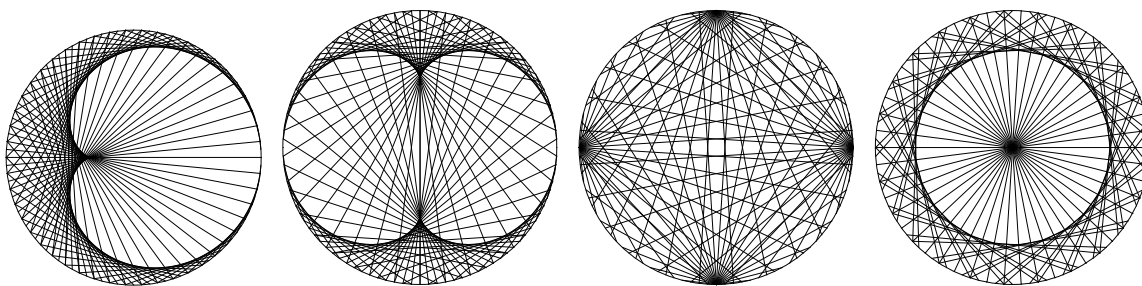


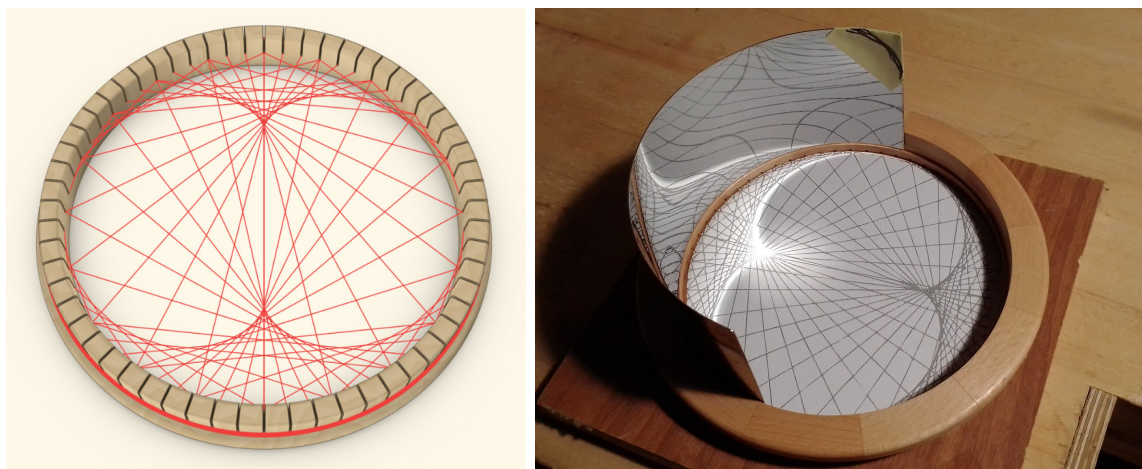
Дизайны на окружности

М.А. Королёв

Нанесём на окружность q точек, разбивающих её на дуги равной длины и пронумеруем их числами от 0 до $q - 1$. Возьмём некоторое целое число a , не делящееся на q , и соединим точку, имеющую номер k , с точкой номер t , где $t \equiv ak \pmod{q}$. Прделаав это для всех k , мы получим рисунок из линий, который иногда называется «дизайном на окружности» или «круговым дизайном». Круговые дизайны - объекты, давно и хорошо известные и любителям, и профессионалам. Одна из причин - в том, что они обладают несомненной эстетической привлекательностью:



Кроме того, картинки, возникающие в ходе такой процедуры, можно реализовать в виде вещественных конструкций из нитей. Техника, основанная на создании изображений с помощью нитей, именуется «string art», «изонить», «вышивка по картону». Кроме того, на основе таких картинок можно объяснять физические явления, с которыми мы сталкиваемся повседневно, каждый раз, как берём в руки чашку с кофе или чаем¹⁾.



¹⁾Иллюстрации любезно предоставлены Николаем Николаевичем Андреевым.

Пусть задано число q , а радиус окружности равен (для простоты) единице. Сколько потребуется нити для реализации такой конструкции для заданного a ? Известно, что если $a - 1$ и q взаимно просты, то такая длина $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, a)$ не зависит от a (это - школьное упражнение, но, кажется, этот факт был отмечен совсем недавно).

А что будет, если соединять точки не по «линейному» правилу $k \mapsto ak \pmod{q}$, а по более сложному: $k \mapsto af(k) \pmod{q}$? Визуальная красота, как правило, разрушается. Но можно поставить, например, тот же вопрос о поведении суммарной длины $\mathcal{L}(q, a)$ нити при фиксированном q и изменении a .

В докладе планируется познакомить слушателей с результатами численных экспериментов, отвечающих разным арифметическим функциям f , высказать некоторые предположения и сформулировать в виде утверждений то небольшое, что удаётся строго доказать.