Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 2. Динамика первых и вторых моментов. Гауссовские состояния

Теретёнков Александр Евгеньевич

12 февраля 2024 г.

В прошлой серии...

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho) \equiv -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H\mathfrak{a} + f^T\mathfrak{a}, \rho\right] + \mathfrak{a}^T\rho\Gamma\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\{\mathfrak{a}^T\Gamma^T\mathfrak{a}, \rho\}.$$

С учётом упражнения:

$$\mathcal{L}^*_{H,\Gamma,f}(\hat{X}) = i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H\mathfrak{a} + f^T\mathfrak{a}, \hat{X}\right] + \mathfrak{a}^T\hat{X}\Gamma^T\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\{\mathfrak{a}^T\Gamma^T\mathfrak{a}, \hat{X}\}.$$

Динамика первых и вторых моментов

Лемма.

$$\mathcal{L}^*_{H,\Gamma,f}(\mathfrak{a}) = J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)\mathfrak{a} + iJf,$$

$$\mathcal{L}^*_{H,\Gamma,f}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T) = J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T + \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T\left(-iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right)J +$$
$$+ J\Gamma^T J + iJf\,\mathfrak{a}^T - i\mathfrak{a}\,f^T J.$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство.
1) Пусть $g \in \mathbb{C}^{2n}$. Вычислим (с учётом другого упражнения)

$$i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H\mathfrak{a} + f^T\mathfrak{a}, g^T\mathfrak{a}\right] = g^T(iJH\mathfrak{a} + iJf).$$

В силу ККС имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left([\mathfrak{a}^T, g^T\mathfrak{a}]\Gamma^T\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T\Gamma^T[g^T\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(g^T[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T]\Gamma^T\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T\Gamma^T[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T]g\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(g^T J\Gamma^T\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T\Gamma^T Jg\right) = g^T J\frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\mathfrak{a}.\end{aligned}$$

В силу произвольности g приходим к первой формуле.

Динамика первых и вторых моментов

2) Пусть $g, h \in \mathbb{C}^{2n}$. По правилу Лейбница для коммутатор имеем:

$$
\begin{aligned}
i \left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, g^T \mathfrak{a}\, \mathfrak{a}^T h\right] &= i \left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, g^T \mathfrak{a}\right] \mathfrak{a}^T h + \\
&\quad + i g^T \mathfrak{a} \left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T h\right] = \\
&= g^T (iJH\mathfrak{a} + iJf)\, \mathfrak{a}^T h + g^T \mathfrak{a}\, h^T (iJH\mathfrak{a} + iJf) = \\
&= i g^T (JH\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}^T - \mathfrak{a}\, \mathfrak{a}^T HJ + Jf\, \mathfrak{a}^T - \mathfrak{a}\, f^T J) h.
\end{aligned}
$$

Динамика первых и вторых моментов

Аналогично,

$$\frac{1}{2}\left([\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}\; \mathfrak{a}^T h]\Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}\; \mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(g^T \mathfrak{a}\; [\mathfrak{a}^T, \mathfrak{a}^T h]\Gamma^T \mathfrak{a} + [\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}]\; \mathfrak{a}^T h \Gamma^T \mathfrak{a} +$$

$$+ \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\; \mathfrak{a}^T h + \mathfrak{a}^T \Gamma^T g^T \mathfrak{a}\; [\mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}]) =$$

$$= g^T \mathfrak{a}\; \frac{1}{2}\left([\mathfrak{a}^T, h^T \mathfrak{a}]\Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [h^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left([\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}]\Gamma^T \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^T \Gamma^T [g^T \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\right) h^T \mathfrak{a} +$$

$$+ [\mathfrak{a}^T \Gamma^T, g^T \mathfrak{a}][\mathfrak{a}^T h, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}^T, g^T \mathfrak{a}][\mathfrak{a}^T h, \Gamma^T \mathfrak{a}] =$$

$$= g^T \mathfrak{a} h^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a} + g^T J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a} h^T \mathfrak{a} + g^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] \Gamma^T [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^T] h =$$

$$= g^T \left(\mathfrak{a}\; \mathfrak{a}^T \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} J + J \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2} \mathfrak{a}\; \mathfrak{a}^T + J \Gamma^T J\right) h.$$

В силу произвольности h и g приходим ко второй формуле. $\square$

Динамика первых и вторых моментов

Определение. Определим **вектор первых моментов (вектор средних)** m матрицы плотности ρ по формуле

$$m = \mathrm{tr}(\mathfrak{a}\,\rho).$$

Определим **матрицу вторых центральных моментов** D матрицы плотности ρ по формуле

$$D = \mathrm{tr}\left((\mathfrak{a} - m)\,(\mathfrak{a} - m)^T \rho\right).$$

Замечание. Последнюю формулу также можно переписать в виде

$$D = \mathrm{tr}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^T \rho) - m\,m^T.$$

