

Воротов Алексей
 Доклад на семинаре
 "Стохастика"
 9 декабря 2011 г.

Определение случайного блуждания в случайной среде. Возвратность и невозвратность. Закон больших чисел.

Основные определения

В ходе изложения мы будем в основном придерживаться работы [1, стр. 3–14], к которой заинтересованный читатель может обратиться за подробностями. За немного другим и более кратким изложением можно обратиться к [2, стр. 207–215].

Сначала приведем общее определение случайного блуждания в случайной среде, а затем рассмотрим частный случай блуждания по $\mathbb{Z}^1$.

Пусть дан граф (бесконечный, ориентированный), задаваемый множествами вершин и ребер (V, E) . Для $v \in V$ за N_v обозначим множество концов исходящих из v ребер. Обозначим $M_1(N_v)$ множество всех вероятностных мер на V с носителем N_v .

На $\Omega := \prod_v M_1(N_v)$ – множестве всех сред – естественным образом вводится борелевская σ -алгебра $\mathcal{F}$. На $(\Omega, \mathcal{F})$ задана вероятностная мера P . Таким образом, можно говорить, что случайная среда $\omega \in \Omega$ распределена согласно P .

Случайное блуждание в среде $\omega = (\omega_v)_{v \in V}$ – это однородная марковская цепь X_n со значениями в V и переходными вероятностями $P_\omega(X_{n+1} = w | X_n = v) = \omega_v(w)$.

Рассмотрим $(V^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами. Обозначим P_ω^v закон распределения на $(V^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$, при котором $P_\omega^v(X_0 = v) = 1$.

Далее определим меру $\mathbb{P}^v := P \otimes P_\omega^v$ на $(\Omega \times V^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ из соотношения

$$\mathbb{P}^v(F \times G) = \int_F P_\omega^v(G) P(d\omega), \quad F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}.$$

Поскольку ниже будут рассматриваться одномерные блуждания, удобно ввести обозначения: $\omega_z^+ := \omega_z(z+1)$, $\omega_z^- := \omega_z(z-1)$, $\omega_z^o := \omega_z(z)$; $\rho_z := \frac{\omega_z^-}{\omega_z^+}$.

Эргодические системы далее всегда будут рассматриваться относительно преобразования сдвига θ на Ω .

Возвратность и невозвратность

Основные теоремы будут формулироваться в условиях следующих предположений.

Предположения ★.

- 1) P стационарна и эргодична,
- 2) $E_P(\log \rho_0)$ определено (возможны значения $\pm\infty$),
- 3) $P(\omega_0^+ + \omega_0^- > 0) = 1$.

Теорема. В предположениях (★):

- 1) $E_P(\log \rho_0) < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 2) $E_P(\log \rho_0) > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 3) $E_P(\log \rho_0) = 0 \Rightarrow -\infty = \varliminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \varlimsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.

Схема доказательства:

Будем считать, что $P(\omega_0^+, \omega_0^- > 0) = 1$. Доказательство для случая $P(\omega_0^+ = 0) > 0$ ($P(\omega_0^- = 0) > 0$) легко следует из эргодичности.

Имеем $|\log \rho_z| < \infty$.

Для $z \in [-m_-, m_+]$ определим $\nu_{m_-, m_+, \omega}(z) := P_\omega^z$ (Блуждание сначала попадает в $-m_-$, а не в m_+).

Функция $\nu_{m_-, m_+, \omega}(z)$ является гармонической по z , поэтому в (одномерном случае) ее легко выписать в явном виде:

$$\nu_{m_-, m_+, \omega}(z) = \frac{\sum_{i=z+1}^{m_+} \prod_{j=z+1}^{i-1} \rho_i}{\sum_{i=z+1}^{m_+} \prod_{j=z+1}^{i-1} \rho_i + \sum_{i=-m_-+1}^z (\prod_{j=i}^z \rho_i^{-1})}$$

Пусть $S(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \rho_1 \dots \rho_n$, $F(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} \rho_0^{-1} \dots \rho_{-n}^{-1}$; $S_+ := \{S(\omega) < \infty\}$, $F_+ := \{F(\omega) < \infty\}$.

Легко проверить, что на $S_+ \cap \overline{F_+}$ будет $P_{\omega}^o(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$. Аналогично на $\overline{S_+} \cap F_+$ будет $P_{\omega}^o(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1$, на $\overline{S_+} \cap \overline{F_+}$ будет $P_{\omega}^o(-\infty = \varliminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \varlimsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$.

Так как S_+ и F_+ инвариантны, то из эргодичности $P(S_+) \in \{0, 1\}$ и $P(F_+) \in \{0, 1\}$. Кроме того, если $P(F_+) = 1$, то $P(S_+) = 0$.

Поэтому остается доказать, что $P(S_+) = 1 \Leftrightarrow E_P(\log \rho_0) < 0$ (и аналогичное утверждение для F_+).

Достаточность легко следует из эргодической теоремы, примененной к логарифмической функции.

Далее нам понадобится следующая общая лемма.

Лемма (Кестен). Для стационарной последовательности $\{Y_i\}$ возьмем $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_k$. Тогда п.н. событие $Z_n \rightarrow \infty$ влечет $\{\varliminf Z_n/n > 0\}$.

Доказательство необходимости следует из леммы Кестена для $Y_i := -\log \rho_i$ и эргодической теоремы. □

Для i.i.d-сред теорему можно сформулировать в аналогичном виде, заменив левые части условий 1), 2), 3) соответственно на

- 1') $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(\prod_{j=1}^n \rho_j > 1) < \infty$,
- 2') $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(\prod_{j=1}^n \rho_j < 1) < \infty$,
- 3') $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(\prod_{j=1}^n \rho_j > 1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(\prod_{j=1}^n \rho_j < 1) = \infty$.

