

Лекция 1 (12 февраля 2024)
Обзор

1.0. Мотивировки.....	1
...1.0.0. Где мы живём?	1
...1.0.1. Трансцендентные методы в алгебраической геометрии / $\mathbb{C}$	1
1.1. Какие многообразия будем рассматривать?	1
...1.1.0. Алгебраические многообразия.....	1
...1.1.1. Комплексные многообразия	1
...1.1.2. Почти комплексные многообразия.....	1
...1.1.3. Гладкие многообразия	2
...1.1.4. Топологические многообразия	2
...1.1.5. Классы гомотопической эквивалентности многообразий	2
...1.1.6. Общий список категорий и функторов	2
2. Первые примеры.....	3
Литература	4

1.0. Мотивировки

1.0.0. Где мы живём? Теория плоской Земли... Точка зрения квантовой гравитации. Физический смысл многомерных многообразий (калибровочные теории).

1.0.1. Трансцендентные методы в алгебраической геометрии / $\mathbb{C}$. Например, алгебраические кривые как римановы поверхности.

1.1. Какие многообразия будем рассматривать?

Мы будем использовать категорный язык, для понимания которого в основном достаточно прочитать [Маклейн2004].

1.1.0. Алгебраические многообразия. Категория $\mathcal{ALG}$ алгебраических многообразий – по умолчанию комплексных (обычно проективных $\implies$ компактных) гладких связных. Вложения в проективные пространства $\mathbf{P}_N(\mathbb{C})$ не всегда существуют и обычно несущественно.

1.1.1. Комплексные многообразия. Объекты категории $\mathcal{ALMCMPL}$ в элементарной версии (через покрытия, локальные координаты и функции перехода) определяются примерно так же, как гладкие многообразия, с заменой *гладких* отображений на *голоморфные*. Более современное определение, через *структурные пучки*, будет приведено ниже.

Функтор $\mathcal{ALG} \rightarrow \mathcal{CMPL}$ определён тавтологически, по крайней мере для проективных многообразий: рациональные функции комплексных переменных голоморфны.

1.1.2. Почти комплексные многообразия. Объекты категории $\mathcal{ALMCPCL}$ почти комплексных многообразий интуитивно определяется как *линейные приближения* комплексным многообразиям. Иначе говоря, на касательных пространствах к точкам (априори гладкого чётномерного *ориентировАННОГО* – см. ниже) по возможности вводится структура векторных пространств над $\mathbb{C}$.

Функтор $\mathcal{ALMCPCL} \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ вводится с помощью производных голоморфных отображений.

1.1.3. Гладкие многообразия. Забывая почти комплексную структуру, приходим к категории гладких многообразий $\mathcal{C}^\infty$.

Функтор $\mathcal{ALMCPCL} \rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{MNF}$ определяется тавтологично.

1.1.4. Топологические многообразия. Наконец, объекты категории $\mathcal{TOPMNF}$ – это просто топологические пространства (рассматриваемого класса), локально гомеоморфные евклидовым пространствам $\mathbb{R}^n$.

Функтор $\mathcal{C}^\infty \mathcal{MNF} \rightarrow \mathcal{TOPMNF}$ снова определяется тавтологично.

1.1.5. Классы гомотопической эквивалентности многообразий. Категория $\mathcal{HOT}$ классов *гомотопической эквивалентности* многообразий стоит несколько особняком: она не является *конкретной*, то есть её объекты не представляют собой множества с дополнительной структурой.

Функтор $\mathcal{TOPMNF} \rightarrow \mathcal{HOT}$, разумеется, сопоставляет каждому топологическому многообразию класс его гомотопической эквивалентности, а каждому непрерывному отображению топологических многообразий – класс гомотопической эквивалентности этого отображения.

