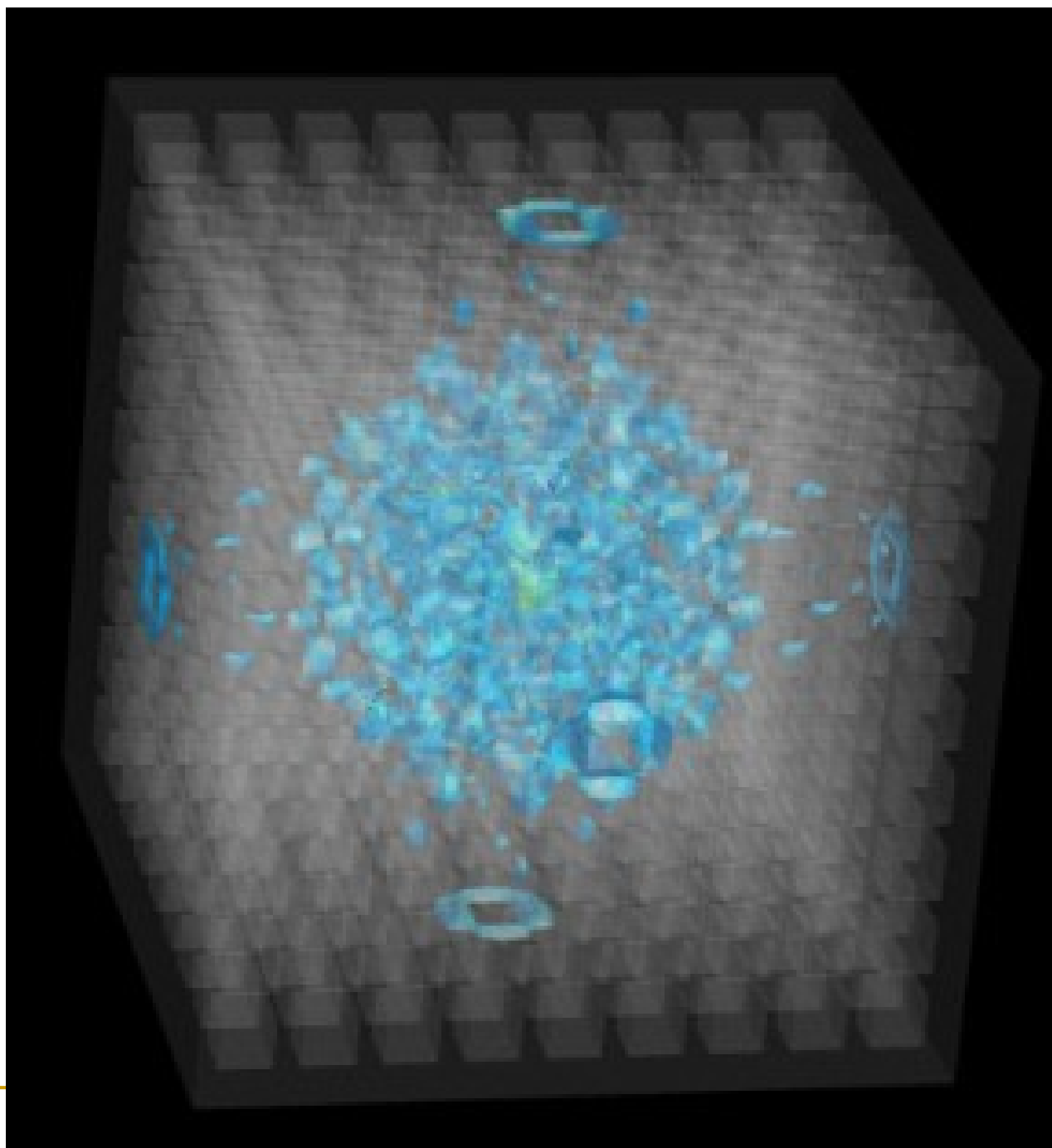
$$t/t_{\max} = 0.45$$



$$t/t_{\max} = 0.30$$

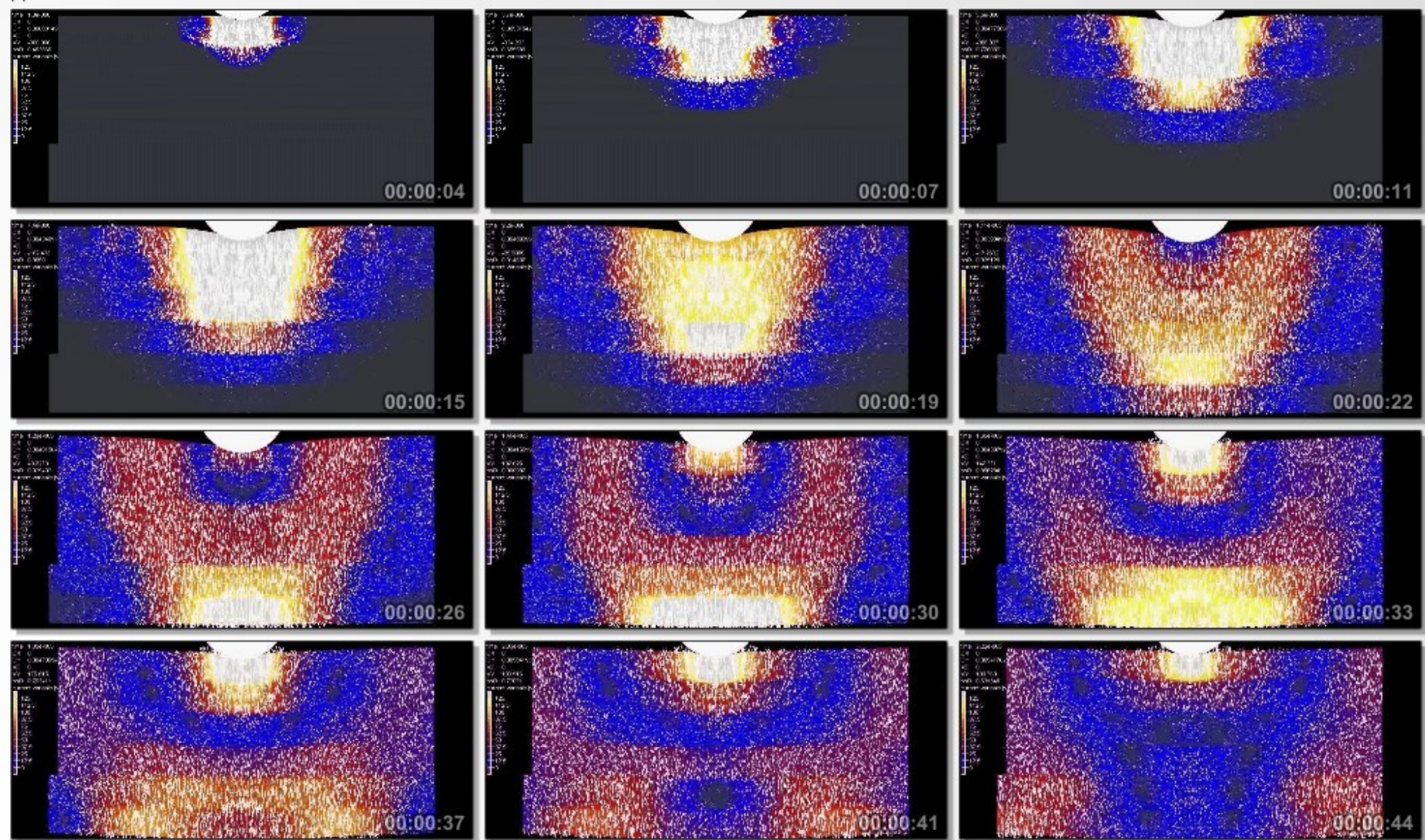


$$t/t_{\max} = 0.60$$



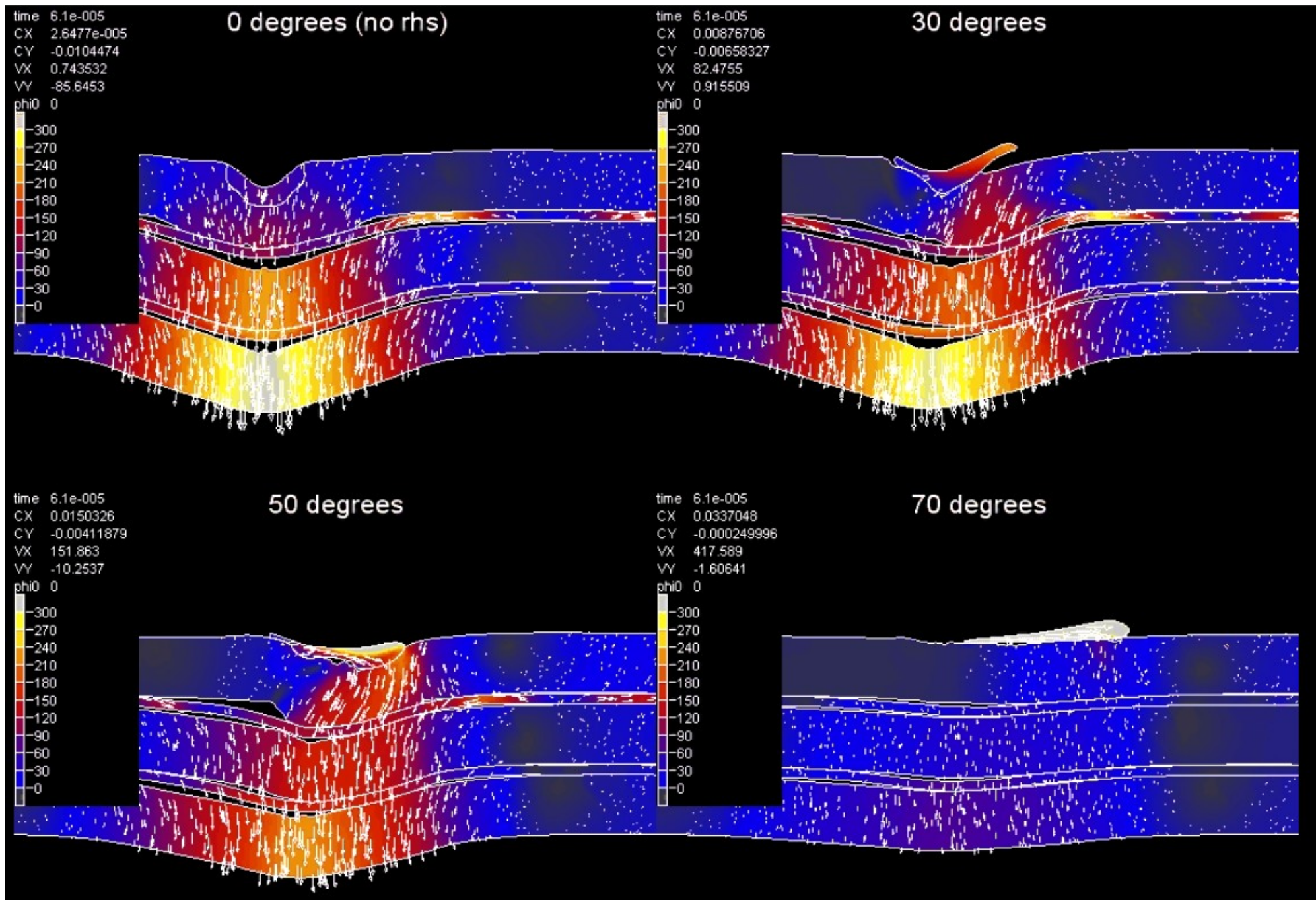


# Multilayer glass

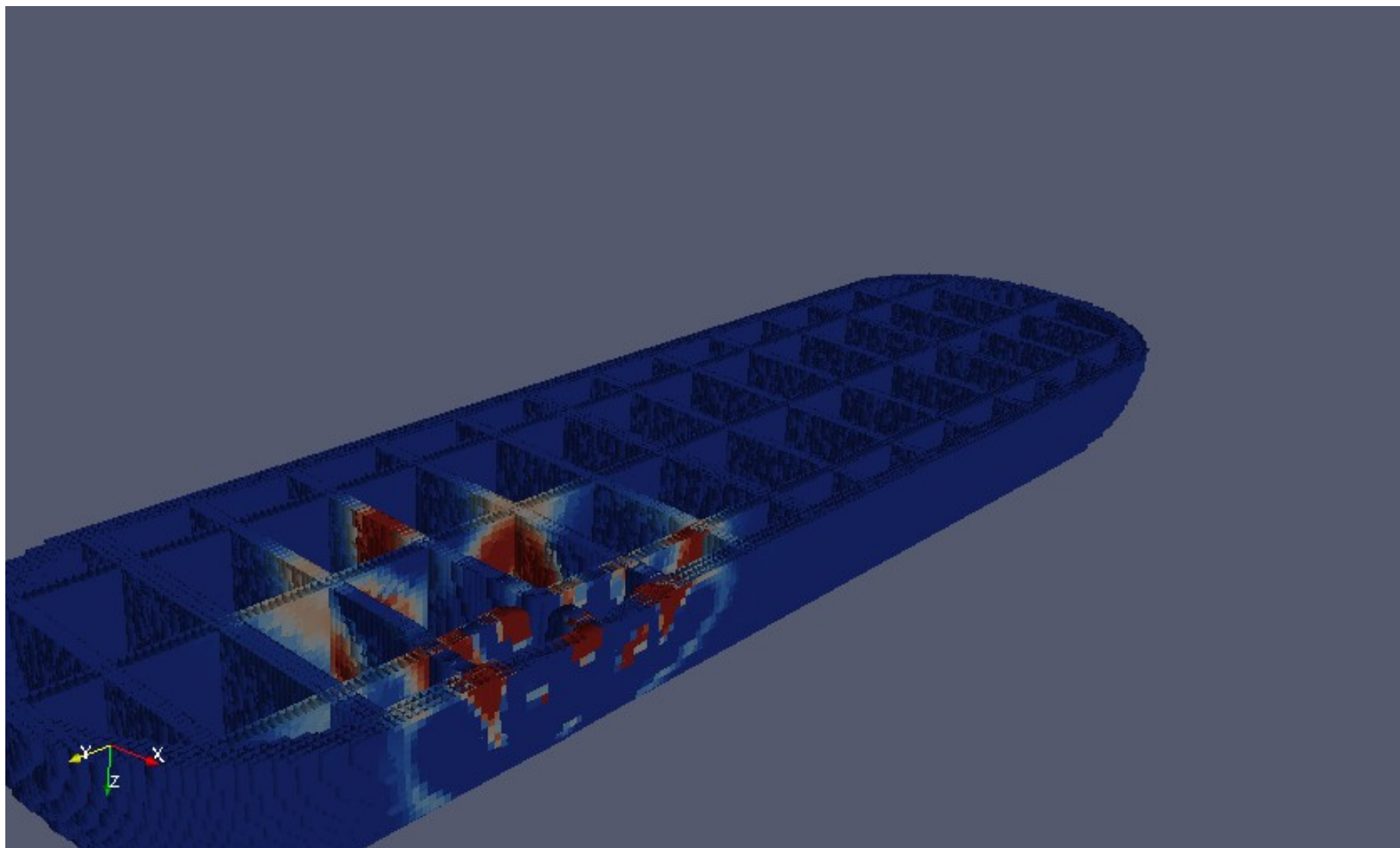




# Многослойный композит: зависимость от угла соударения







# Моделирование структуры (матрицы и волокон)

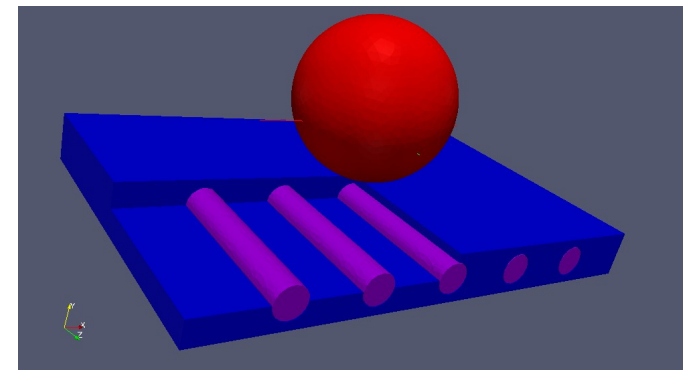
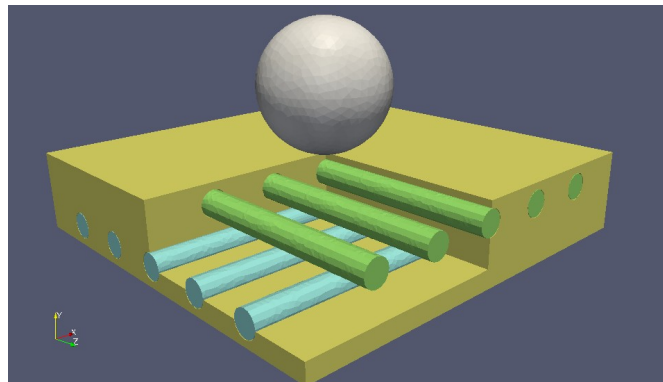
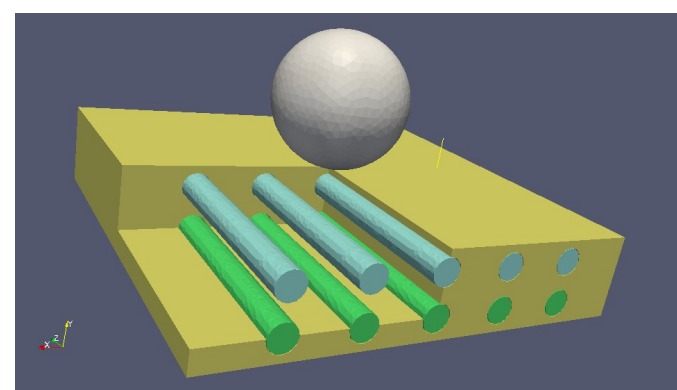
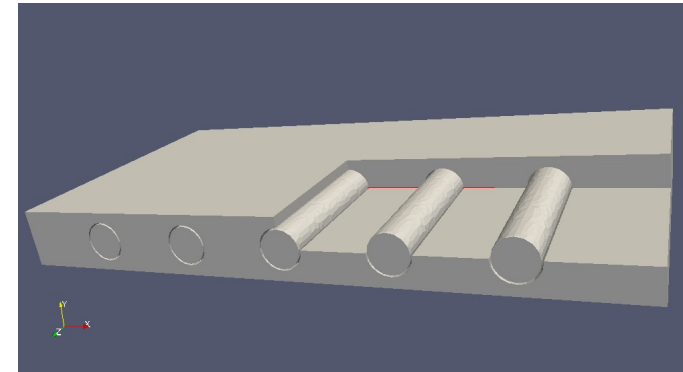
- ☐ Начальные условия — напряжения отсутствуют, конструкция покоится.
- ☐ Граничные условия — свободная граница.
- ☐ Контактные условия — трение между ударником и конструкцией,  $k=0.1$ .
- ☐ Внутренние границы — полное слипание с возможностью разрушения.
- ☐ Энергия удара — 1.25, 12.5 и 125 Дж.

Один слой волокон:

- ☐ а. реальные параметры материала;
- ☐ б. однородный материал.

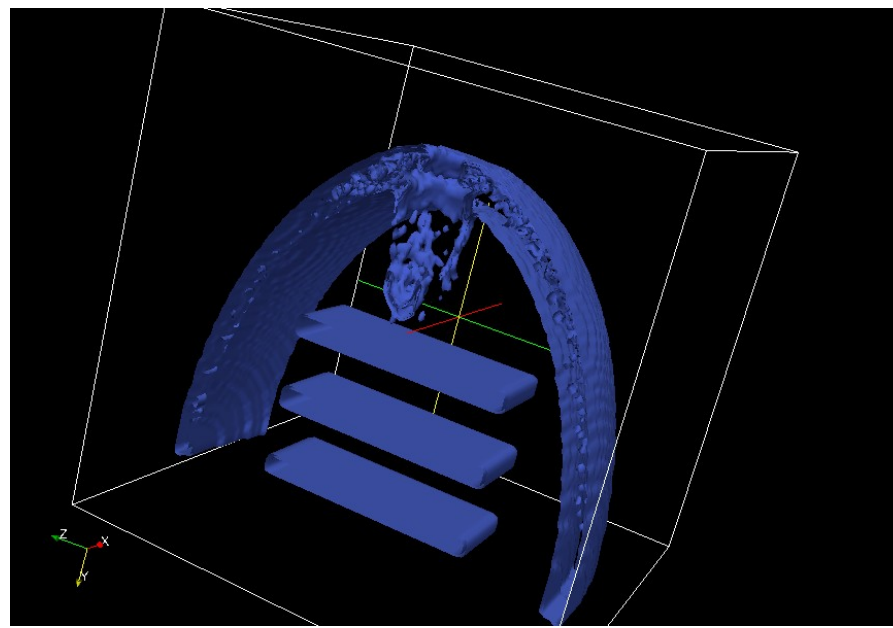
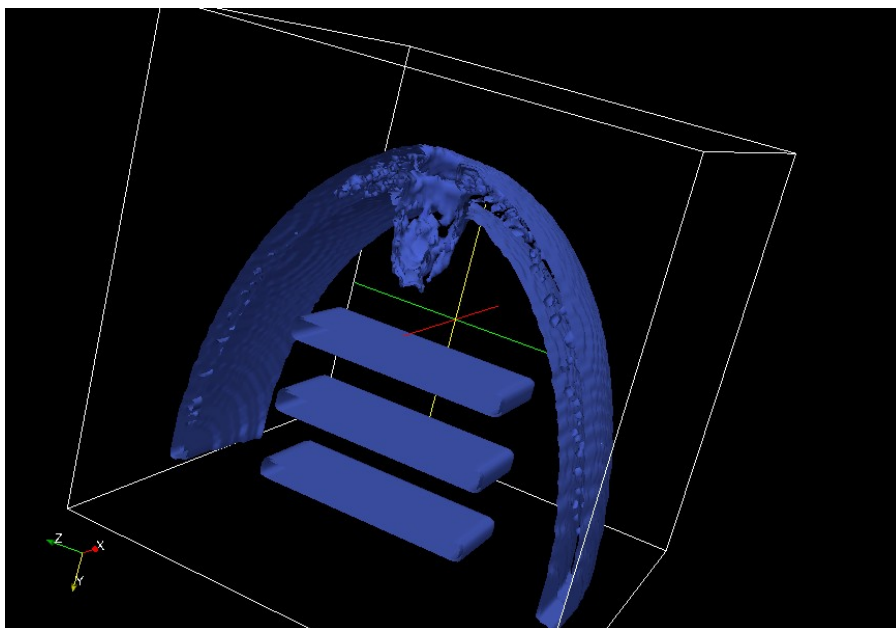
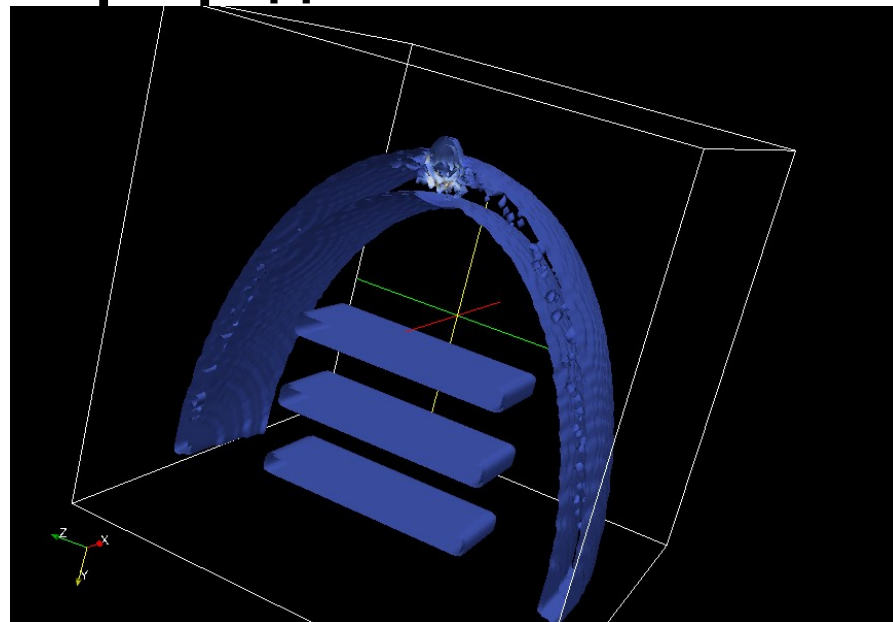
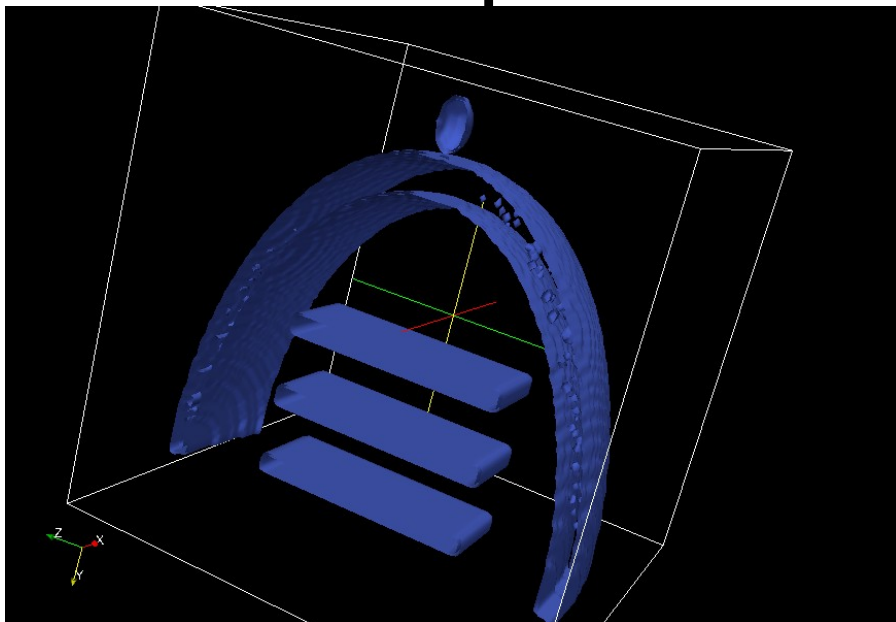
Два слоя волокон:

- ☐ а. параллельные слои;
- ☐ б. скрещенные слои.