Динамика первых и вторых моментов

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t,\Gamma_t,f_t}(\rho_t),$$

тогда

$$\frac{d}{dt} m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJf_t,$$

$$\frac{d}{dt} D_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J\Gamma_t^T J.$$

Динамика первых и вторых моментов

Доказательство: Уравнение Гейзенберга

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{a}_t = J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\mathfrak{a}_t + iJf,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T)_t =& J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)(\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T)_t + \\ &+ (\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T)_t\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J + \\ &+ J\Gamma_t^T J + iJf_t\ (\mathfrak{a}_t)^T - i\mathfrak{a}_t\ f_t^T J.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}m_t = J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)m_t + iJf_t$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\frac{d}{dt}m_t^T = m_t^T\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J - if_t^T J.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t = J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t + \\ + \langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J + \\ + J\Gamma_t^T J + iJf_t\, m_t^T - im_t\, f_t^T J.\end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D_t =&\frac{d}{dt}(\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t) - \left(\frac{d}{dt}m_t\right) m_t^T - m_t\left(\frac{d}{dt}m_t^T\right) = \\ =&J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t + \langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right) J + \\ &+ iJf_t m_t^T - i m_t f_t^T J + J\Gamma_t^T J - J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right) m_t m_t^T - \\ &- iJf_t m_t^T - m_t m_t^T\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right) J + i m_t f_t^T J = \\ =&J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)(\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t - m_t m_t^T) + \\ &+ (\langle \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}^T\rangle_t - m_t m_t^T)\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right) J + J\Gamma_t^T J. \quad \square\end{aligned}$$

Динамика первых и вторых моментов

Упражнение.

1. $m = \tilde{m}, \qquad D^T = \tilde{D}$
2. $DE \geqslant 0$ (принцип неопределённости Шредингера-Робертсона)
3. $D - D^T = -J$ (следствие ККС)

Проверьте, что уравнения

$$\frac{d}{dt} m_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) m_t + iJ f_t,$$
$$\frac{d}{dt} D_t = J \left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) D_t + D_t \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2} \right) J + J\Gamma_t^T J,$$

где $H_t = H_t^T = \tilde{H}_t$, $\Gamma_t^T = \tilde{\Gamma}_t$, $\Gamma_t E \geqslant 0$, $f_t = \tilde{f}_t$, сохраняют эти условия.

Динамика первых и вторых моментов

Определение. Назовём **матрицей ковариаций** C симметричную часть матрицы вторых центральных моментов

$$C = \frac{D + D^T}{2}.$$

Утверждение.

$$\frac{d}{dt}C_t = J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)C_t + C_t\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J + J\frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}J.$$

Гауссовские состояния

Определение. Состояние ρ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция $\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \mathfrak{a}})$ представима в виде экспоненты от квадратичных и линейных форм по $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{z} \equiv (z_1, \cdots, z_n, \overline{z}_1, \cdots, \overline{z}_n)^T$$

Матрицы плотности могут быть однозначно охарактеризованы посредством характеристических функций.

$$\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T C \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$
$$\chi_N(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2}\mathfrak{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2}\mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \left(C + \frac{1}{2}E\right)\mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$
$$\chi_A(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2}\mathfrak{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2}\mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \left(C - \frac{1}{2}E\right)\mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}.$$

Гауссовские состояния

Символы операторов

$$\rho_O(\mathbf{z}) \equiv \int d\mathbf{z}\, e^{-i\mathbf{u}^T\mathbf{z}} \chi_O(\mathbf{u}), \qquad O = W,N,A$$

$$\rho_W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T C^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_N(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE + \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T \left(C+\frac{1}{2}E\right)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_A(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE - \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T \left(C-\frac{1}{2}E\right)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

(в случае вырожденных матриц будут возникать дельта-функции.)

Гауссовские состояния

Смешанные состояния общего положения:

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a} + s},$$

$$K = K^T = \tilde{K}, \quad KE < 0, \quad g = \tilde{g}, \quad e^s = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|}\, e^{\frac{1}{2} g^T \frac{1}{K} g}$$

Утверждение.

$$m = -K^{-1} g, \qquad D = J \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}}, \qquad C = -\frac{J}{2} \operatorname{cth} \frac{KJ}{2}$$