1.1.6. Общий список категорий и функторов. Вот все категории, которые мы бегло рассмотрели:

$$\mathcal{ALG} \rightarrow \mathcal{CMPCL} \rightarrow \mathcal{ALMCPCL} \rightarrow \mathcal{C}^\infty \mathcal{MNF} \rightarrow \mathcal{TOPMNF} \rightarrow \mathcal{HOT}$$

В курсе будут в основном рассматриваться два вопроса:

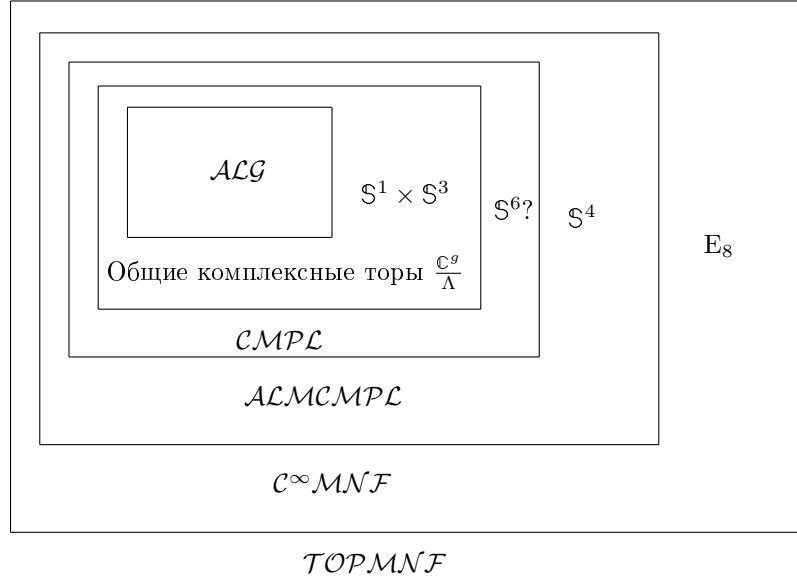
- Какие из этих функторов *сюръективны на объектах*¹? Например, всякое ли комплексное многообразие допускает алгебраическую структуру? (В комплексной размерности 1 – всякое, в размерностях начиная с 2 – не всякое).

- В случае, когда объект с более *грубой* структурой (например, топологического многообразия) является значением забывающего функтора с более *тонкой* структурой (например, топологическое многообразие *сглаживаемо*), как описать все более тонкие структуры, соответствующие обной грубой (например, описать все гладкие структуры на сферах)?

¹Общепринятый английский термин – *essentially surjective*. Его общепринятый перевод в *существенном сюръективный* представляется не очень удачным.

2. Первые примеры

На диаграмме ниже изображаются НЕ множества, а *классы объектов категорий!*



Четырёхмерное *несглаживаемое* многообразие E_8 – один из самых трудных примеров, которые нам предстоит разобрать. В меньших размерностях все топологические многообразия сглаживаемы.

Наоборот, сфера S^4 – простой пример гладкого многообразия, не допускающего почти комплексной структуры.

Пример неинтегрируемой почти комплексной структуры снова прост и снова сфера – это S^6 . Имеется в виду структура, определённая алгеброй октонионов – мы её в своё время определим. Однако со сферой S^6 имеется скандальная ситуация: *проблема Хопфа* заключается в вопросе о том, существует ли на S^6 другая почти комплексная структура, уже интегрируемая. Венгерский математик Габор Этези в ОПУБЛИКОВАННОЙ работе [Etesi2015] утверждает, что существует, и приводит явные формулы, но специалисты этой работе не верят.

Неочевидные комплексные структуры имеются на произведениях нечётномерных сфер, в частности, на $S^1 \times S^3$; все они не алгебраичны. Более естественный класс примеров – *комплексные торы*, то есть факторы $\frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$ комплексных векторных пространств по *решёткам*, то есть (здесь) по дискретным подгруппам максимального ранга $2g$ аддитивной группы векторного пространства $\mathbb{C}^g$. Среди этих факторов встречаются замечательные алгебраические, так называемые *абелевы* многообразия, но *общий*, то есть "наугад взятый", комплексный тор при $g \geq 2$ не алгебраичен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Etesi2015] Gabor Etesi, *Complex structure on the six dimensional sphere from a spontaneous symmetry breaking*. Journ. Math. Phys. 56, 043508-1-043508-21 (2015).
- [Маклейн2004] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*. М., ФИЗМАТЛИТ, 2004.