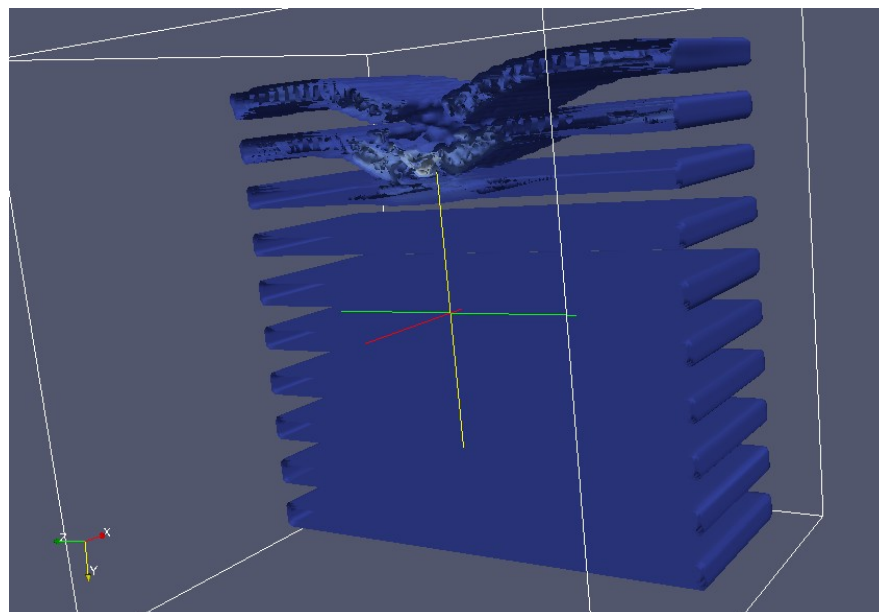
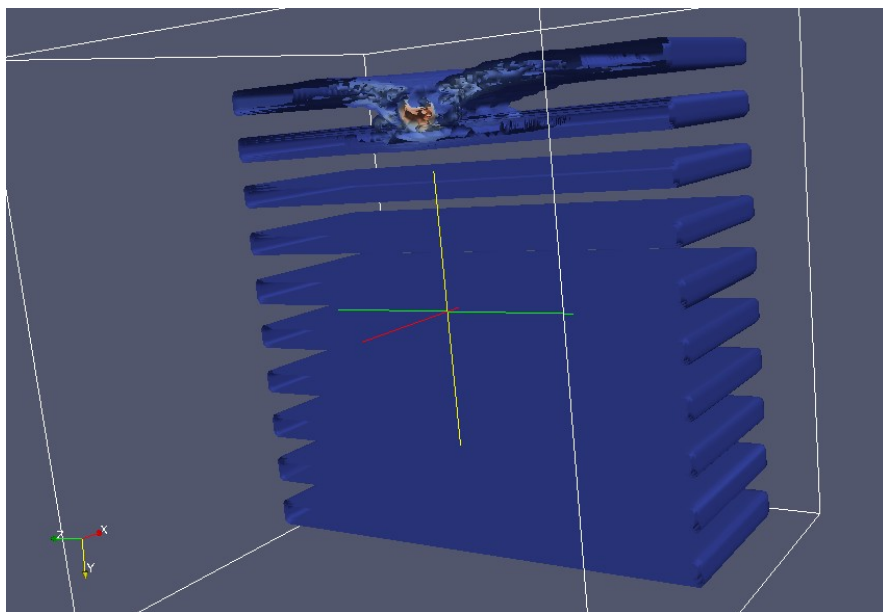
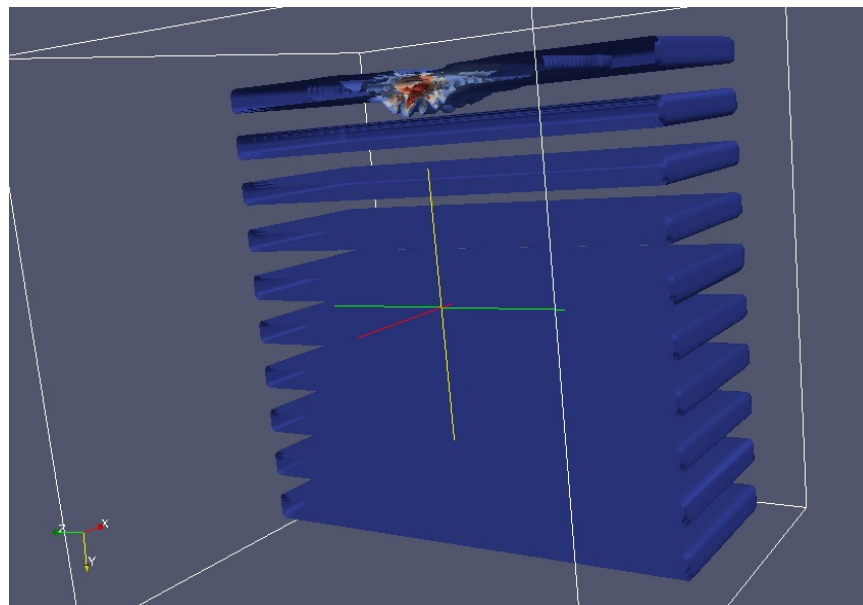
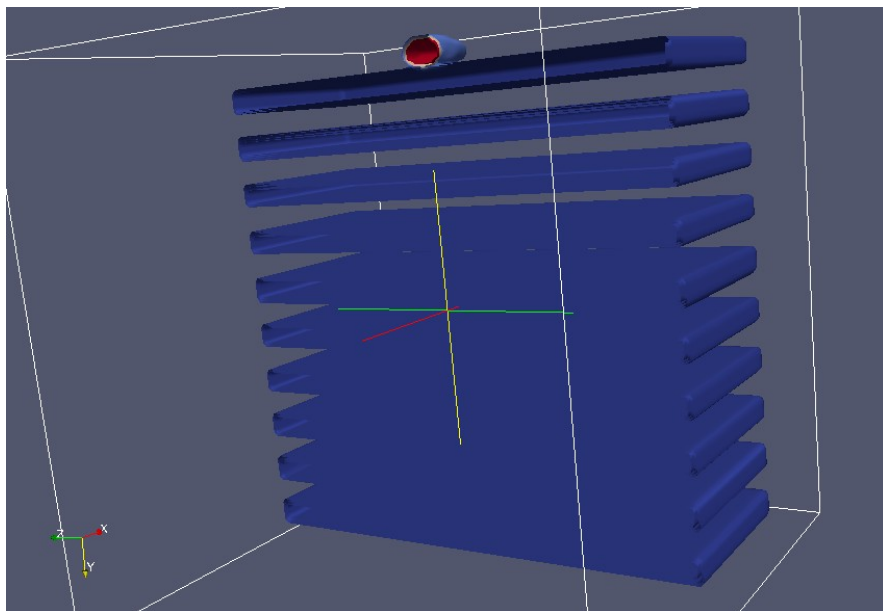




# Результаты численного эксперимента: соударение микрометеорита с двухслойной полусферической оболочкой и разнесенными преградами



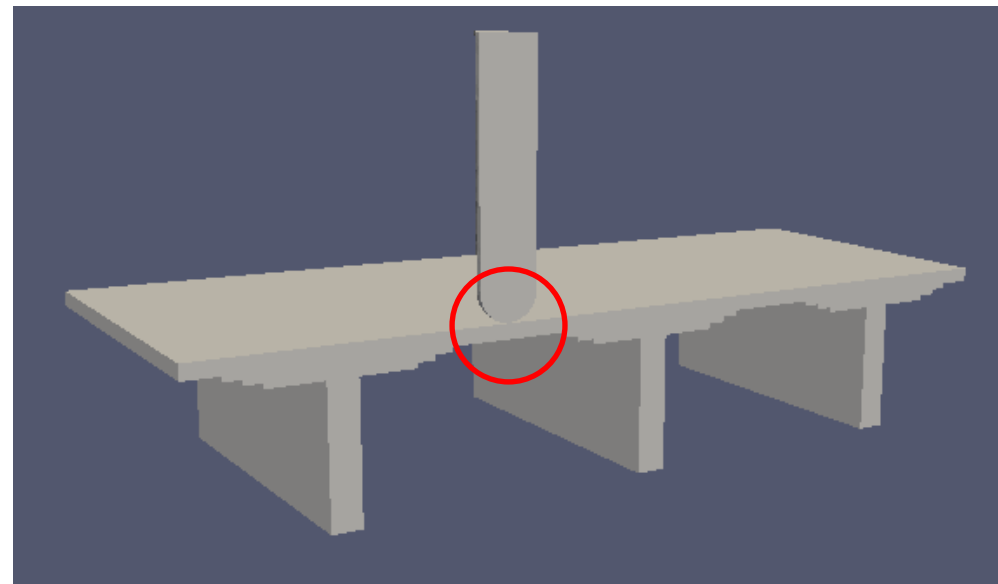
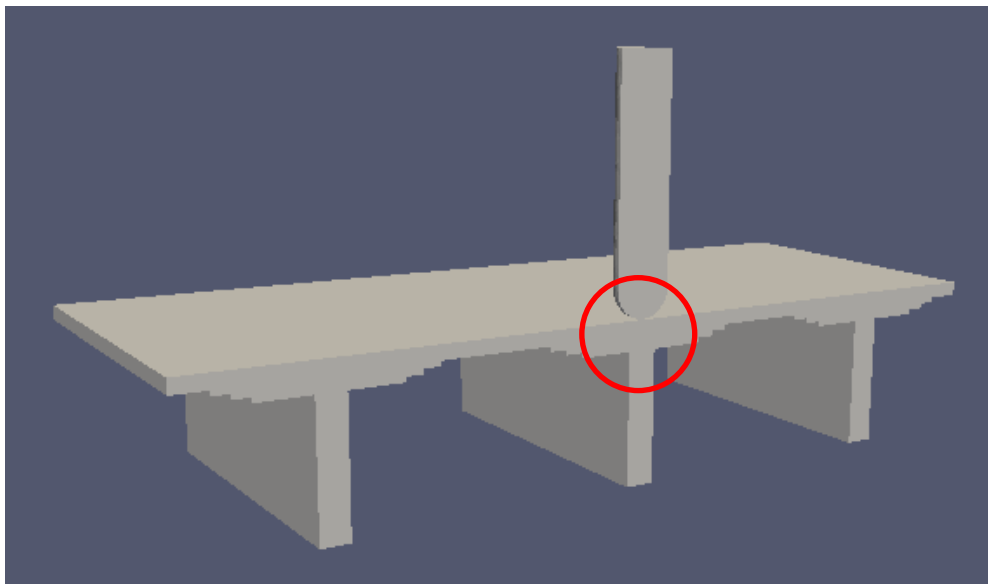
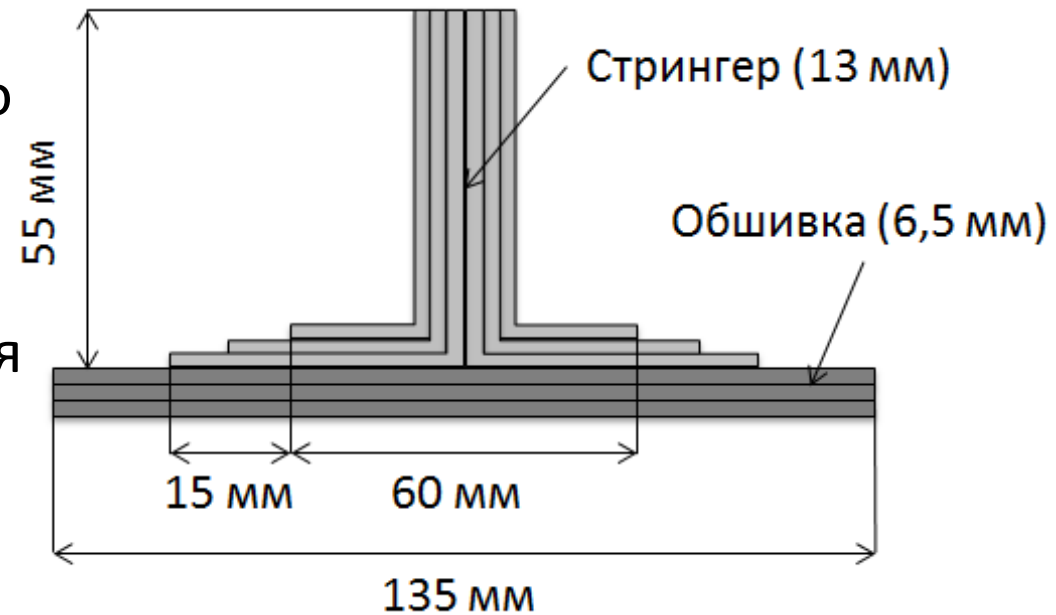
# Результаты численного эксперимента: соударение микрометеорита с 10 разнесенными преградами



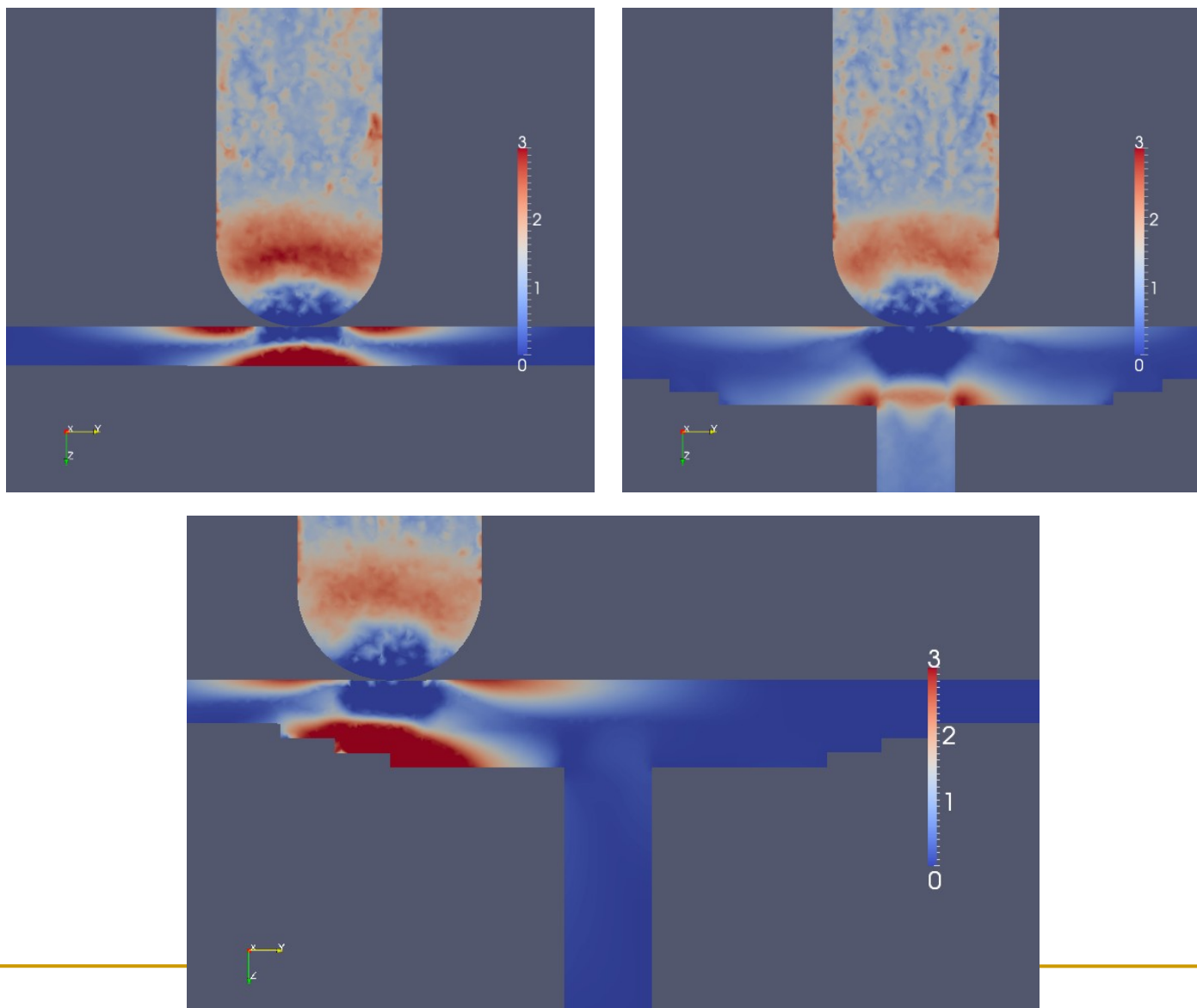


# Низкоскоростной удар по композитной трёхстрингерной панели

- ❑ ~4 000 000 узлов на конструкцию
- ❑ Точка соударения: стрингер, обшивка между стрингерами
- ❑ Различные критерии разрушения