В частности, это бывает полезно, когда $E_P(\log \rho_0)$ не определено.

Доказательство можно найти в [3].

Закон больших чисел

Введем следующие обозначения: $\bar{S} := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{(-i)}^+} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_{(-j)} + \frac{1}{\omega_0^+}$, $\bar{F} := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i^-} \prod_{j=0}^{i-1} \rho_j^{-1} + \frac{1}{\omega_0^-}$.

Теорема. В предположениях (★):

- 1) $E_P(\bar{S}) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1}{E_P(\bar{S})}$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 2) $E_P(\bar{F}) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = -\frac{1}{E_P(\bar{F})}$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 3) $E_P(\bar{S}) = E_P(\bar{F}) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.

Замечание. Для i.i.d-сред теорема приобретает вид

- 1) $E_P(\rho_0) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1 - E_P(\rho_0)}{E_P(1/\omega_0^+)}$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 2) $E_P(\rho_0^{-1}) < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = -\frac{1 - E_P(\rho_0^{-1})}{E_P(1/\omega_0^-)}$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.
- 3) $E_P^{-1}(\rho_0) \leq 1 \leq E_P(\rho_0^{-1}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.

Схема доказательства теоремы:

Будем доказывать теорему в случае 1, случаи 2 и 3 разбираются аналогично.
Сначала введем несколько вспомогательных величин:

$$T_0 := 0, T_n := \min\{k | X_k = n\};$$

$$\tau_0 := 0, \tau_n := T_n - T_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Доказательство теоремы по существу разбивается на три леммы.

Лемма 1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ (т.е. $\tau_n \neq \infty$), то $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ – стационарная и эргодическая последовательность.

Доказательство леммы можно найти в [1, стр. 9]. Поскольку оно достаточно техническое, здесь его опускаем.

Лемма 2. В предположениях (★): $E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1) = E_P(\bar{S})$.

Схема доказательства леммы 2:

Заметим, что если $X_0 = 0$, то τ_1 представляется в виде

$$\tau_1 = \mathbf{1}_{\{X_1=1\}} + \mathbf{1}_{\{X_1=0\}}(1 + \tau'_1) + \mathbf{1}_{\{X_1=-1\}}(1 + \tau''_0 + \tau''_1),$$

где τ'_1 – время первого попадания в 1 по прошествии времени 1, $1 + \tau''_0$ – время первого попадания в 0 по прошествии времени 1, $1 + \tau''_0 + \tau''_1$ – время первого попадания в 1 по прошествии времени $1 + \tau''_0$.

Беря E_ω^o от обеих частей равенства, получим $E_\omega^o(\tau_1) = 1 + (1 - \omega_0^+)E_\omega^o(\tau_1) + \omega_0^- E_{\theta^{-1}\omega}^o(\tau_1)$. Откуда $E_\omega^o(\tau_1) = \frac{1}{\omega_0^+} + \rho_0 E_{\theta^{-1}\omega}^o(\tau_1) = \dots = \frac{1}{\omega_0^+} + \frac{\rho_0}{\omega_{(-1)}^+} + \frac{\rho_0 \rho_{(-1)}}{\omega_{(-2)}^+} + \dots + \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \rho_i}{\omega_{(-m)}^+} + (\prod_{i=0}^{m-1} \rho_i) E_{\theta^{-m}\omega}^o(\tau_1)$.

Отбрасывая последнее слагаемое, устремляя m к бесконечности и беря E_P , получаем $E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1) \leq E_P(\bar{S})$. Докажем теперь обратное неравенство.

Продельвая то же самое для $\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}$, получаем $E_\omega^o(\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}) \leq \bar{S} + M \prod_{i=0}^{-(m-1)} \rho_i$. Поскольку если $E_P(\bar{S}) < \infty$, то $E_P(\prod_{i=0}^{-(m-1)} \rho_i) \rightarrow \infty$, при $m, M \rightarrow \infty$ получаем $E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \infty\}}) \leq E_P(\bar{S})$.

Предположим, что $E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1) < \infty$. Тогда $\tau_1 < \infty$ п.в., откуда и вытекает требуемое.

Если же $E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1) = \infty$, то по первой теореме $E_P(\log \rho_0) > 0$. Тогда из эргодической теоремы вытекает $\prod_{j=0}^{i-1} \rho_{(-j)} \rightarrow \infty$, а значит $E_P(\bar{S}) = \infty$.

Таким образом, лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $\frac{T_n}{n} \rightarrow \alpha < \infty$, то $\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$.

Схема доказательства леммы 3:

Для каждого n возьмем k_n такое, что $T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}$.

Тогда $k_n - (n - T_{k_n}) \leq X_n < k_n + 1$.

Отсюда, деля неравенство на n и устремляя n к бесконечности, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}.$$

Но из определения $\{k_n\}$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n}$, что и доказывает лемму.

Завершение доказательства теоремы:

Из лемм 1 и 2 получаем $\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n} \rightarrow E_{\mathbb{P}^o}(\tau_1) = E_P(\bar{S}) < \infty$ $\mathbb{P}^o$ -п.в.

Из леммы 3 получаем требуемое.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zeitouni O. Lecture notes on random walks in random environment, 2003
- [2] Sznitman A. Topics in random walks in random environment, Lectures given at the School and Conference on Probability Theory Trieste, 13 - 31 May 2002
- [3] Solomon F. Random walks in a random environment, The Annals of Probability, 1975, Vol. 3, No. 1, 1-31