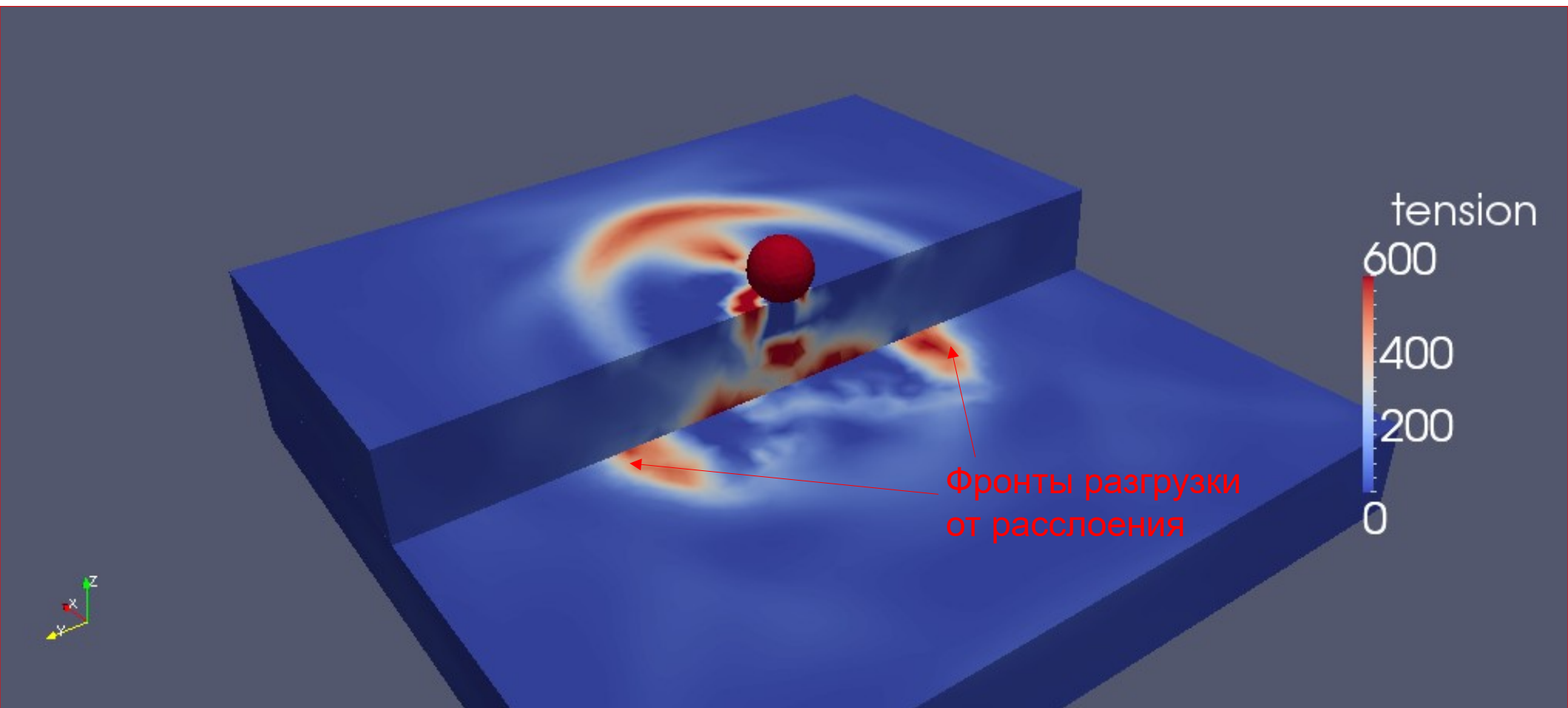


# Соударение со стрингером



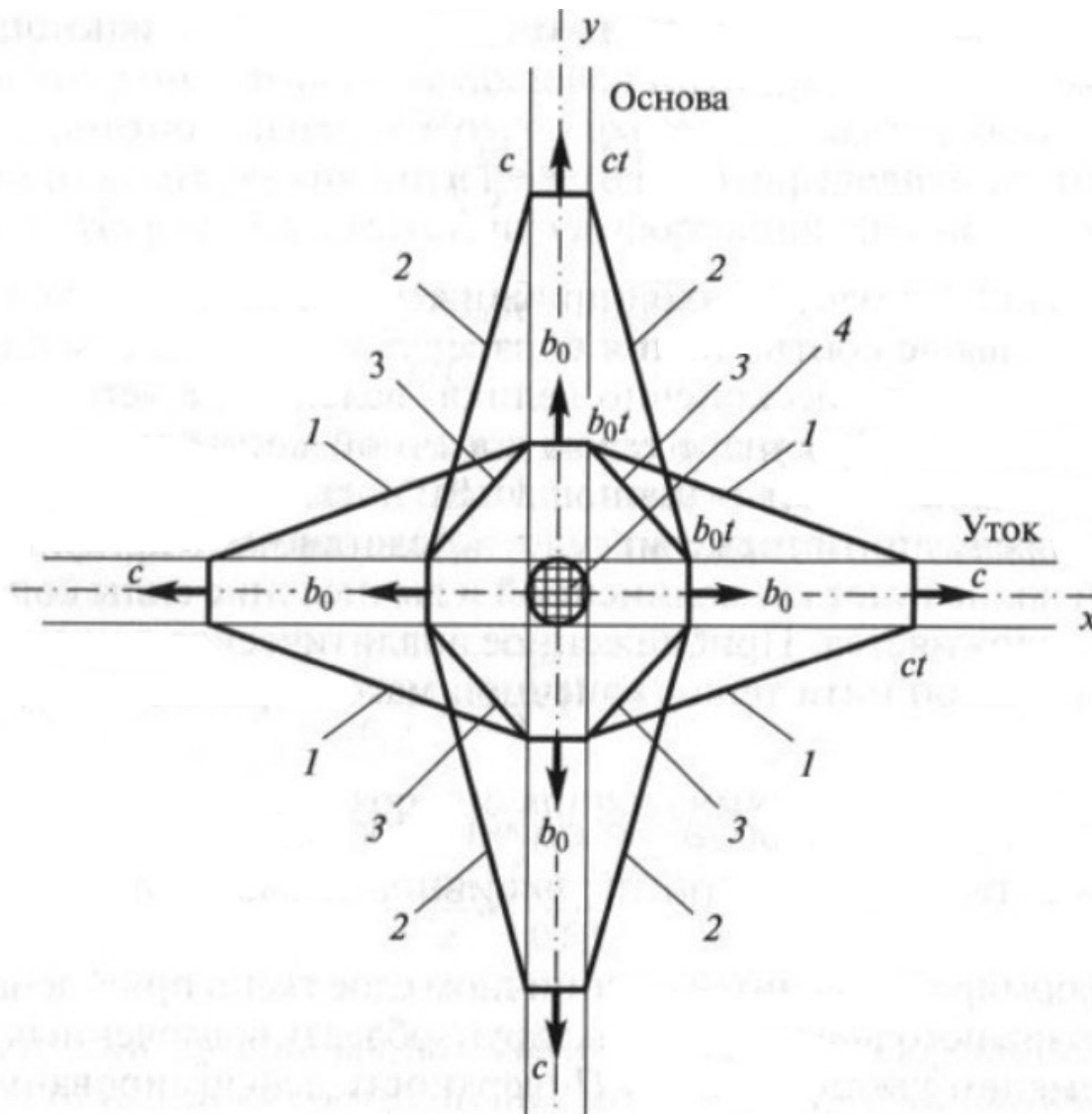


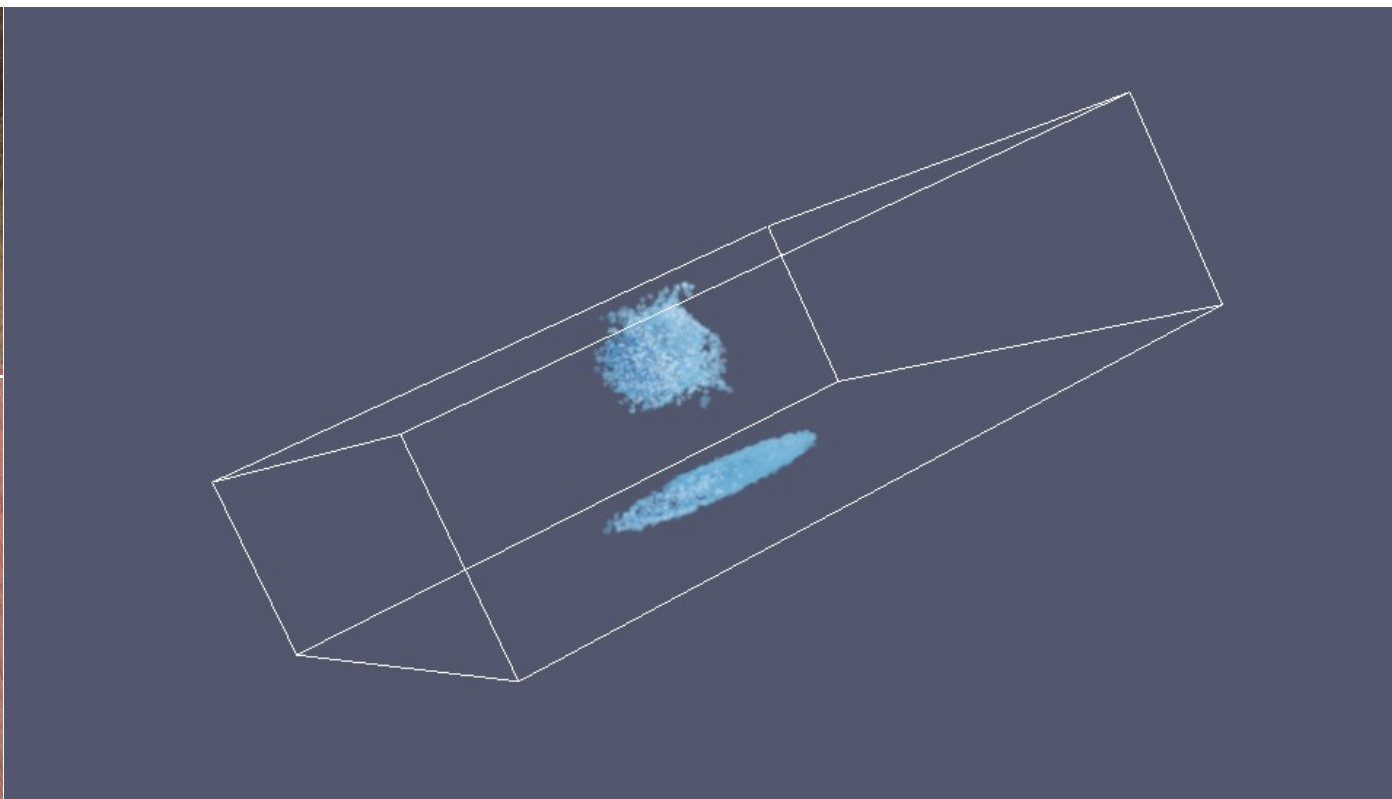
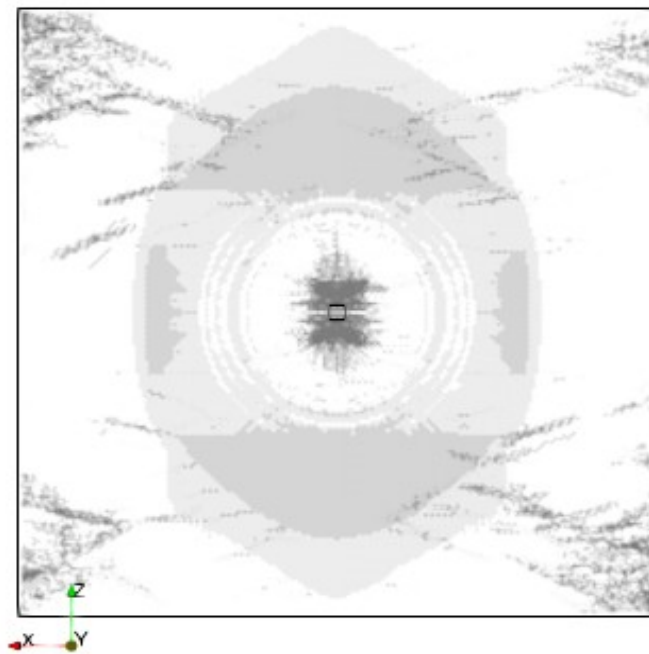
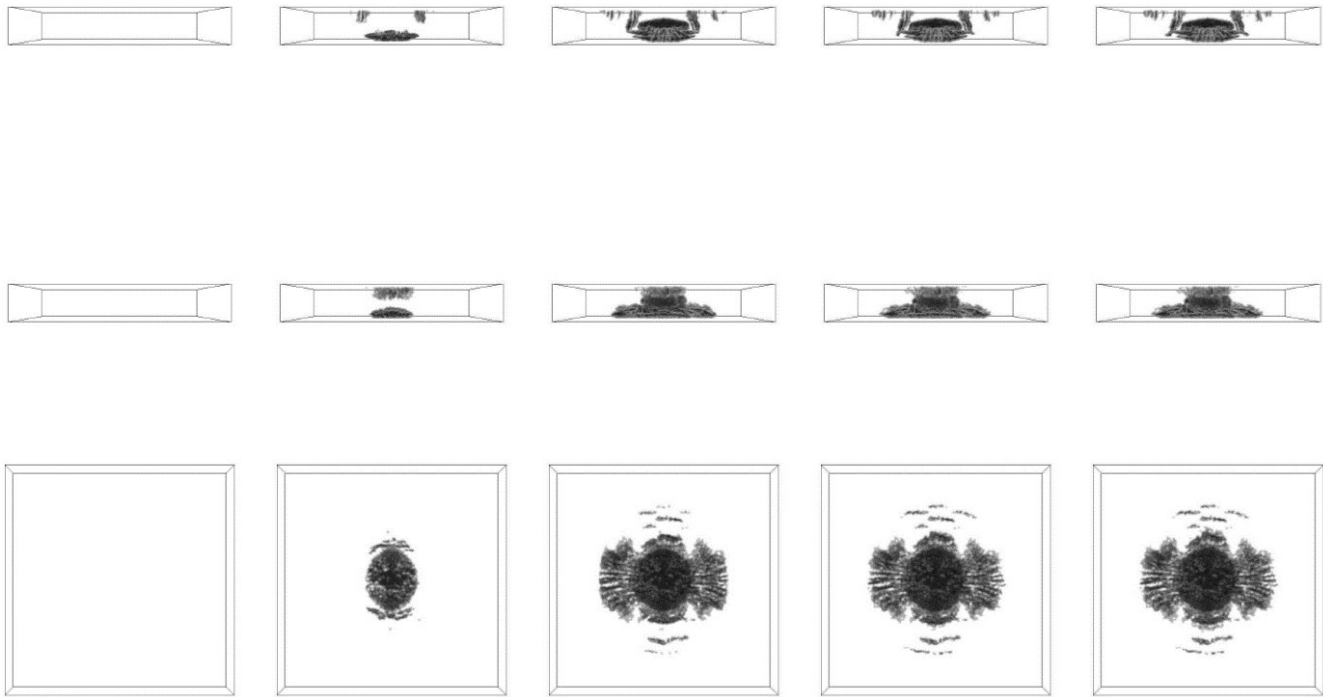
# Моделирование формирования расслоения



# Формирование центрального отверстия

- Модель “Крест-колокол” для системы нитей под действием внешнего импульса

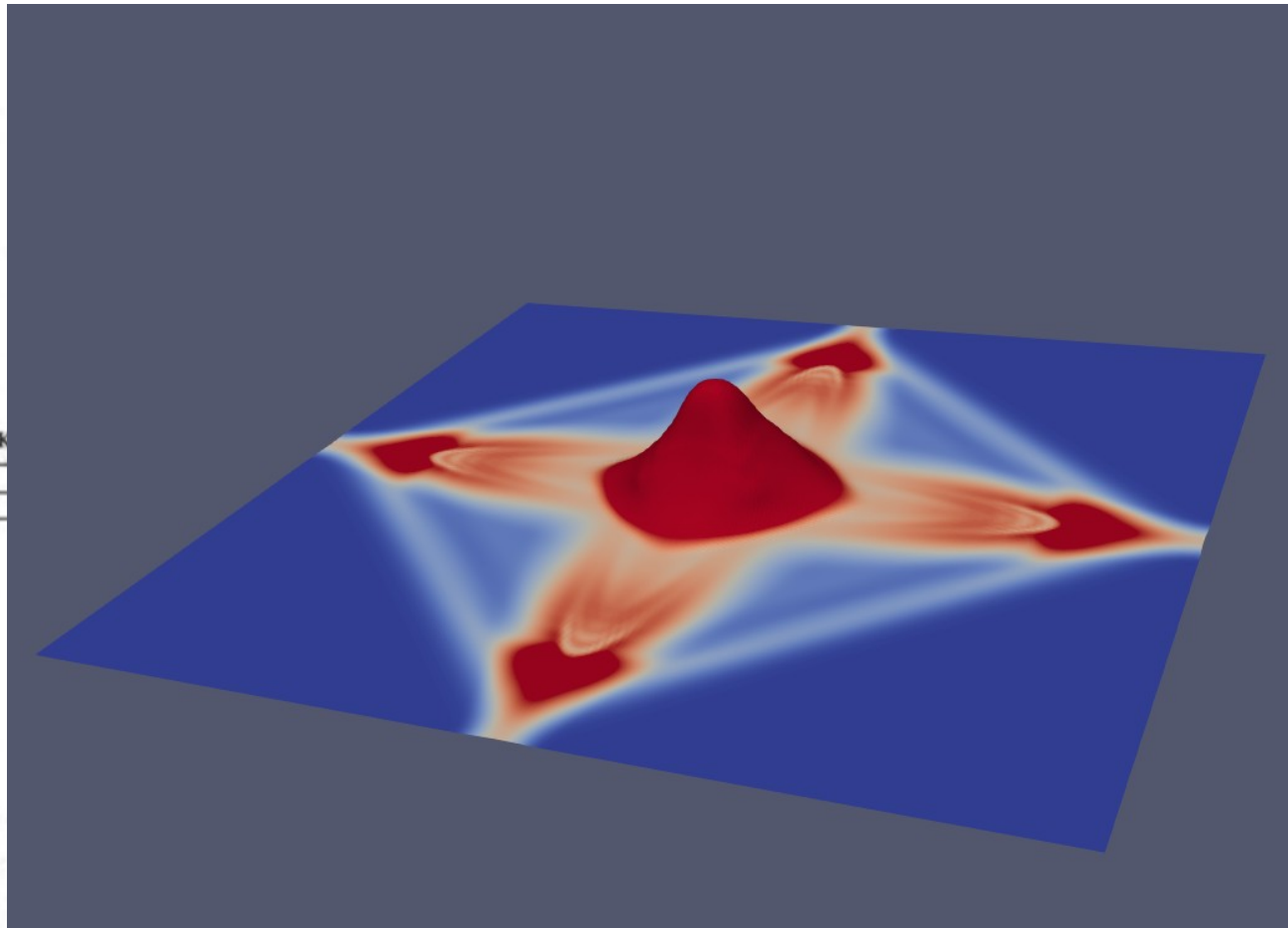
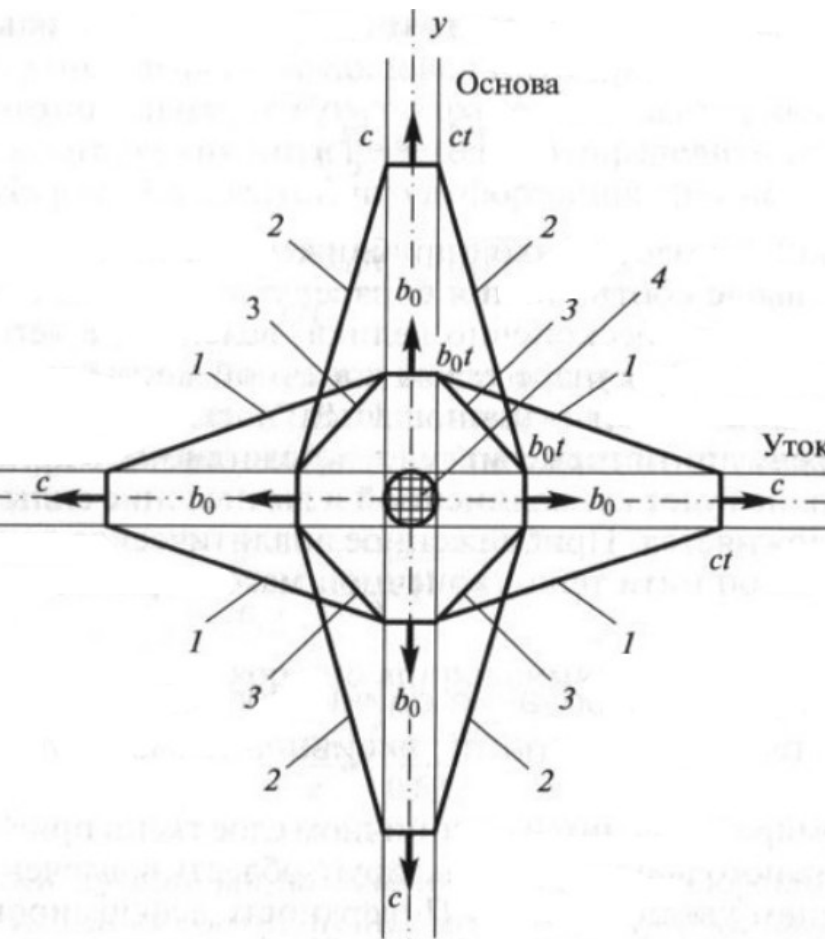




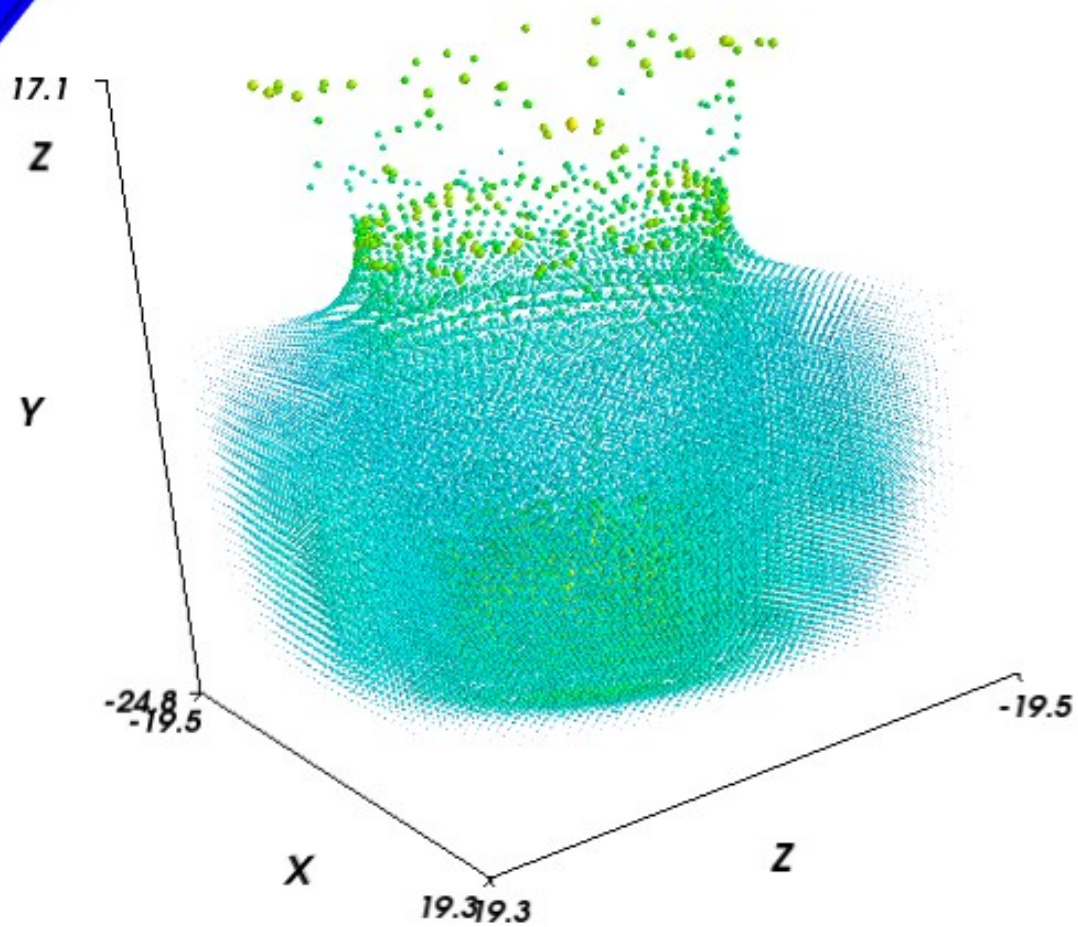
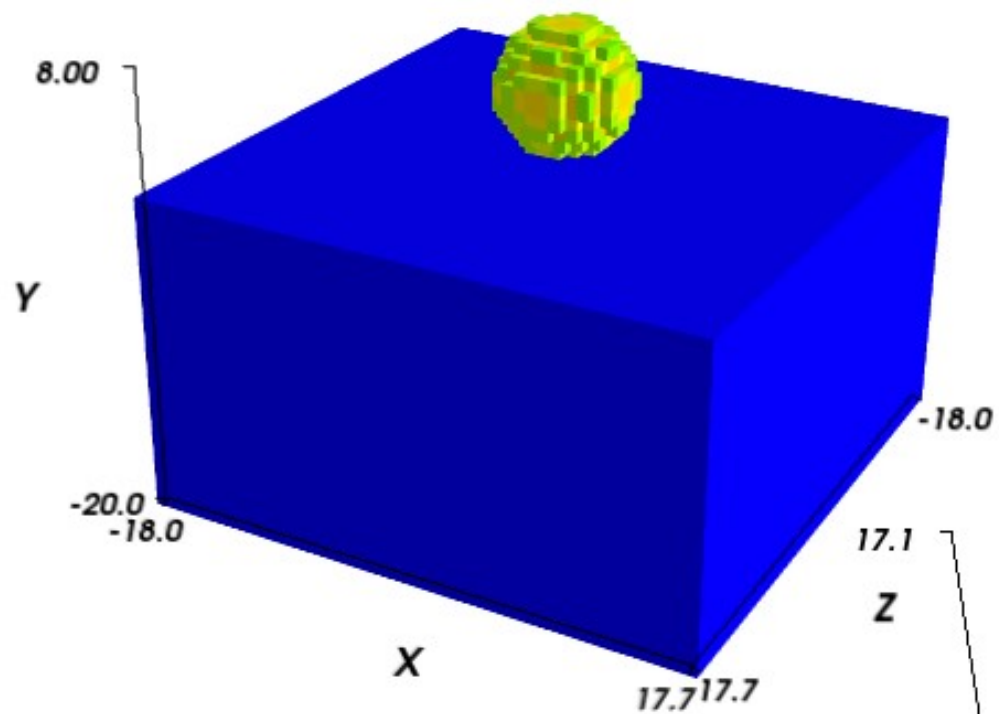


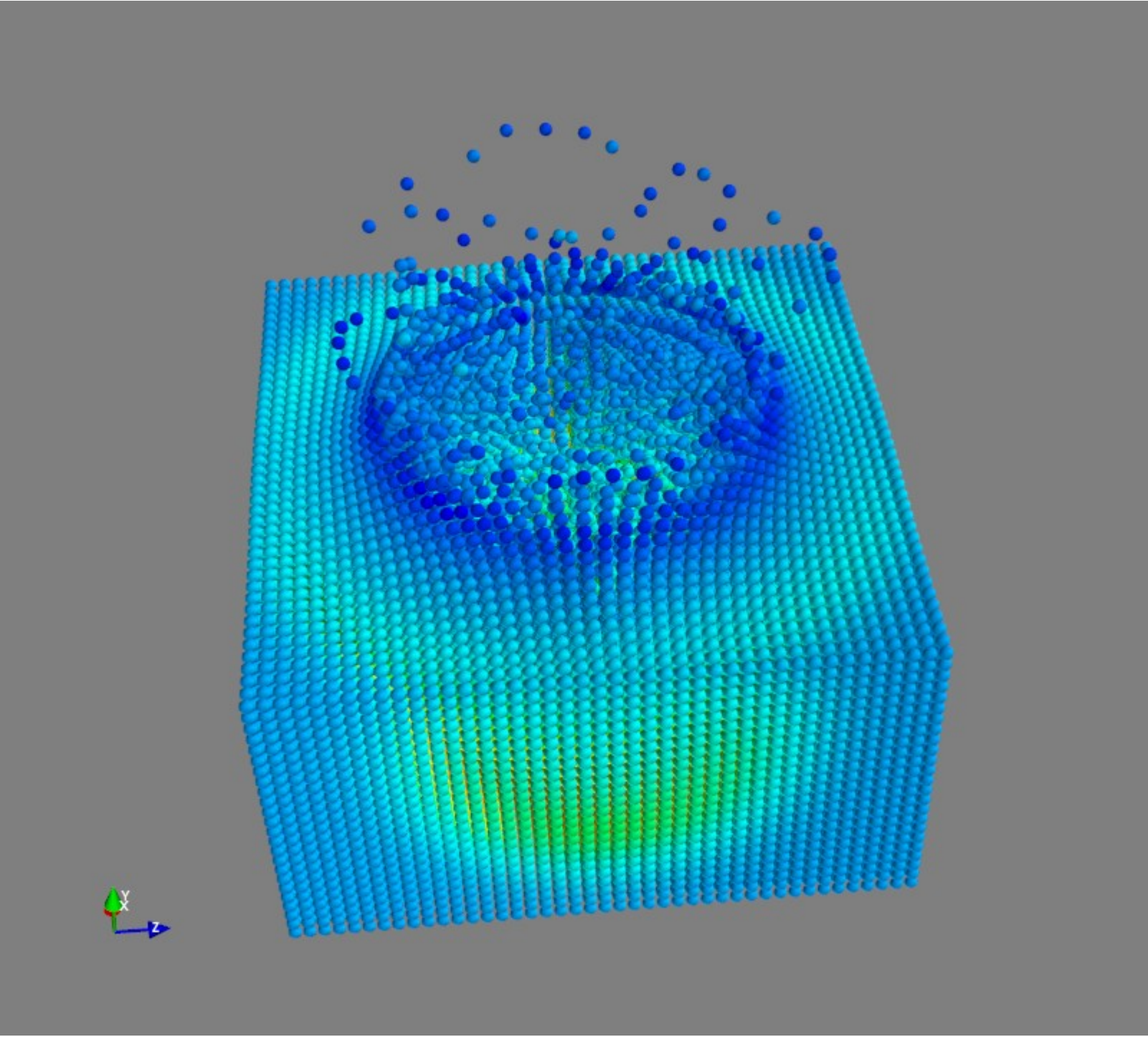
# Kevlar destruction

- “cross-bell” interaction model;
- shearless membrane.



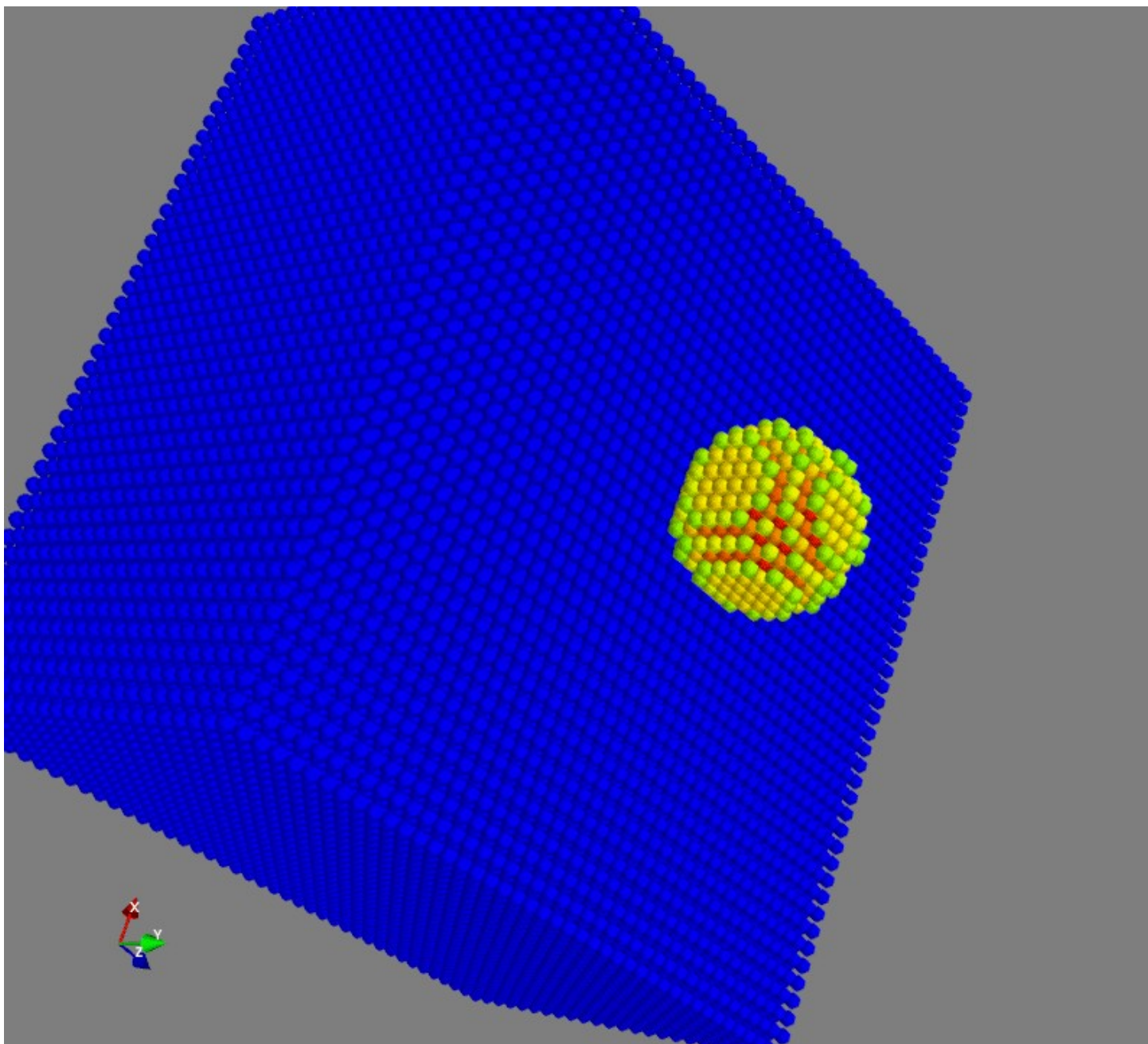
# Падение метеорита на бетон



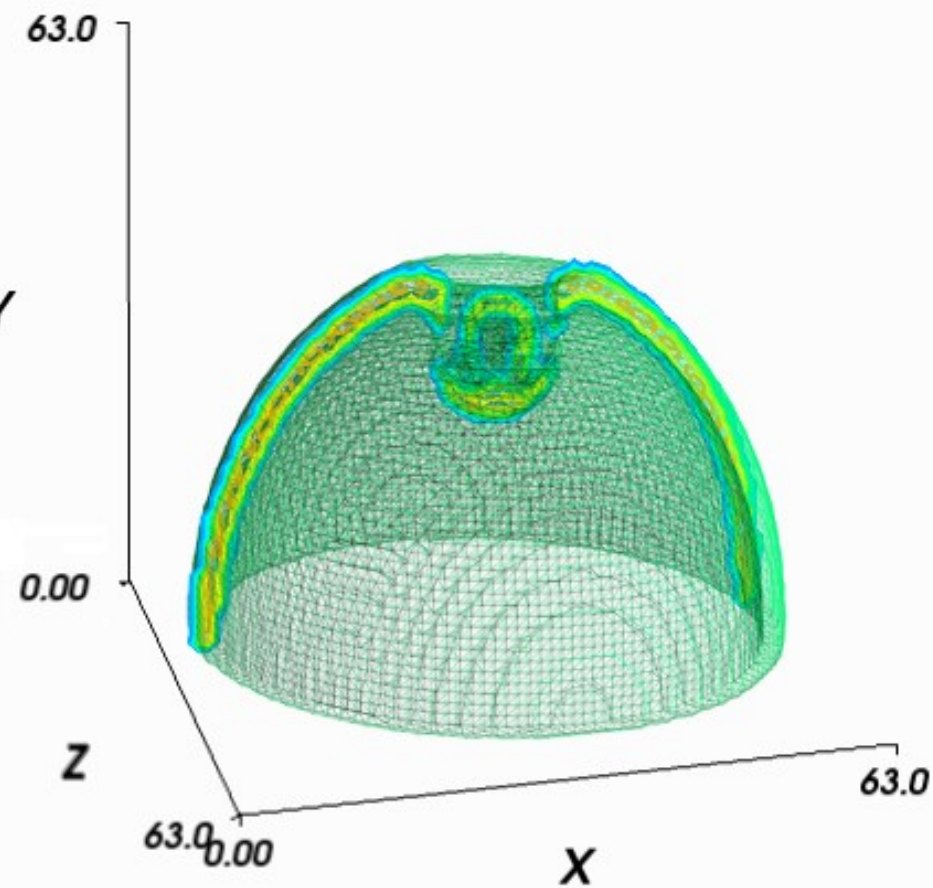
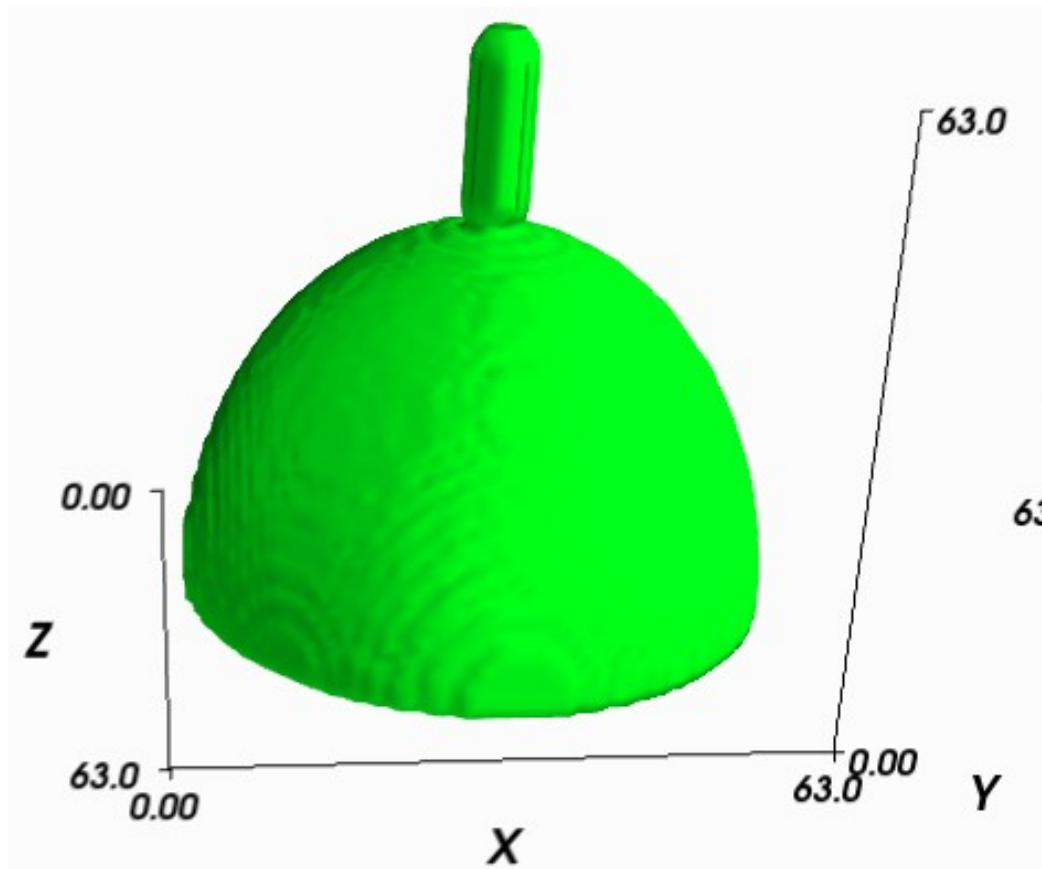


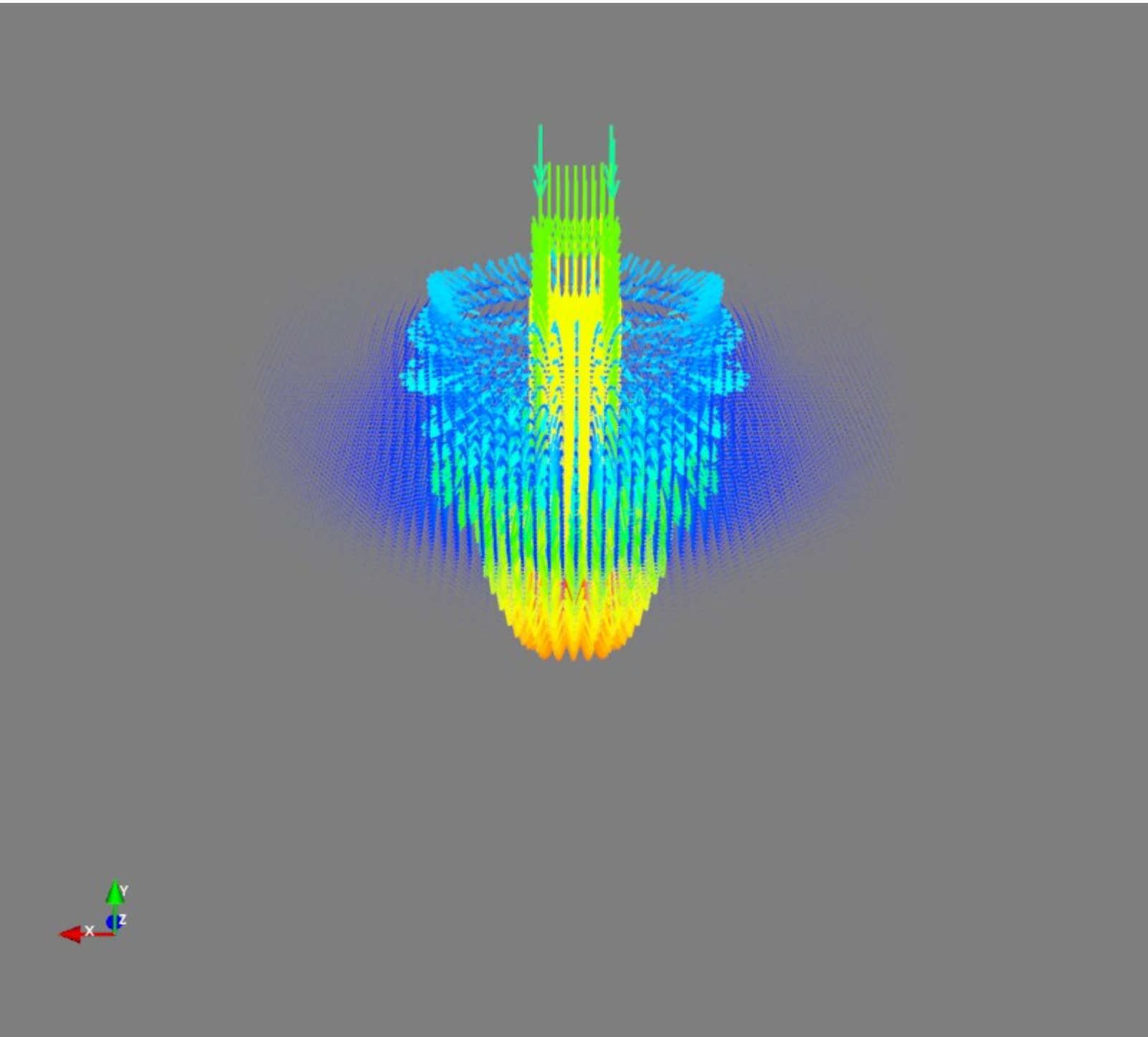


# Падение метеорита на бетон



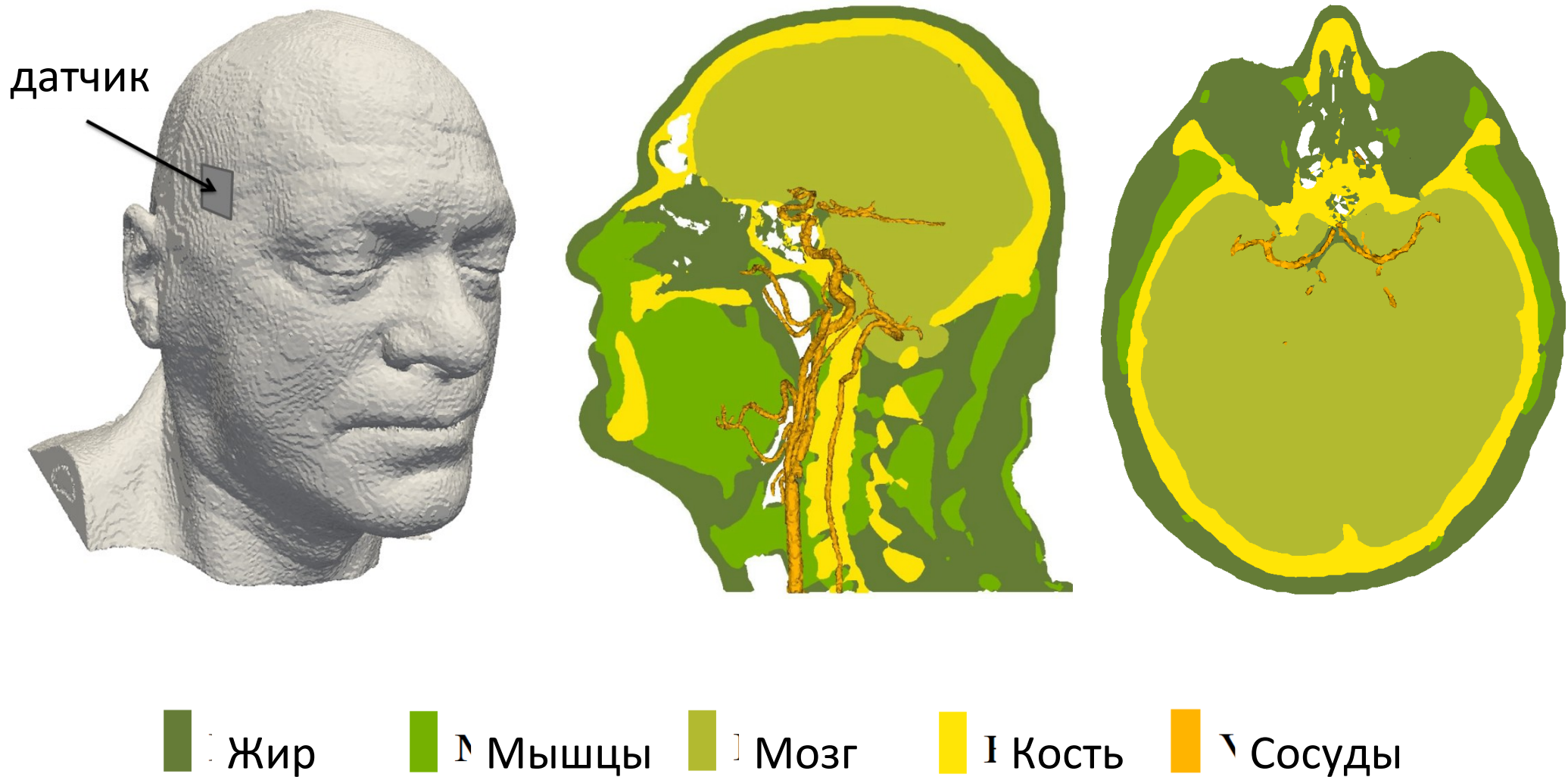
## Соударение с полусферической оболочкой





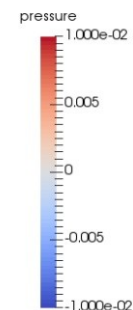
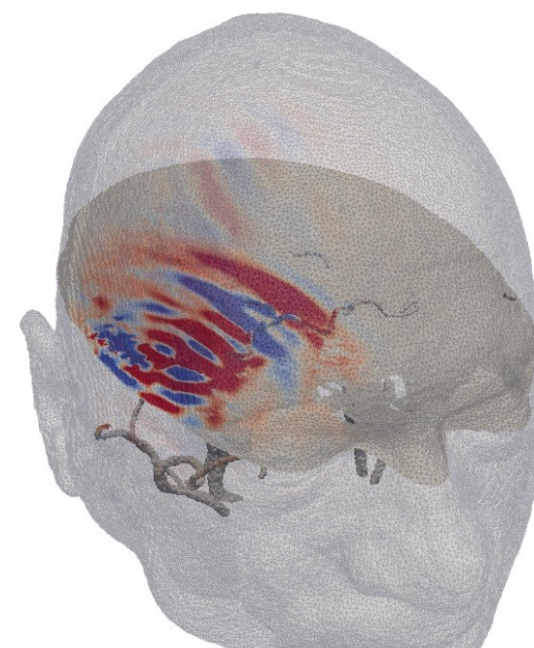
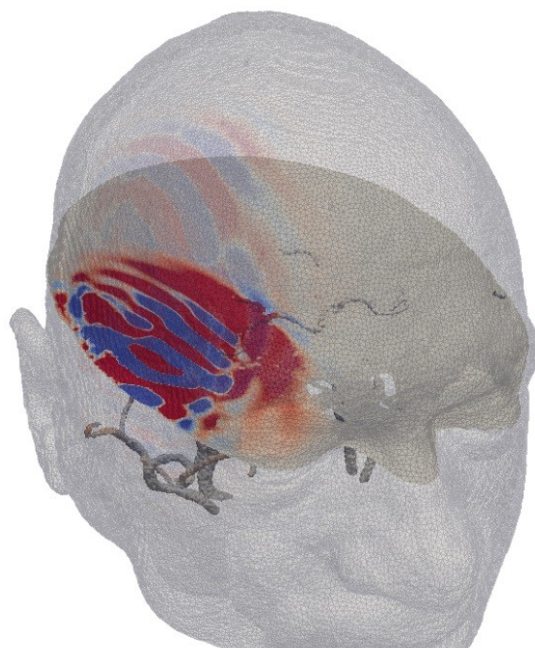
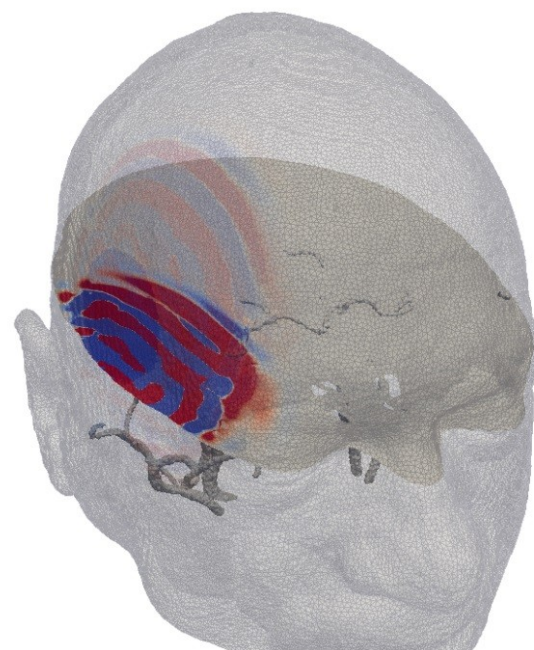
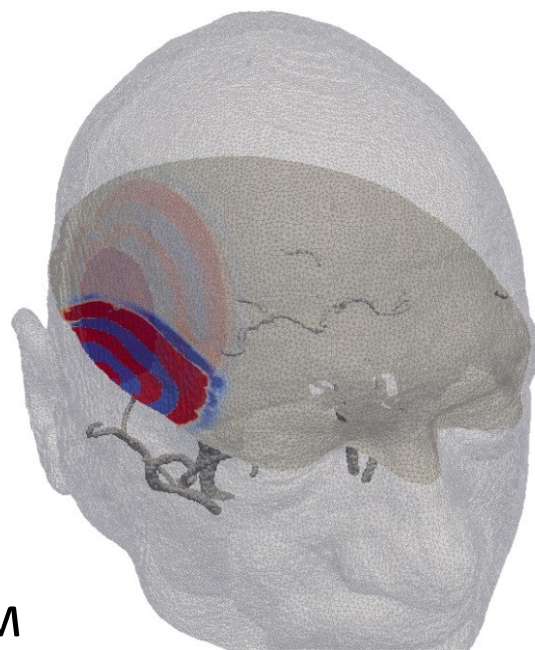


# Транскраниальное УЗИ



# Транскраниальное УЗИ

Расчетные сетки  
предоставлены  
научным коллективом  
под руководством  
Василевского Ю.В.



# Разрушение камня в почках

Короткий сильный удар по камню, погруженному в жидкость

$m$   $k$

$w$

$A$

3D, осевая симметрия

Цилиндрические  
координаты

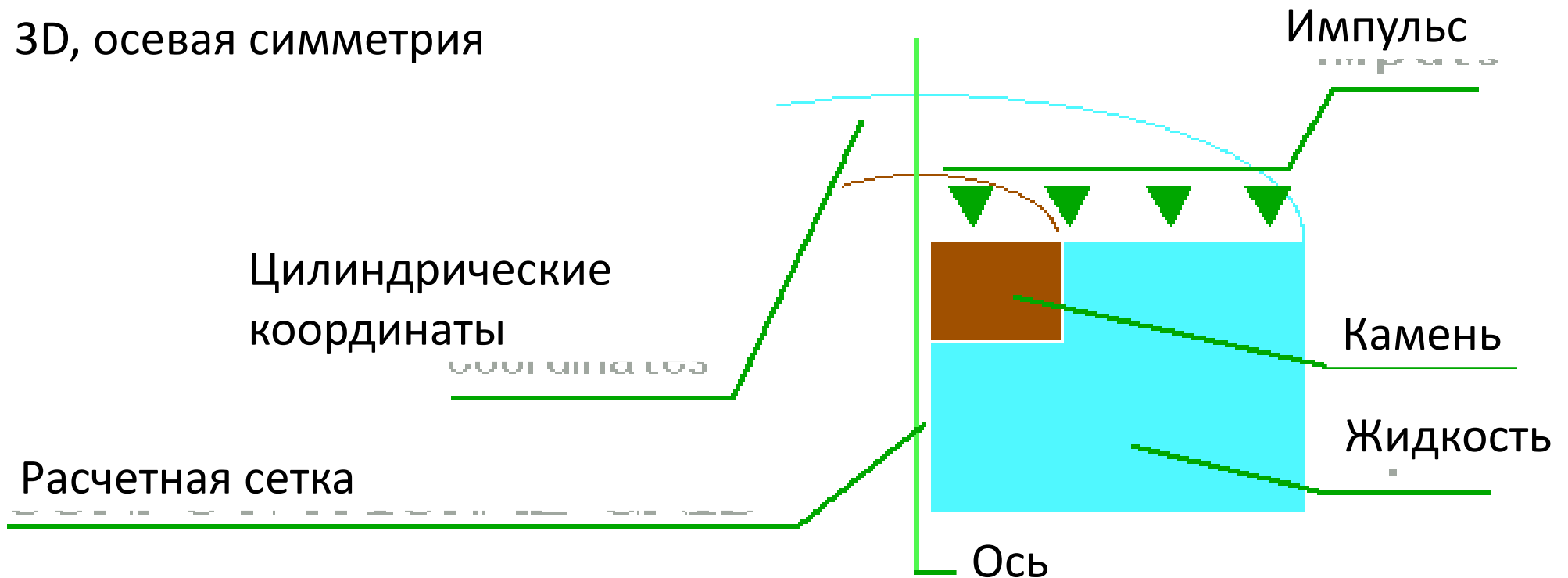
Расчетная сетка

Импульс

Камень

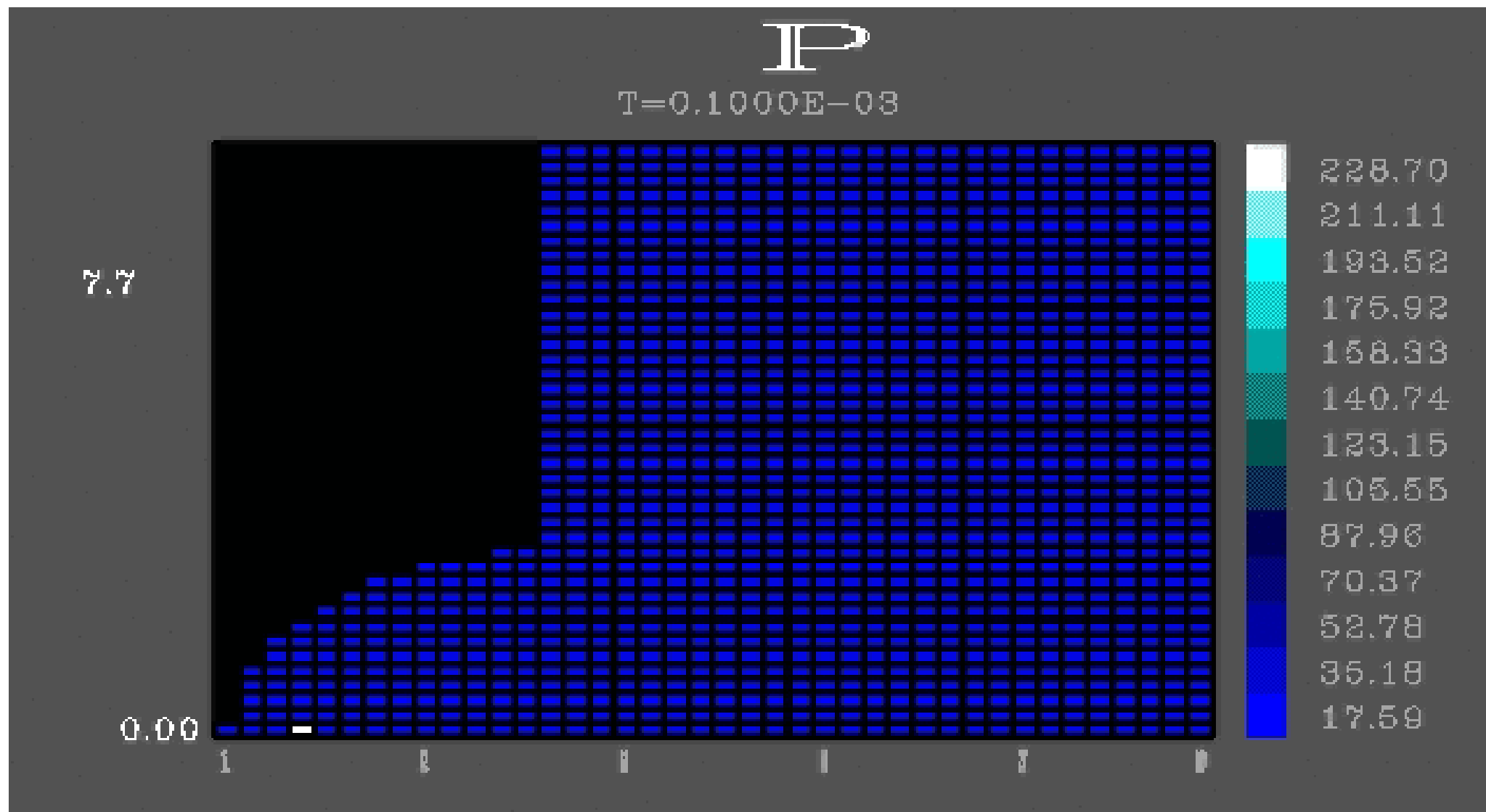
Жидкость

Ось



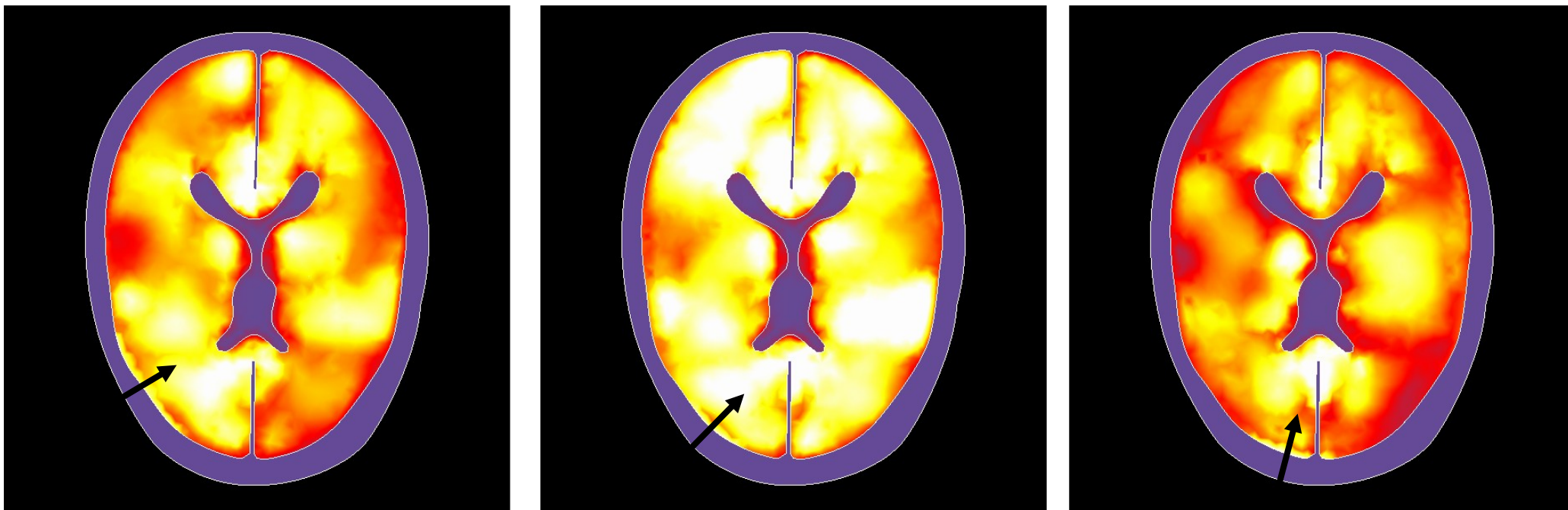


# Разрушение камня в почках



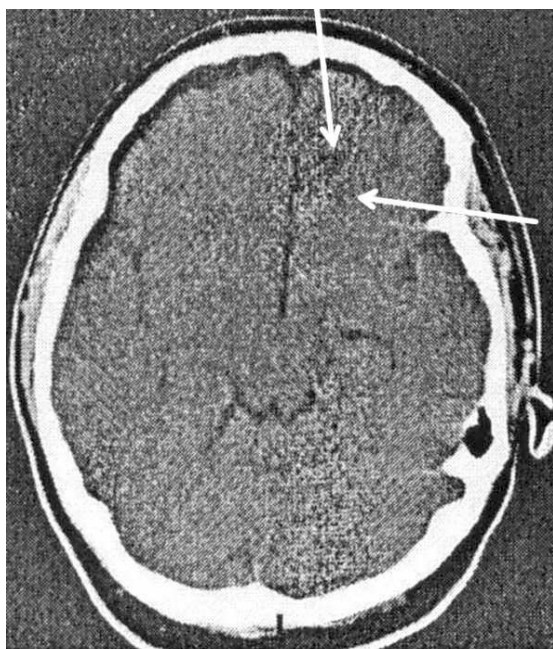
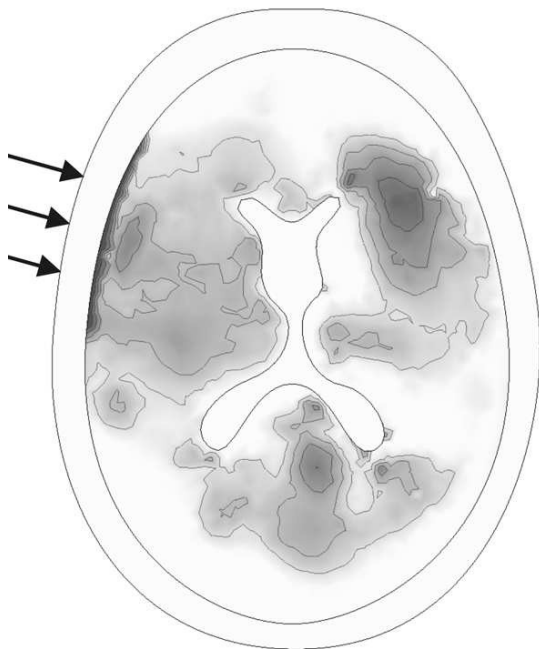
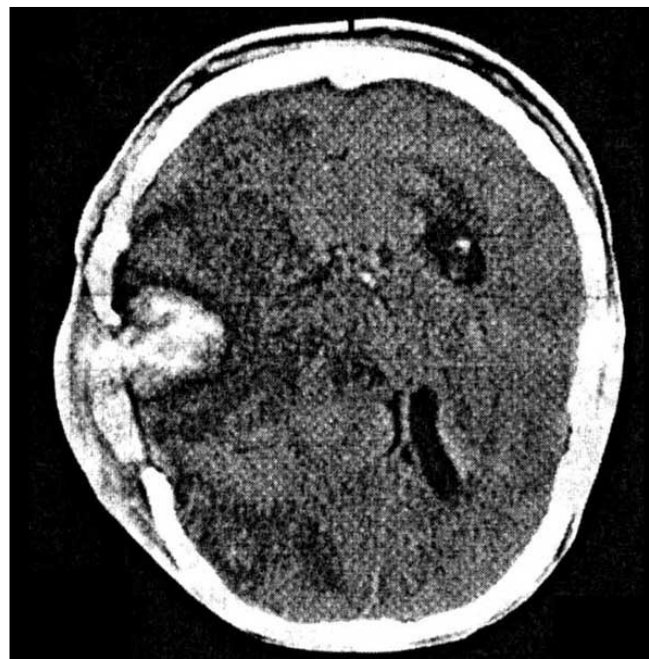
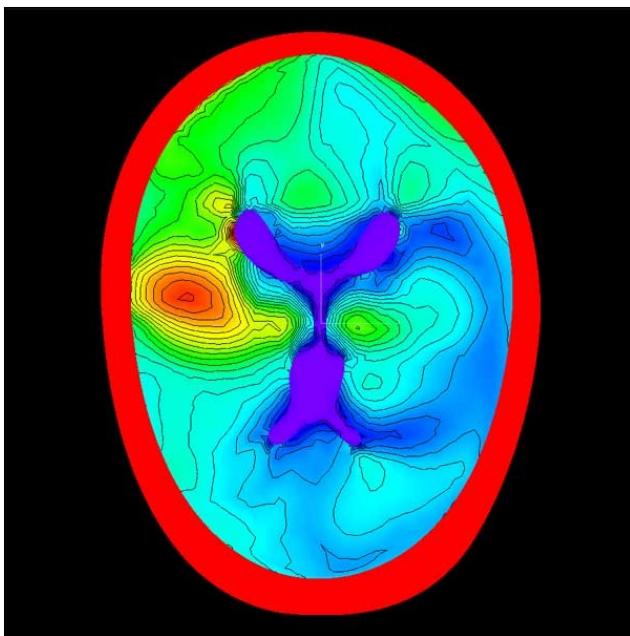
# Черепно-мозговая травма

Итоговые повреждения сильно зависят от направления удара



Максимальные сдвиговые напряжения при одинаковой силе воздействия и разными направлениями удара.

# Сравнение с клиническими результатами



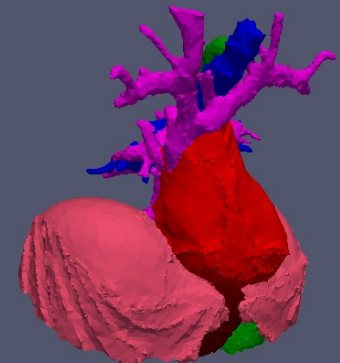
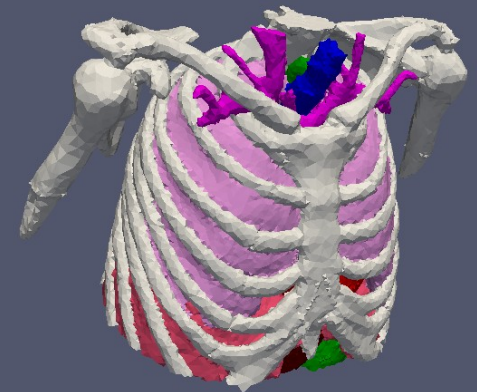
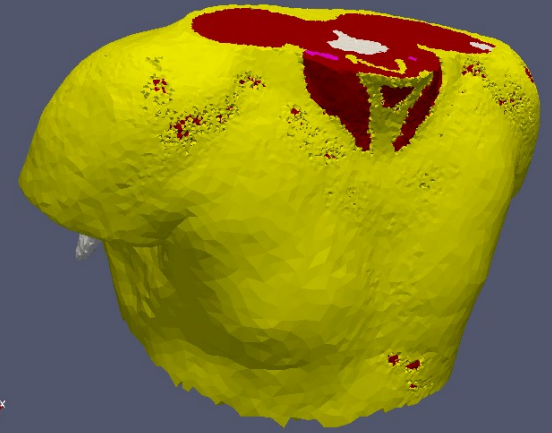


# Удар по грудной клетке

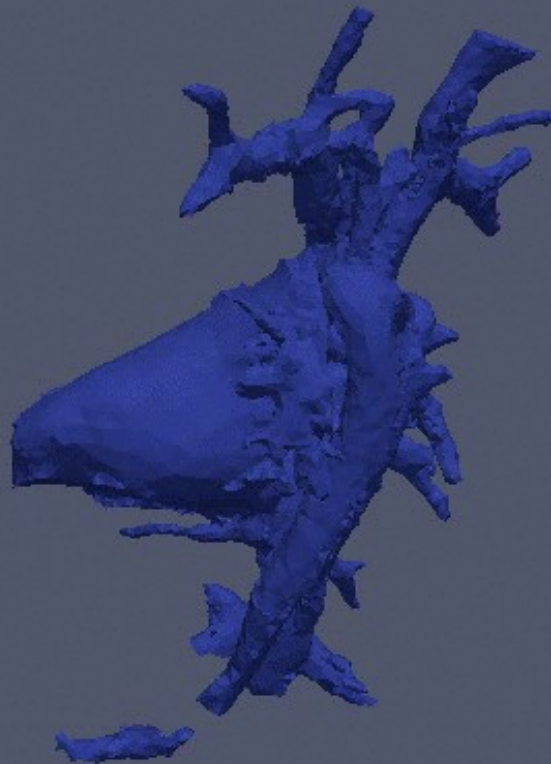
Расчетные сетки предоставлены научным коллективом под руководством Василевского Ю.В.

Ткани, рассмотренные в модели:

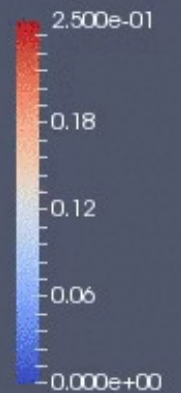
- Жир
- Мышцы
- Кость
- Диафрагма
- Печени
- ЖКТ
- Трахея
- Сердце и сосуды



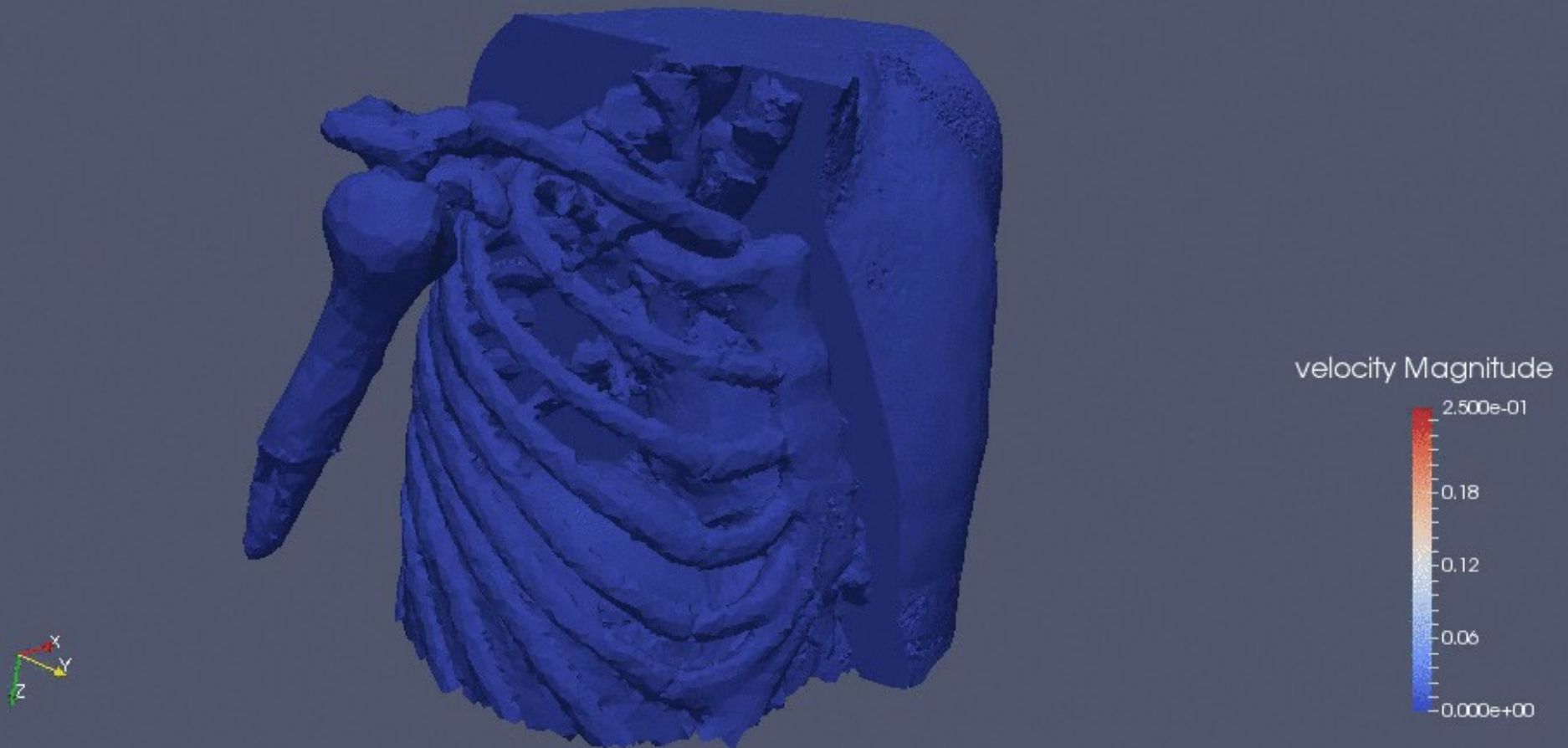
# 3D: модуль скорости в сердце и сосудах



velocity Magnitude

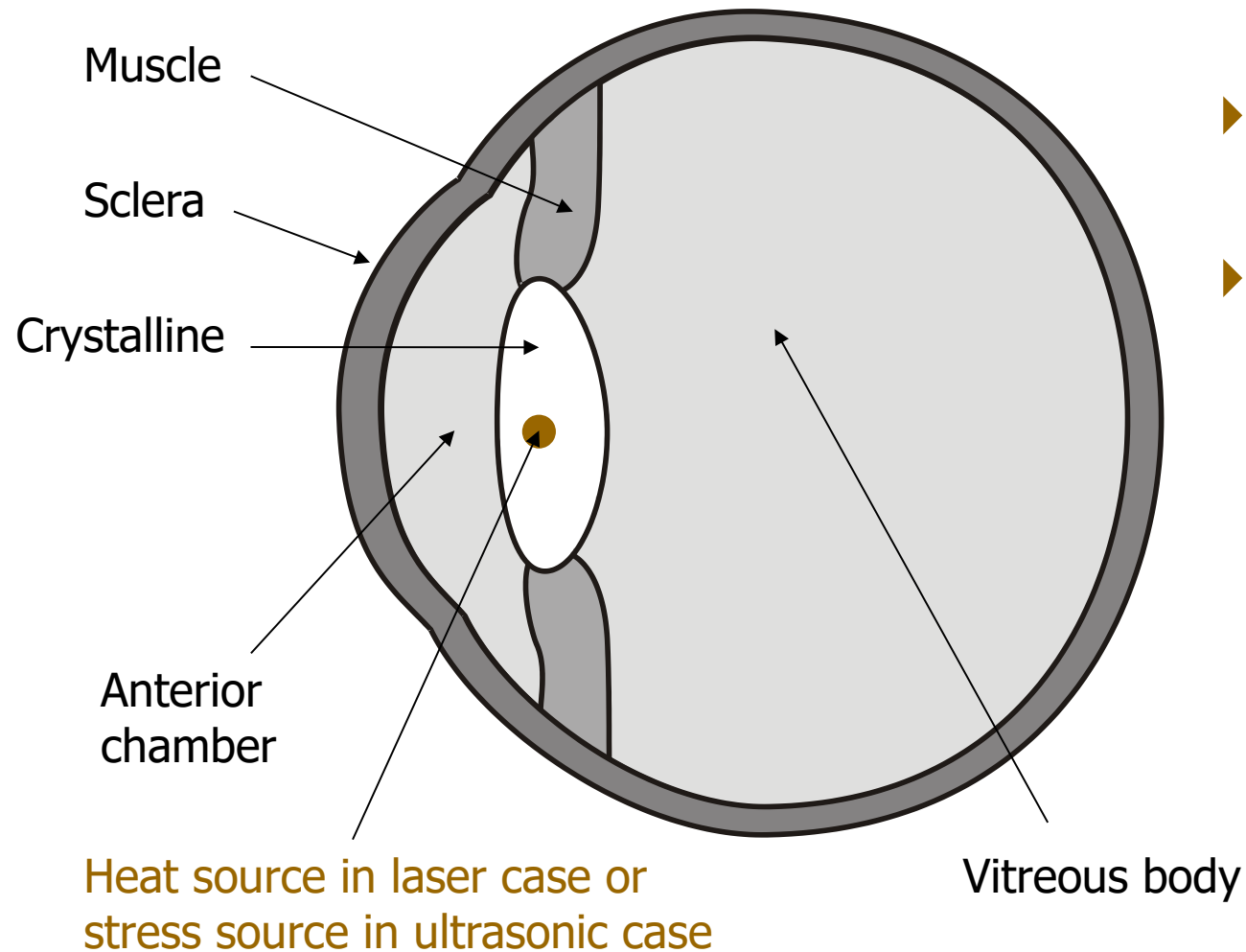


# 3D: модуль скорости во всех тканях



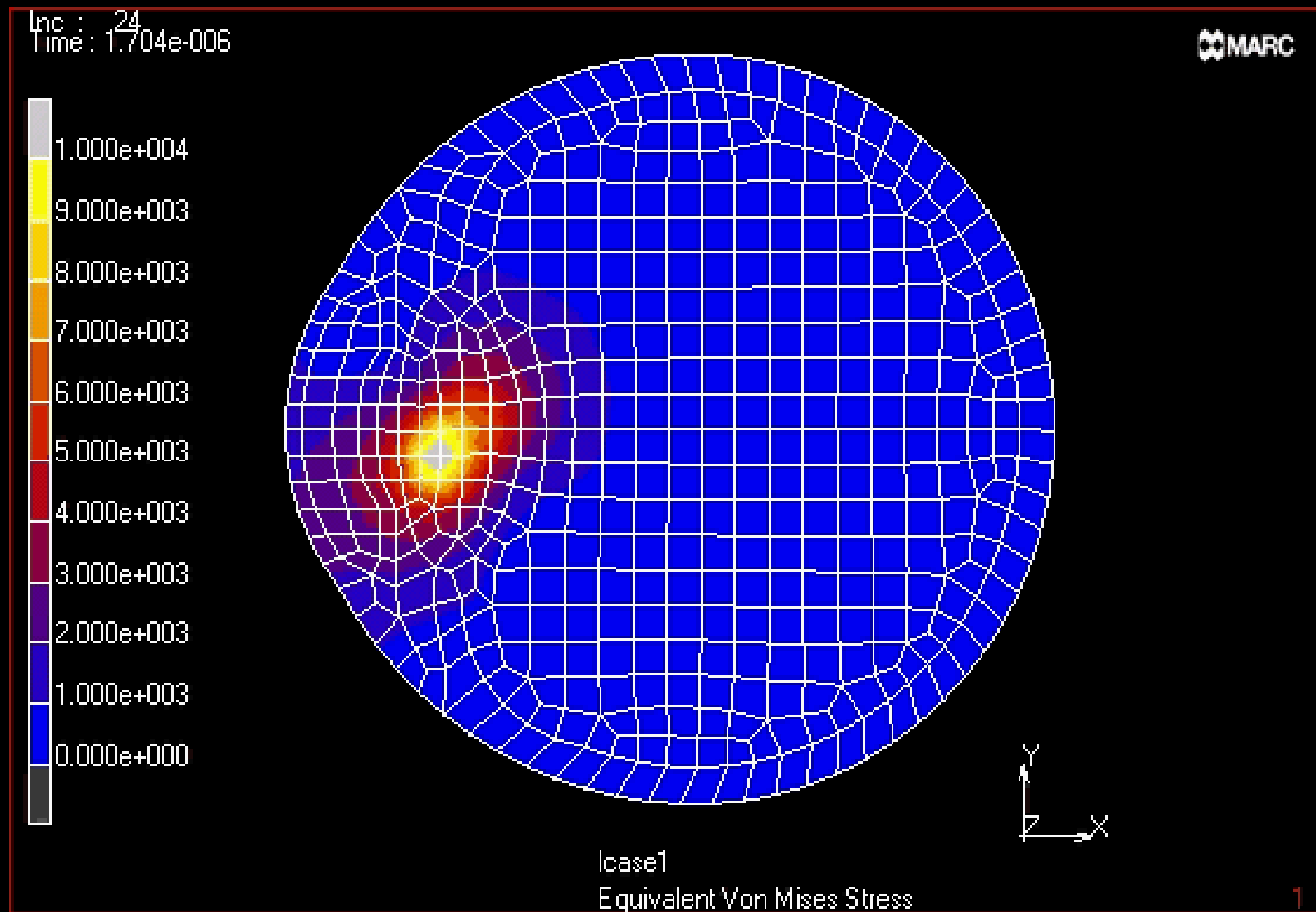


# Cataract removal



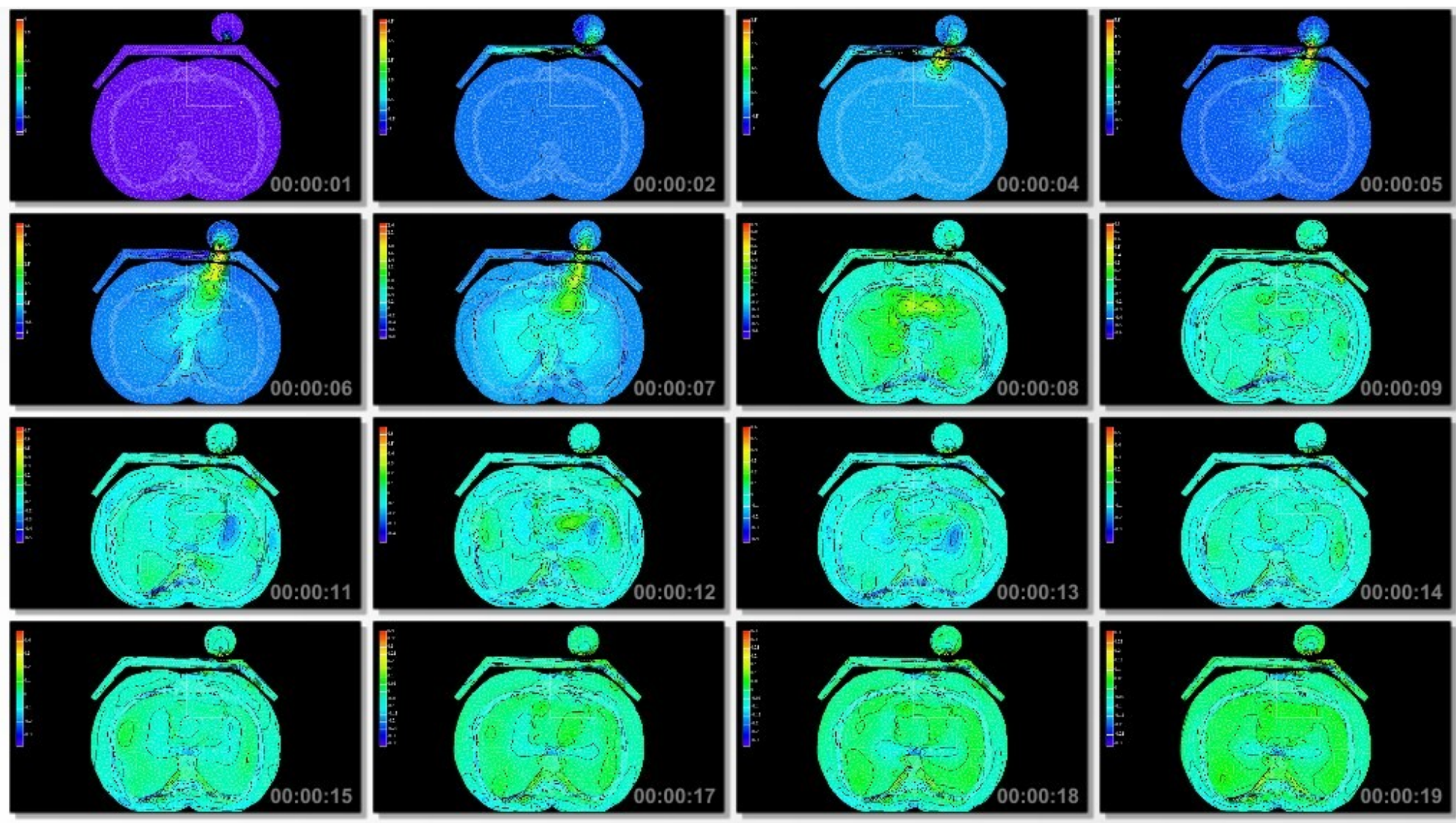
- Surgical instruments:
- ▶ Laser needle (heat source)
  - ▶ Ultrasonic needle (stress source)

# Удаление катаракты



Ультразвуковой импульс. Напряжение Мизеса.

# Защитная конструкция

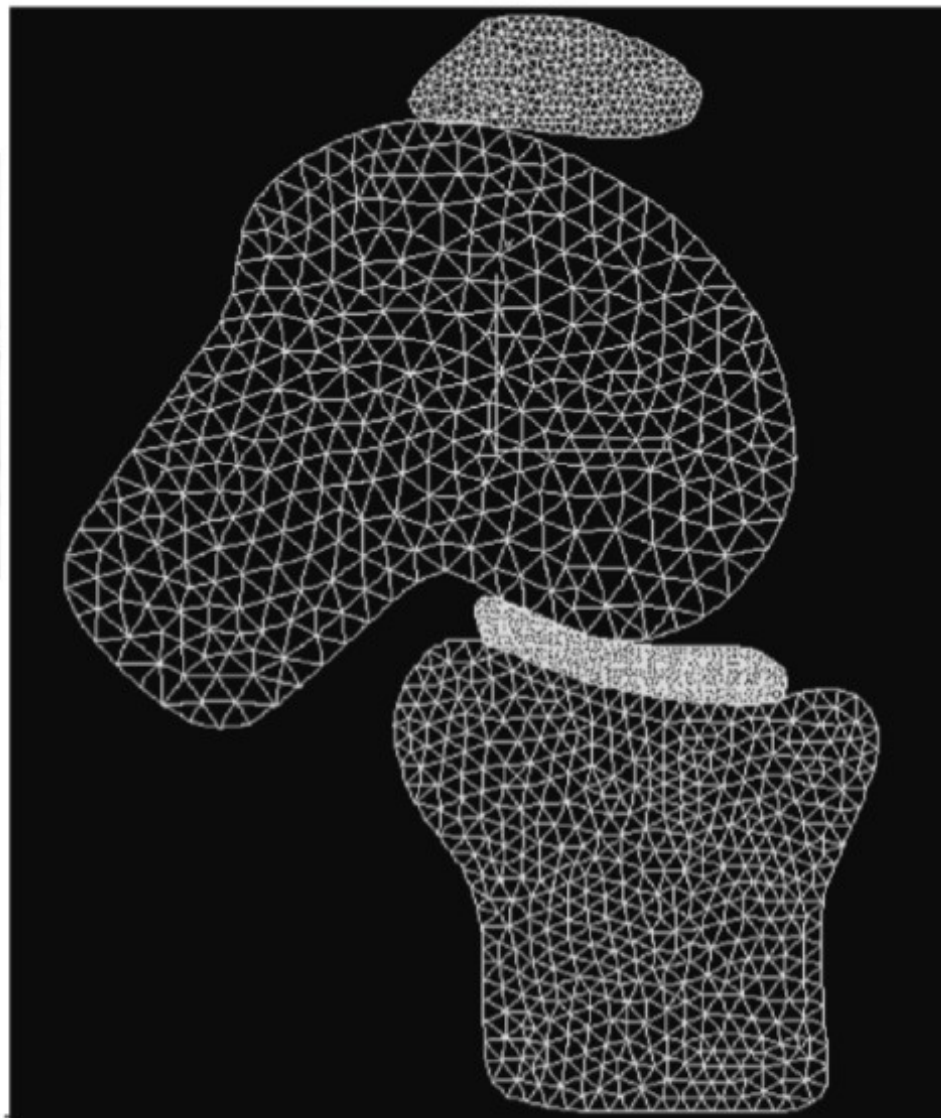
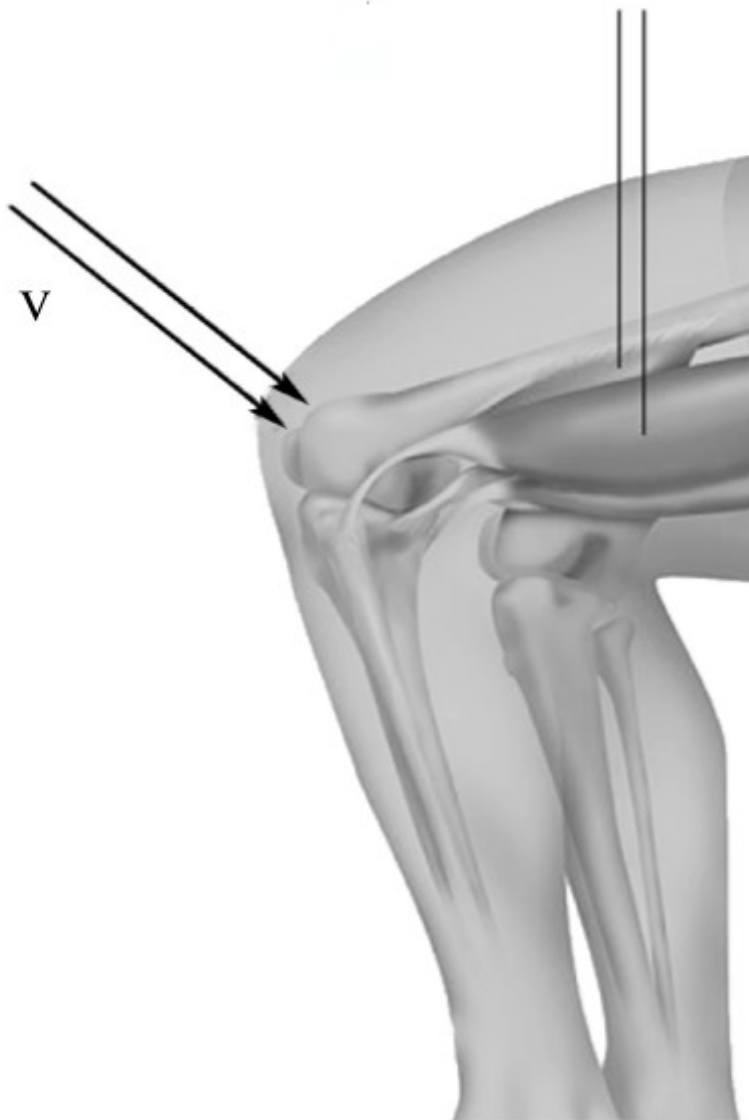


Геометрия, приближенная к реальной  
(отображен модуль скорости)

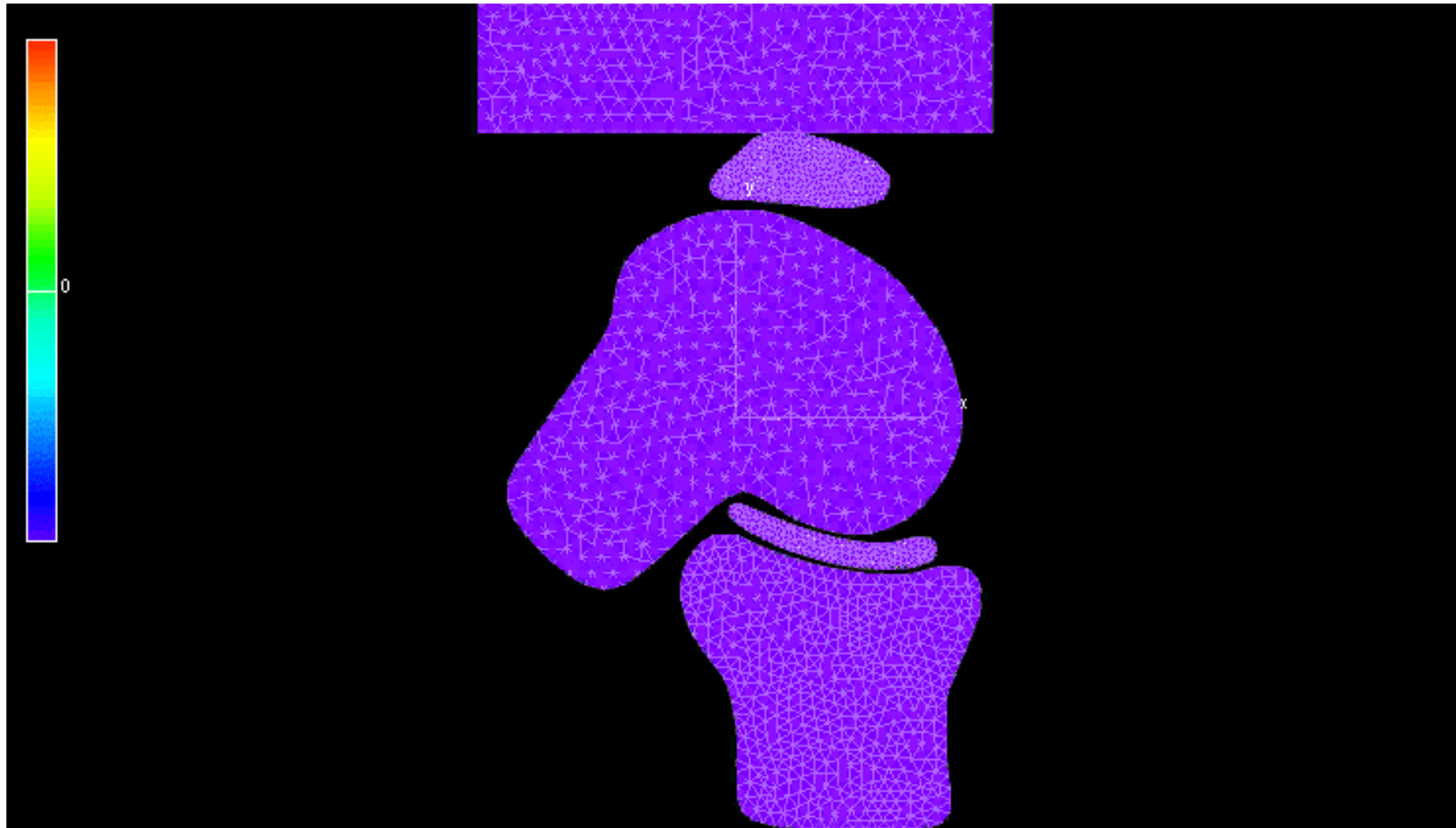


# Травма колена

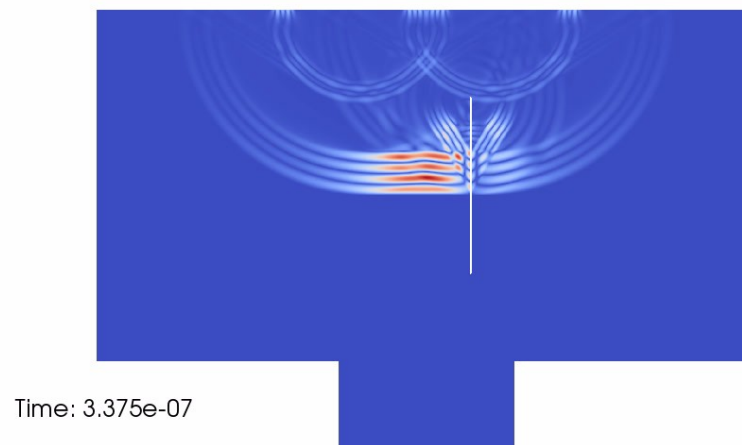
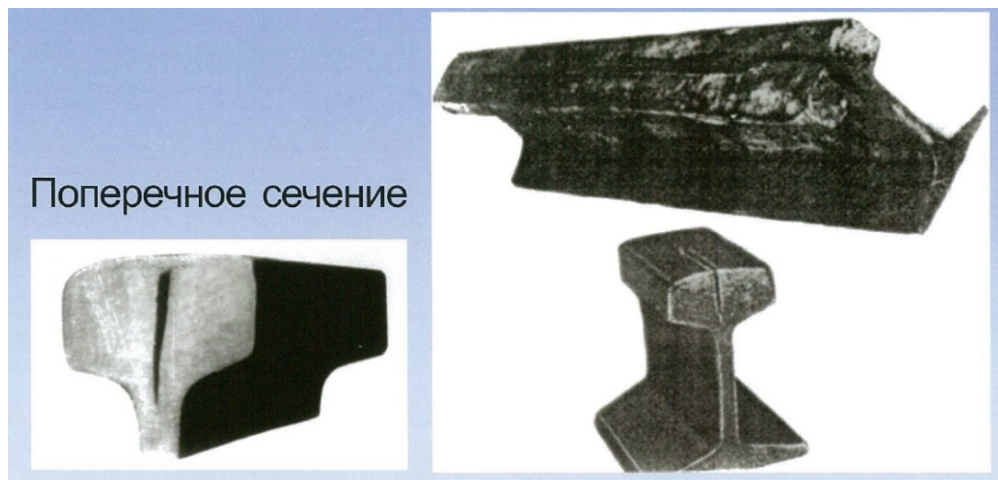
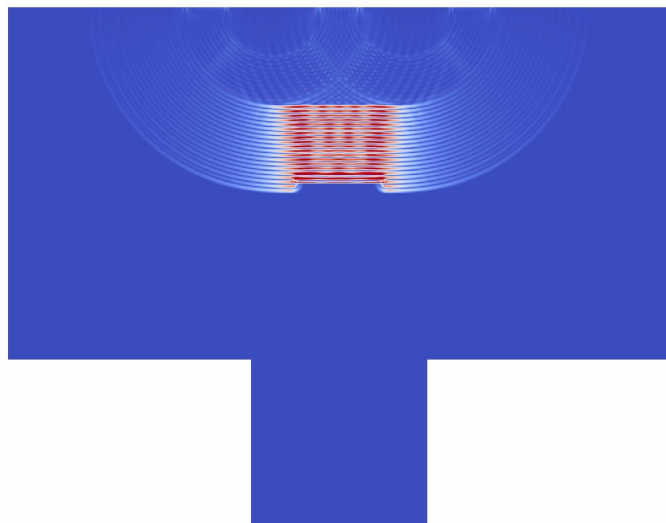
Схема коленного сустава и расчетная сетка



# Травма колена

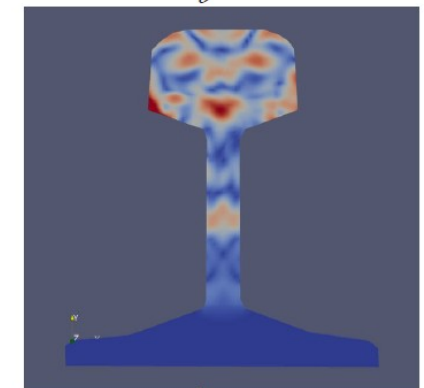
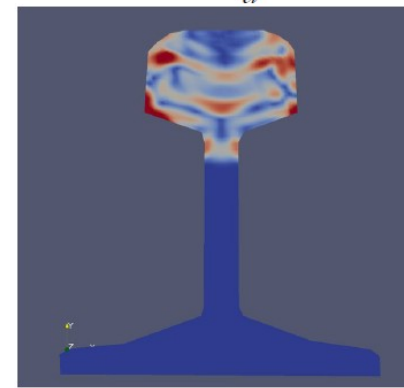
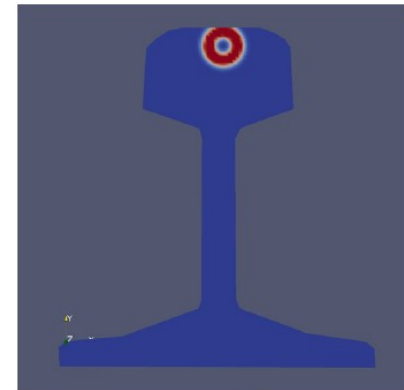
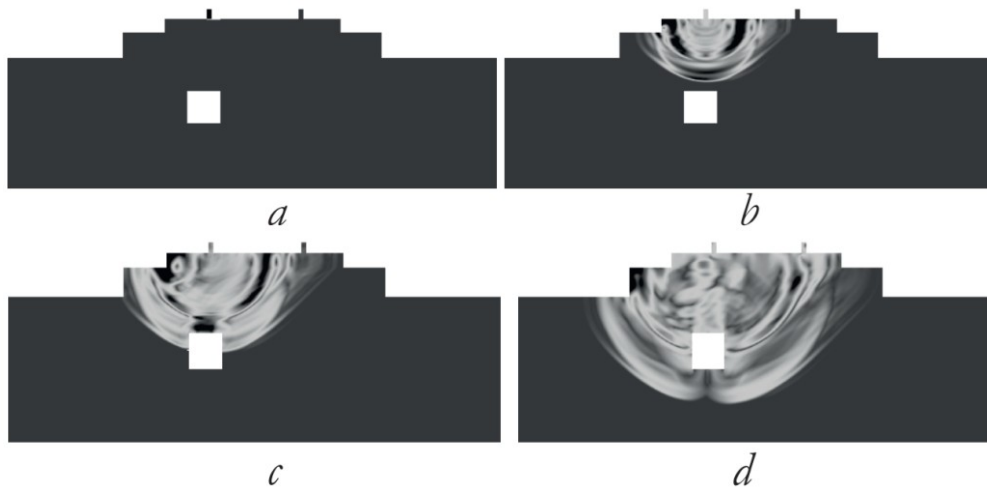
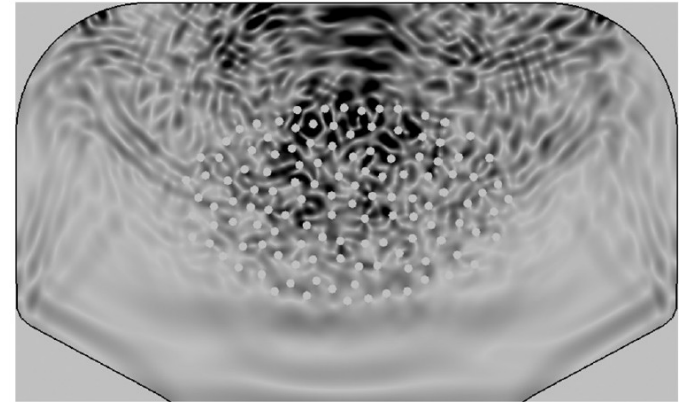
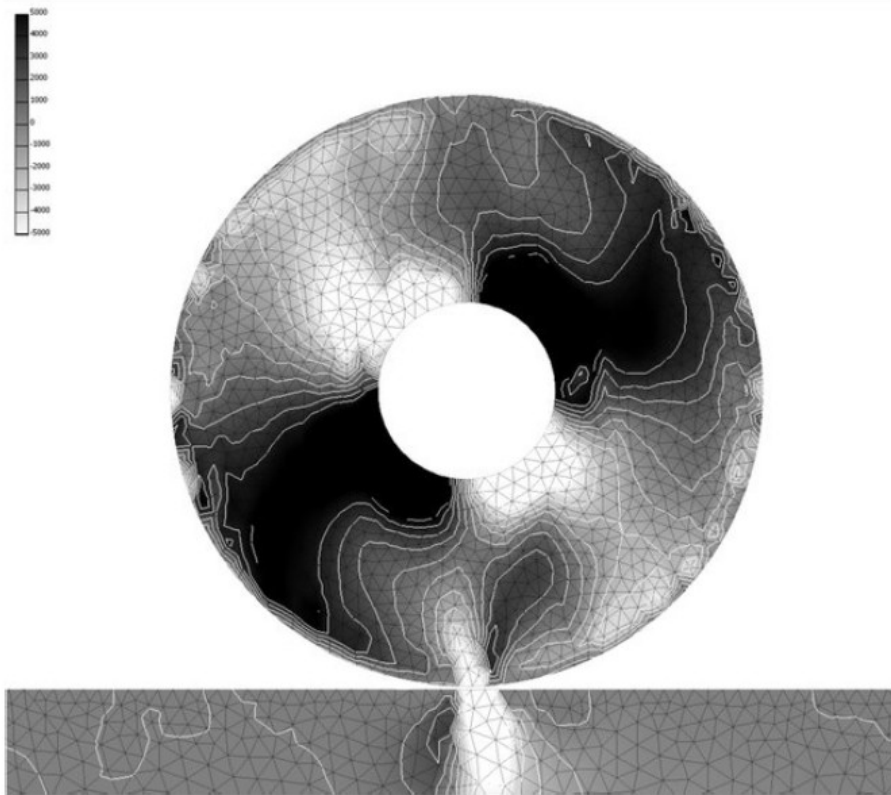


# Дефектоскопия

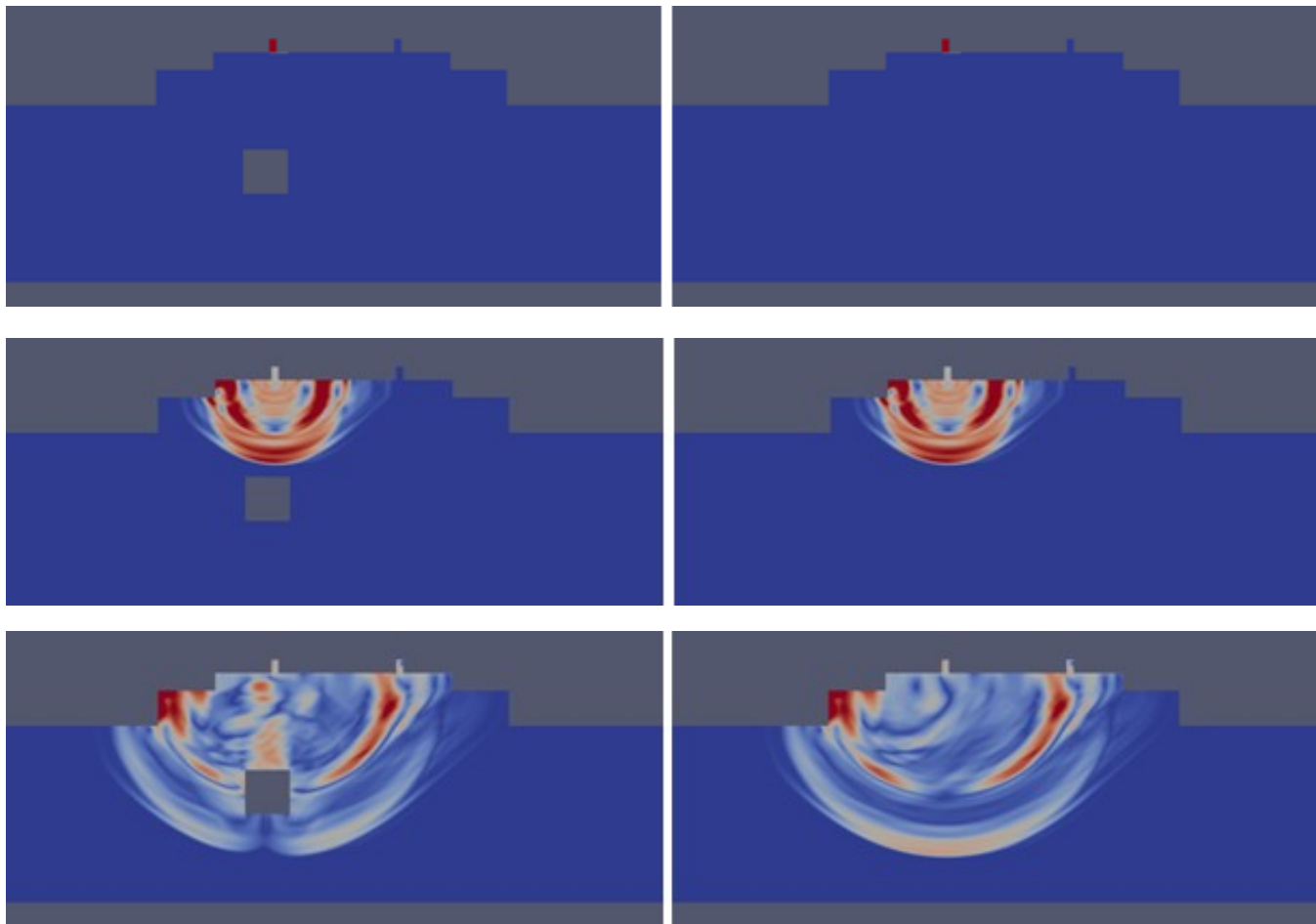




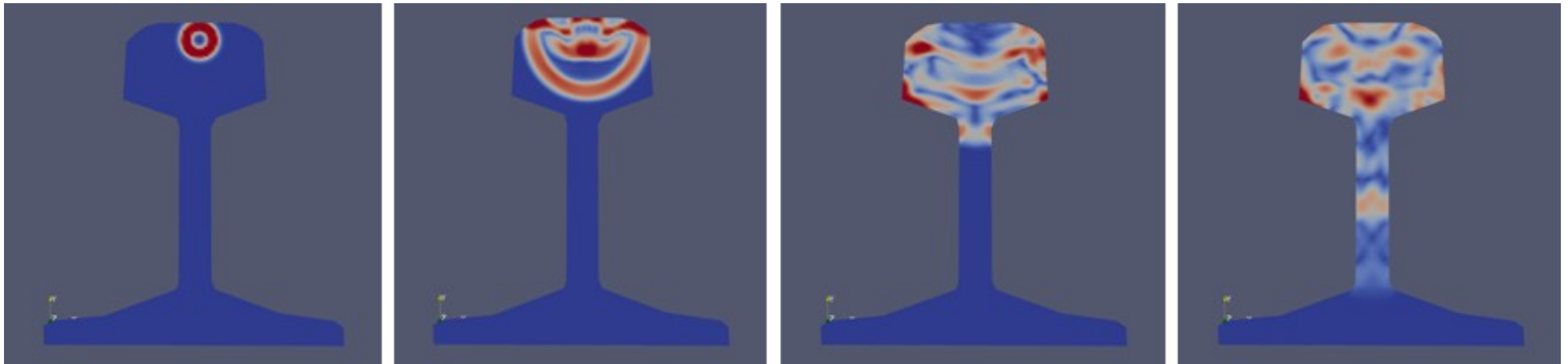
# Railways safety



# Влияние карстового образования

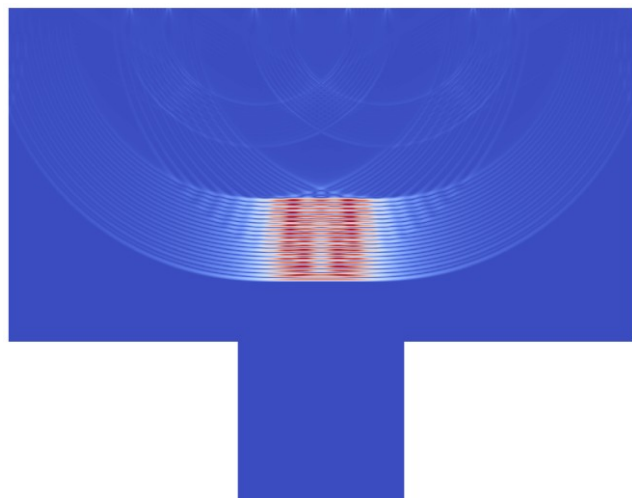


# Динамическое воздействие на рельс

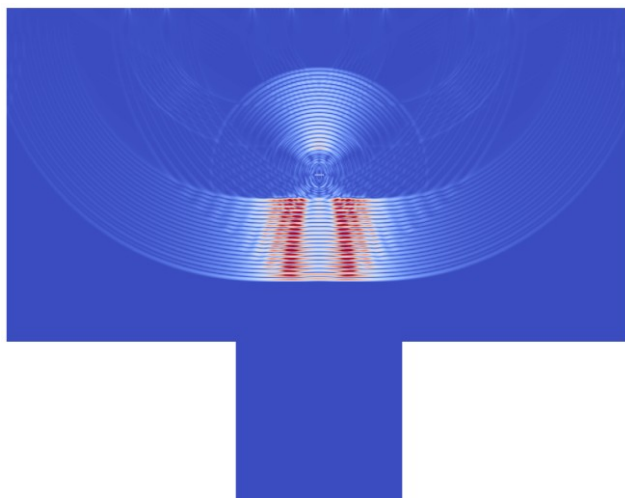




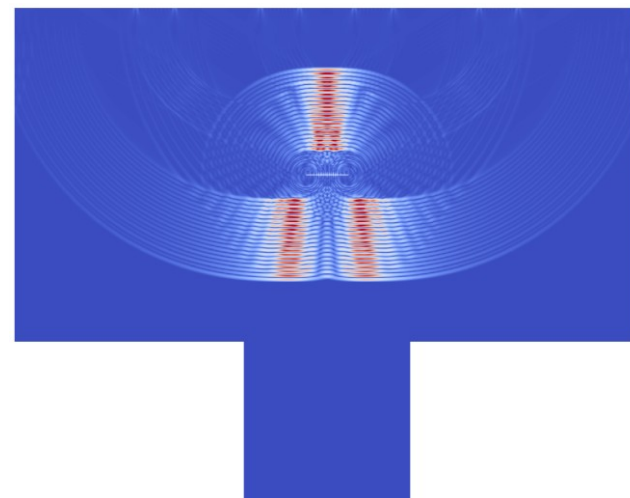
# Дефектоскопия железнодорожного рельса



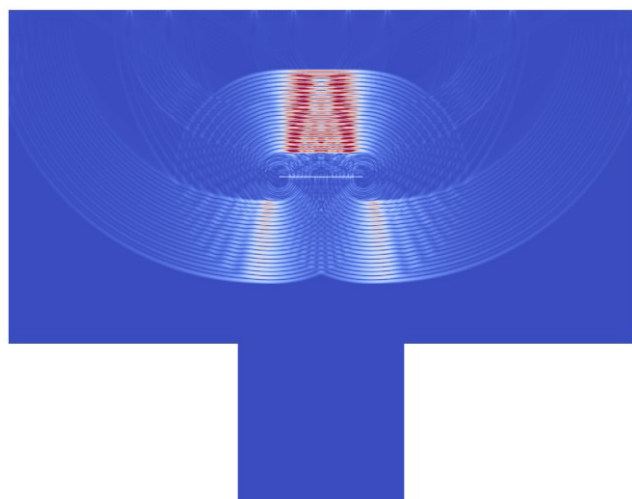
Без трещины



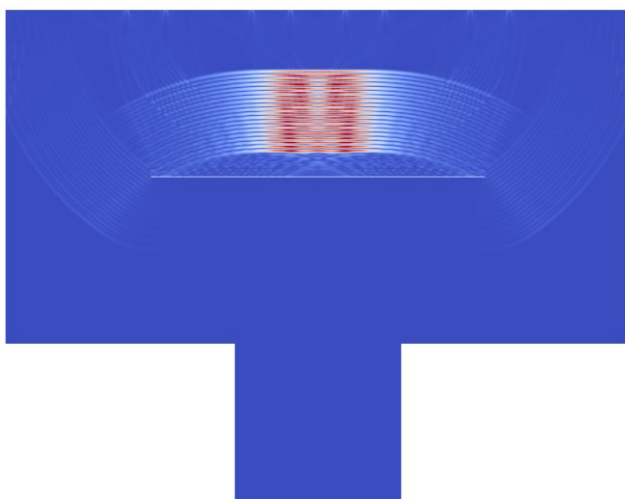
1 мм



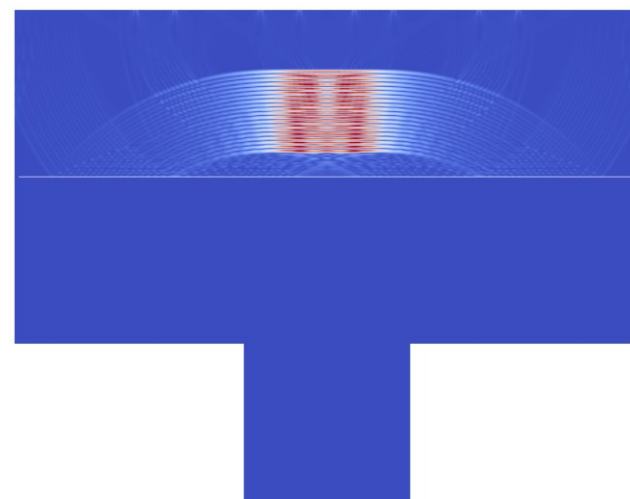
5 мм



10 мм



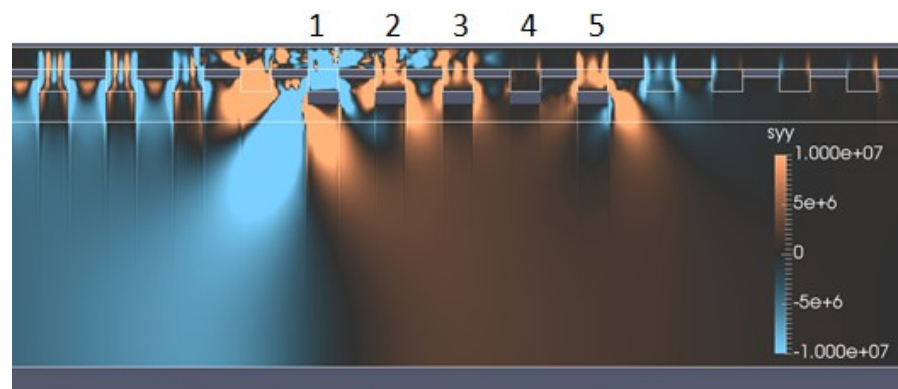
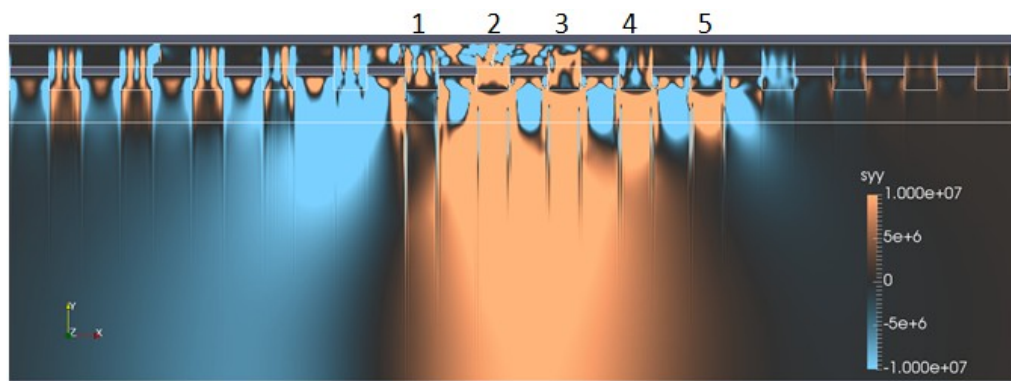
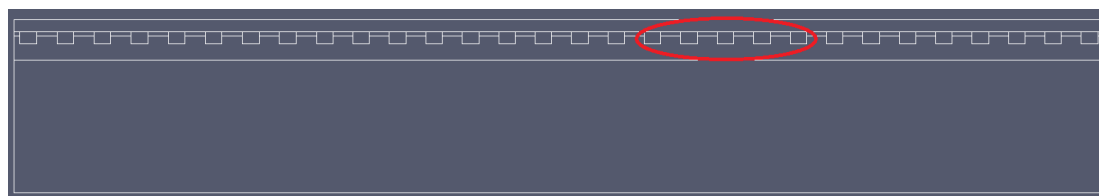
40 мм



74 мм

# Отрывы шпал от насыпи

Варьировались положение, глубина отрыва и их количество, скорость движения элемента подвижного состава



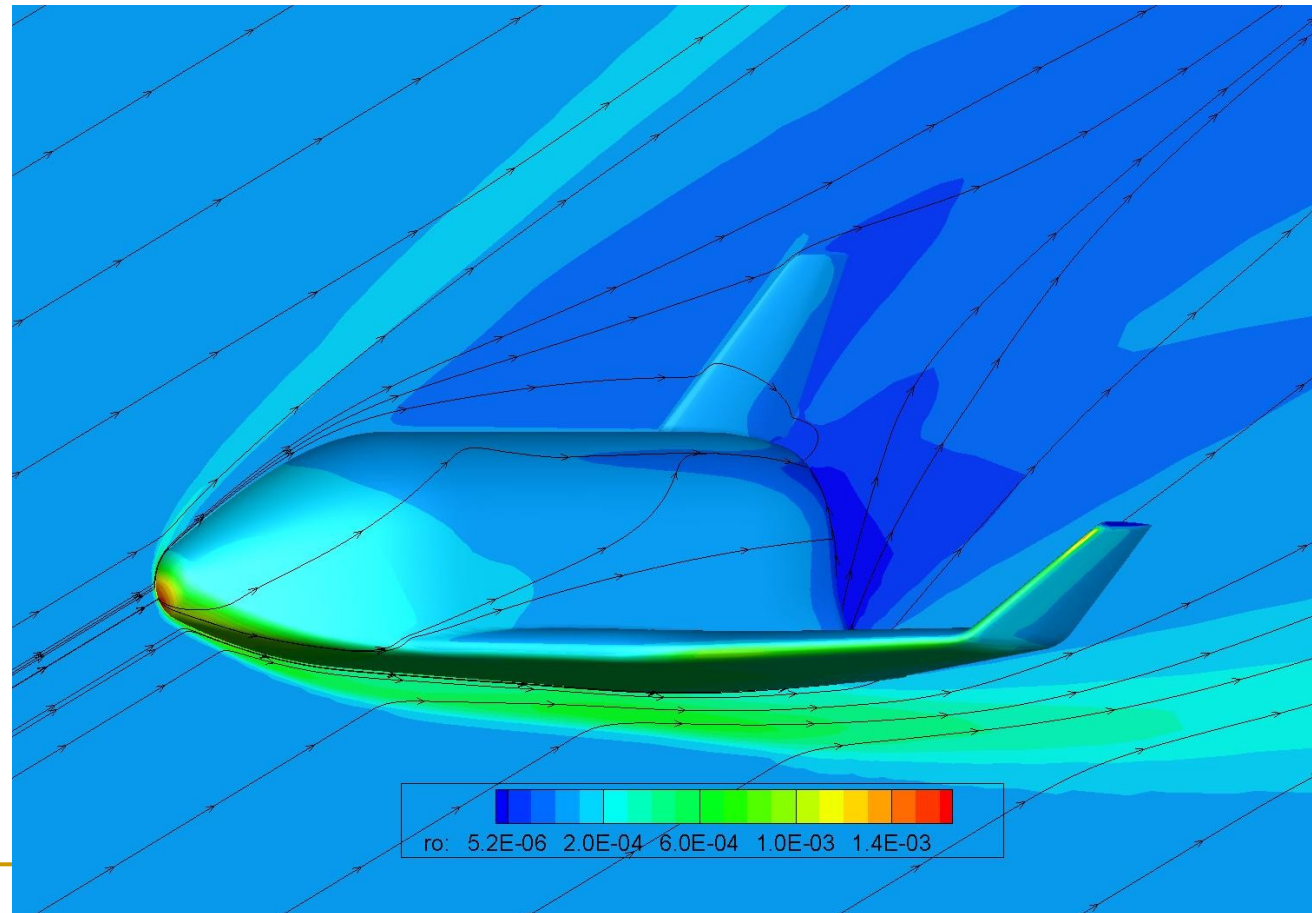
# Задачи внешней аэродинамики

Расчёт течения вокруг аппарата, летящего в атмосфере с большой сверхзвуковой скоростью.

Геометрия тела: возвращаемый космический аппарат ЦАГИ

Входные данные:

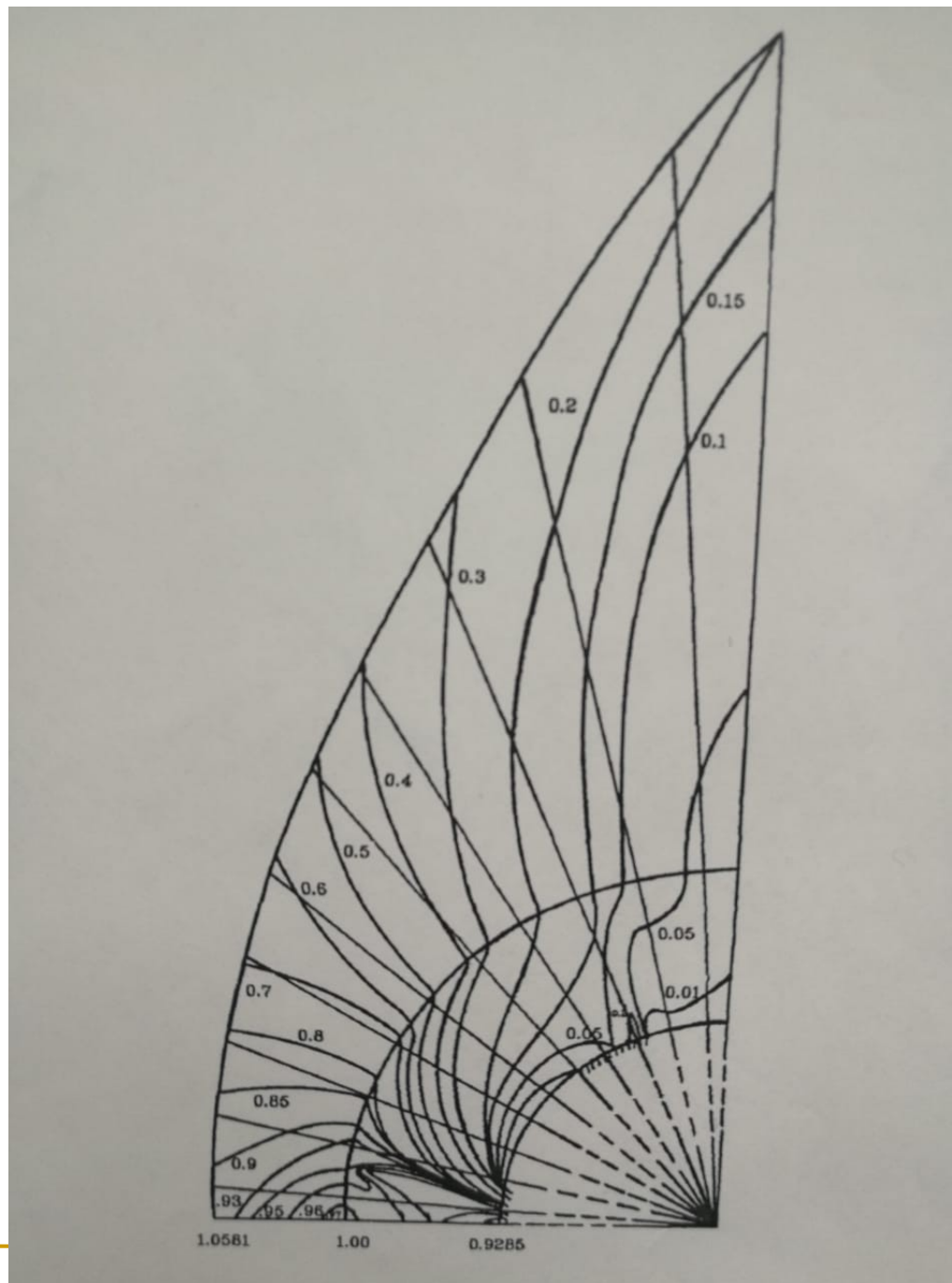
- Высота 70 км
- Число Маха 25
- угол атаки 25 градусов

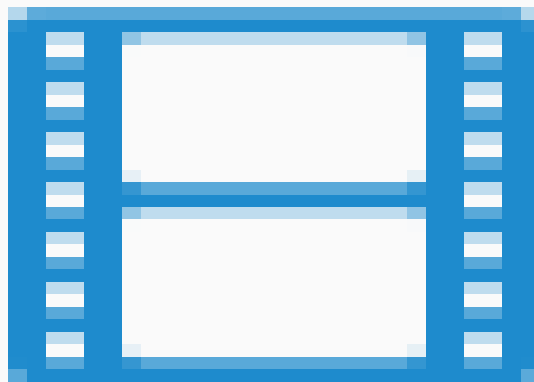


*Цветом показана плотность, линиями – траектории частиц*



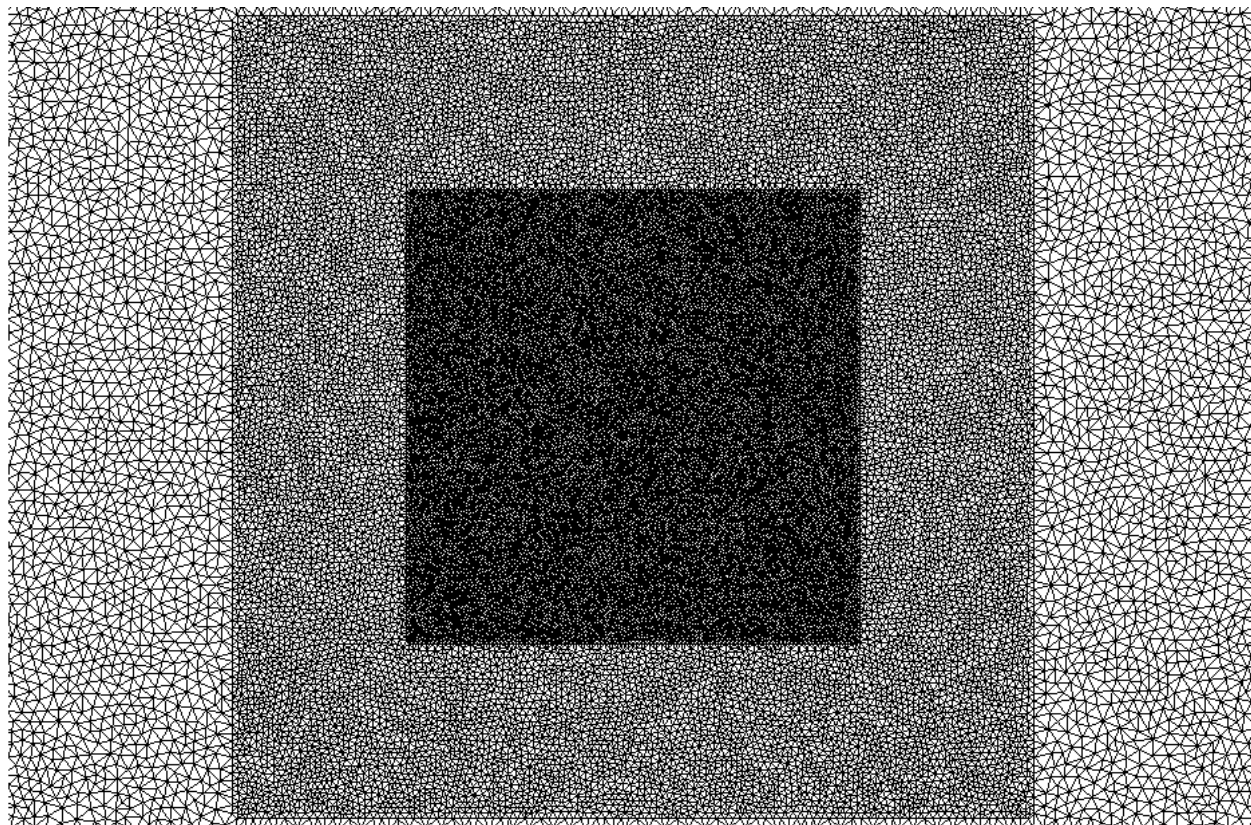
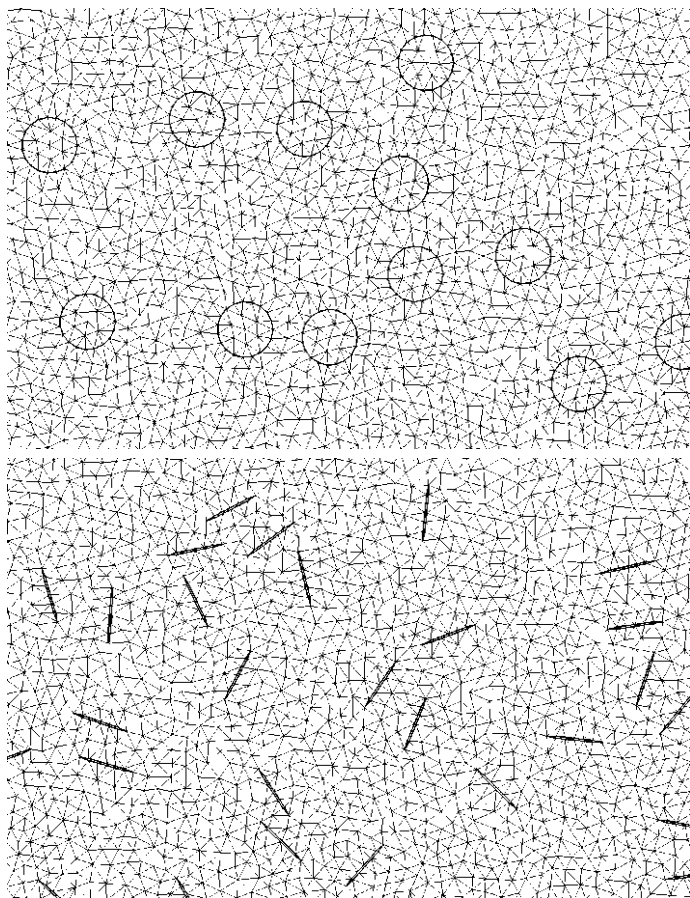
# Аэродинамическое давление на оболочку самолета





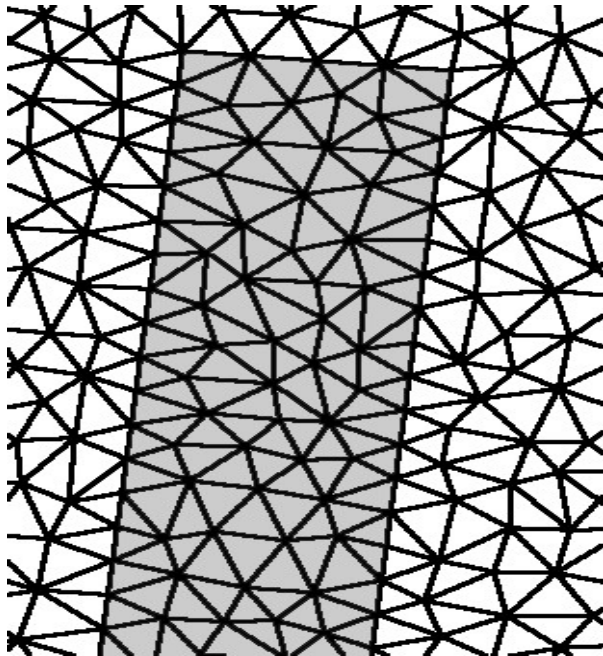
# Расчетная сетка

- Тетраэдральная сетка
- Сетки с меняющейся триангуляцией

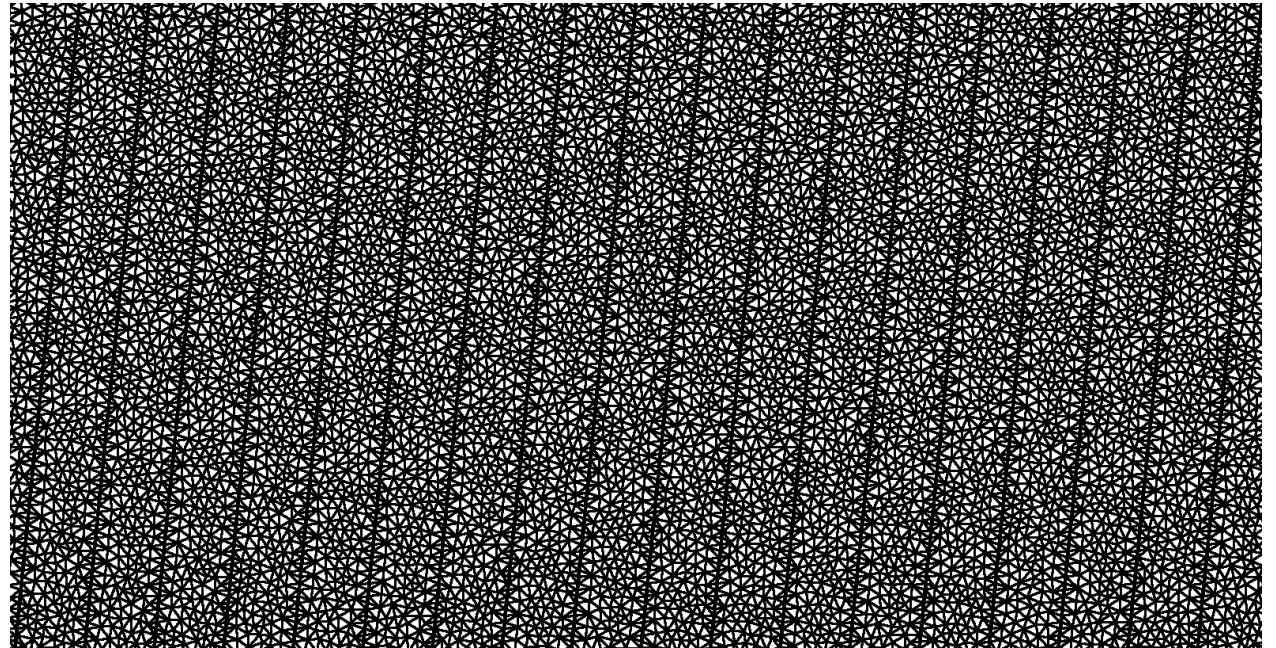




# Моделирование мегатрещины



**Осреднённая  
модель**

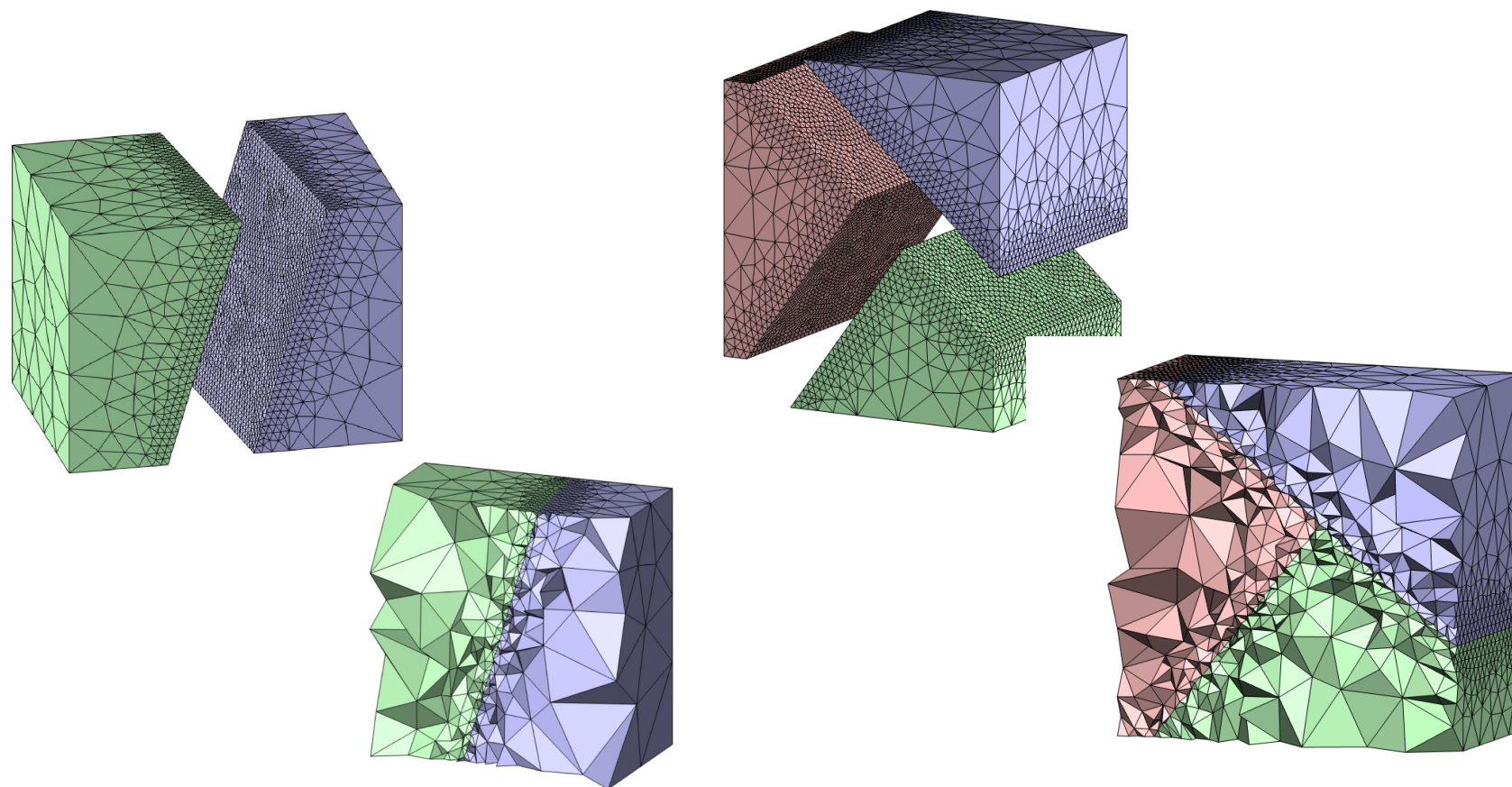


**Набор параллельных тонких трещин**

**Длина прямоугольника 200 м, ширина 10 м**

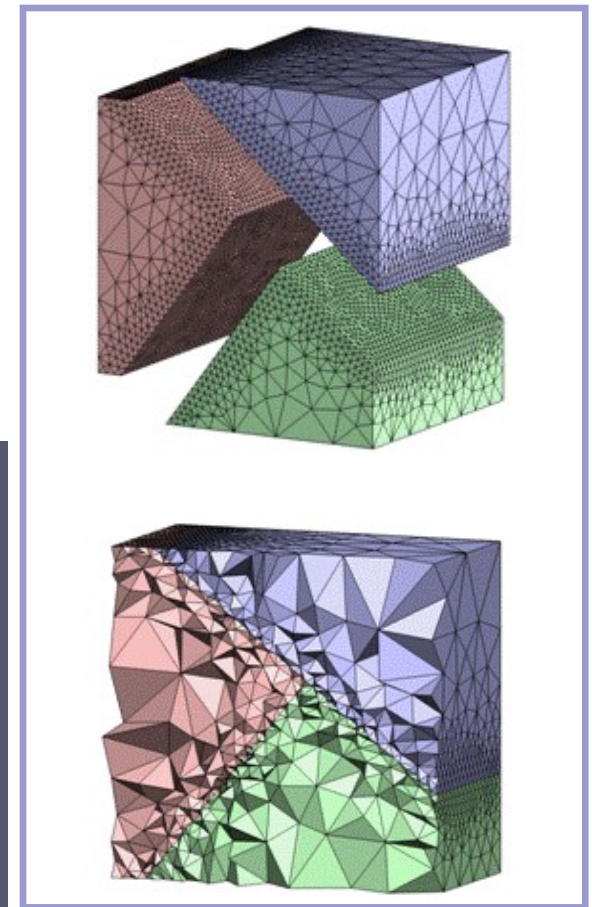
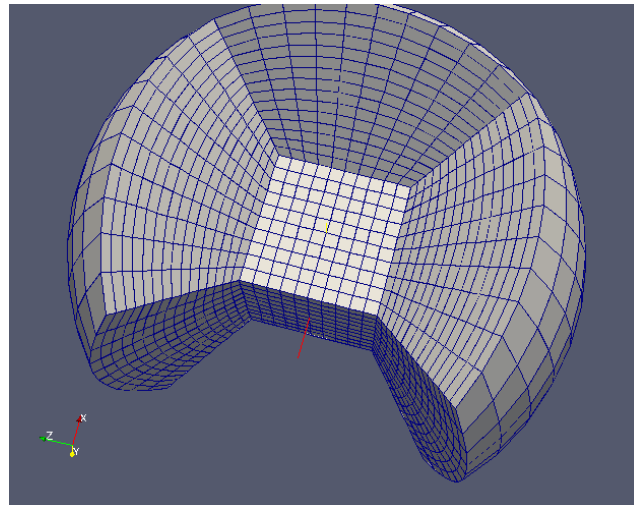
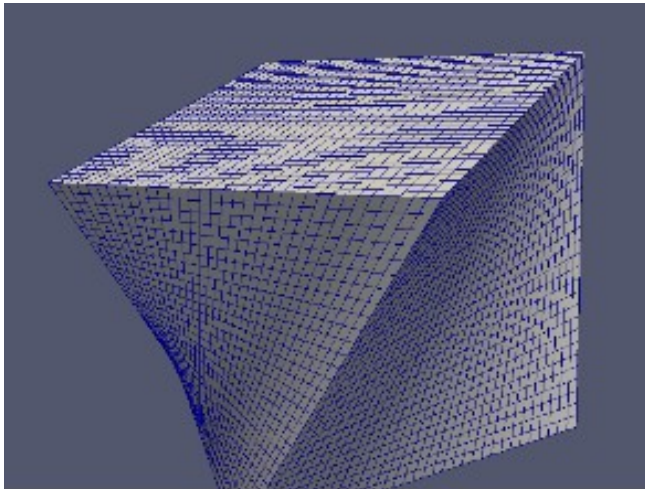
# Расчетная сетка

## ■ Тетраэдральная сетка



# Grids

- Curvilinear grids
- Tetrahedral grids





# Определяющие уравнения

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_y}{\partial t} &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial T_{yz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

1 - Уравнения механики деформируемого твёрдого тела

2 - Реологические соотношения

Параметры модели:

$\rho$  – плотность среды

$\lambda, \mu$  – упругие параметры Ламе

$v$  – вектор скорости

$T$  – тензор напряжений

# Rheology

- Linear elasticity:

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = 0.$$

- Viscosity (Maxwell model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$F_{ij} = -\frac{\sigma_{ij}}{\tau_0}.$$

- Elastoplastic material (Prandtl-Reiss model):

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{I \mu \sigma_{ij} \sigma_{kl}}{K^2},$$

$$F_{ij} = 0.$$

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } S = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2 < 2K^2 \\ 1, & \text{если } S \geq 2K^2. \end{cases}$$

# Anisotropy

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = F(x, y, z, t)$$

$$\vec{u} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}^T$$

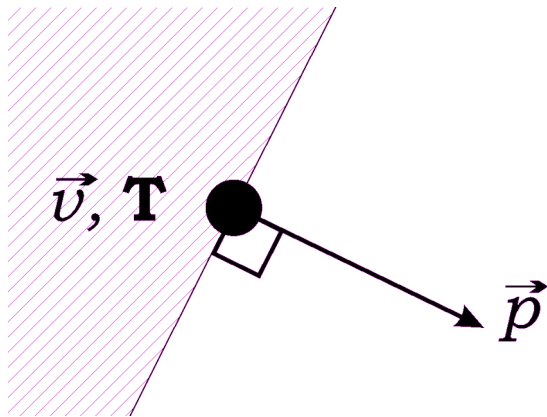
$$\begin{aligned} 2q_{ijkl} = & c_{ik}\delta_{ij}\delta_{kl} + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 c_{m+3,n+3} |\varepsilon_{mij}| |\varepsilon_{nkl}| + \\ & + \sum_{m=1}^3 c_{i,m+3}\delta_{ij} |\varepsilon_{mkl}| + \sum_{m=1}^3 c_{m+3,k} |\varepsilon_{mij}| \delta_{kl} \end{aligned}$$

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}$$



# Граничные и контактные условия

Внешняя граница



- Внешняя сила

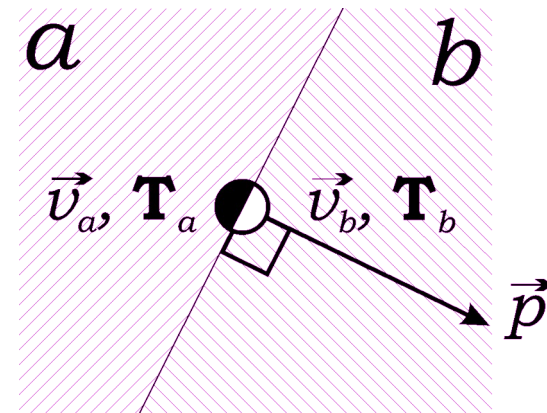
$$\sigma p = f$$

- Скорость на поверхности

- Смешанные граничные условия

- Неотражающие граничные условия

Контактные границы



- Условие сцепления

$$v_a = v_b = V, \sigma_a = -\sigma_b$$

- Условие скольжения

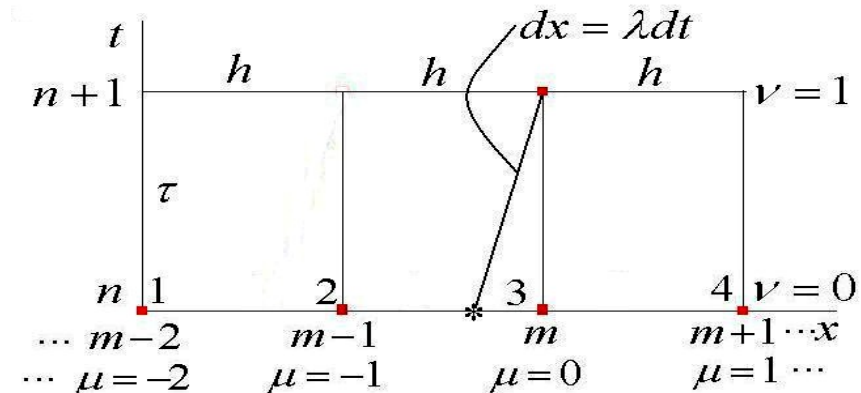
$$v_a \cdot p = v_b \cdot p, \sigma_a^a = -\sigma_b^b, \sigma_a^p = \sigma_b^p = 0$$

Контакт между жидкостью и твердым телом

# Uniform linear transport equation

- Let's start our discussion from the simplest hyperbolic equation

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0, & \lambda = \text{constant} > 0 \\ u(0, x) = u^0(x), & u(t, 0) = u^1(t) \end{cases}$$



- Its solution at an arbitrary point is

$$\begin{cases} u(t, x) = u^0(x - \lambda t) = u_*, & \text{if } x - \lambda t \geq 0 \\ u(t, x) = u^1(t - x / \lambda) = u_*, & \text{if } x - \lambda t < 0 \end{cases}$$

- Thus,  $u(t, x) = u_*$  is the constant along the characteristic:

$$dx = \lambda dt$$

- There are a lot of the difference schemes for this equation which can be written in the common form:

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu}, \quad \mu = 0, \pm 1, \dots, \quad \nu = 1, 0, -1, \dots,$$

# Approximation conditions and monotonicity

- For all difference schemes:

- We can write the approximation conditions ( $\sigma = \lambda\tau/h > 0$ ):

$$\begin{array}{l} \text{1st order} \\ - \end{array} \quad \sum_{\mu, \nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) = 1, \quad \sum_{\mu, \nu} (\mu - \nu\sigma) \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) = -\sigma$$

$$\begin{array}{l} \text{and higher} \\ - \end{array} \quad \sum_{\mu, \nu} (\mu - \nu\sigma)^k \alpha_{\mu}^{\nu} = -(-\sigma)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

- There are a lot of monotonicity criteria:

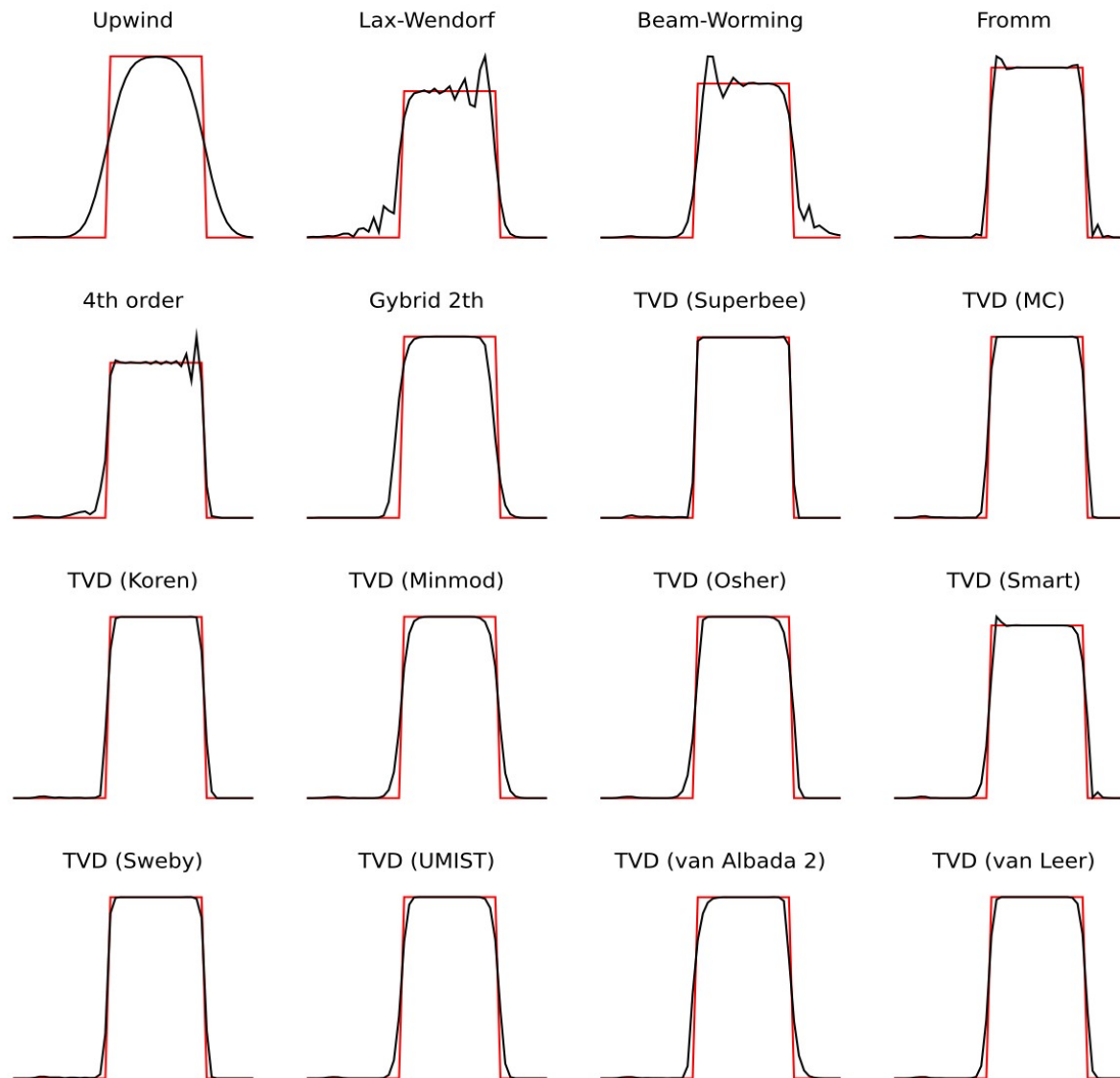
$$\text{Friedrichs} \quad - \quad \alpha_{\mu}^{\nu}(\tau, h) \geq 0$$

$$\text{Harten} \quad - \quad TV(u^{n+1}) = \sum_m |u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}| \leq \sum_m |u_{m+1}^n - u_m^n| = TV(u^n)$$

$$\text{Van Leer} \quad - \quad \begin{cases} \min \{u_m^n, u_{m-1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max \{u_m^n, u_{m-1}^n\}, & \text{if } 0 < \sigma = \lambda\tau/h < 1 \\ \min \{u_m^n, u_{m+1}^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max \{u_m^n, u_{m+1}^n\}, & \text{if } -1 < \sigma = \lambda\tau/h < 0 \end{cases}$$



# Тестовые расчёты (одномерная задача)



# Grid-characteristic method

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = F(x, y, z, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \mathbf{A}_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} &= \vec{f} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega}$$

$$\vec{\omega} = \mathbf{\Omega} \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = 0$$

