Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 4. Затухающий одномерный осциллятор. Фермионная динамика с квадратичным генератором

Теретёнков Александр Евгеньевич

26 февраля 2024 г.

В прошлой серии...

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0, \gamma_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Явно выпишем генератор

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\left[\omega_0 a^\dagger a, \rho\right] + \gamma_1 \left(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a\right) + \\ + \gamma_2 \left(a^\dagger \rho a - \frac{1}{2}aa^\dagger \rho - \frac{1}{2}\rho a a^\dagger\right)$$

В первую очередь будем иметь ввиду

$$\gamma_1 = \gamma_0(N+1), \qquad \gamma_2 = \gamma_0 N, \qquad N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$$

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_0, \qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = N$$

$$\langle a \rangle_t = e^{-\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a \rangle_0$$
$$\langle a^2 \rangle_t = e^{-2\left(\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)t} \langle a^2 \rangle_0$$
$$\langle a^\dagger a \rangle_t = e^{-\gamma_0 t} \langle a^\dagger a \rangle_0 + (1 - e^{-\gamma_0 t}) N$$

То есть при $\gamma_1 > \gamma_2$ осциллятор приходит в равновесие со средой. $(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{\beta\omega_0})$
При $\gamma_1 < \gamma_2$ происходит экспоненциальный рост это соответствует отрицательной температуре, то есть инвертированно заселённому резервуару, поэтому говорят о некогерентной накачке.

Пример. Затухающий одномерный осциллятор

В случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, получим

$$\langle a \rangle_t = e^{-i\omega_0 t} \langle a \rangle_0$$
$$\langle a^2 \rangle_t = e^{-2i\omega_0 t} \langle a^2 \rangle_0$$
$$\langle a^\dagger a \rangle_t = \langle a^\dagger a \rangle_0 + \gamma t$$

(Нет затухания первых моментов и линейно растут интенсивности.)
Напомним, что в общем случае $\Gamma = \Gamma^T$ соответствует

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[\hat{H}, \rho] - \frac{1}{2} \sum_i [\hat{C}^{(i)}, [\hat{C}^{(i)}, \rho]],$$

которое возникает при усреднении по классическому Винеровскому процессу.

Фермионный случай

Рассмотрим гильбертово пространство $\otimes_{j=1}^{n}\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^{2^n}$. В таком гильбертовом пространстве можно ввести n пар операторов рождения и уничтожения по формулам

$$
\begin{aligned}
c_i &= (\otimes_{j=1}^{i-1}\sigma_3) \otimes \sigma^- \otimes (\otimes_{j=i+1}^{n} I_2), \qquad i = 1, \ldots, n,\\
c_i^\dagger &= (\otimes_{j=1}^{i-1}\sigma_3) \otimes \sigma^+ \otimes (\otimes_{j=i+1}^{n} I_2), \qquad i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

где $\sigma_3, \sigma^-, \sigma^+$ — матрицы Паули, а I_2 — единичная матрица:

$$
\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Фермионный случай

Фермионные операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим антикомутационным соотношениям (КАС)

$$\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{c_i, c_j\} = 0.$$

Введём $2n$-вектора $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_n, c_1^\dagger, \ldots, c_n^\dagger)^T$ операторов рождения-уничтожения. Тогда обозначим

$$f^T \mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}^T f \equiv \sum_{i=1}^{n} (f_i c_i + f_{i+n-1} c_i^\dagger), \qquad \forall f \in \mathbb{C}^{2n},$$

$$\mathfrak{c}^T K \mathfrak{c} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (K_{i,j} c_i c_j + K_{i+n,j} c_i^\dagger c_j + K_{i,j+n} c_i c_j^\dagger + K_{i+n,j+n} c_i^\dagger c_j^\dagger),$$

$\forall K \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$.

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T\mathfrak{c}, g^T\mathfrak{c}\} = f^T E g, \qquad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T\mathfrak{c}, g^T\mathfrak{c}\} = f^T E g, \qquad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Для вычислений нам также понадобится $\sim$-сопряжение. Теперь действие эрмитового сопряжения может быть представлено формулами $(g^T\mathfrak{c})^\dagger = \tilde{g}^T\mathfrak{c}$ и $(\mathfrak{c}^T K\mathfrak{c})^\dagger = -\mathfrak{c}^T\tilde{K}\mathfrak{c}$, где $K = -K^T$.

Фермионный случай

КАС примут вид

$$\{f^T \mathfrak{c}, g^T \mathfrak{c}\} = f^T E g, \qquad \forall f, g \in \mathbb{C}^{2n},$$

Для вычислений нам также понадобится $\sim$-сопряжение. Теперь действие эрмитового сопряжения может быть представлено формулами $(g^T \mathfrak{c})^\dagger = \tilde{g}^T \mathfrak{c}$ и $(\mathfrak{c}^T K \mathfrak{c})^\dagger = -\mathfrak{c}^T \tilde{K} \mathfrak{c}$, где $K = -K^T$. По аналогии с бозонным случаем будем писать tr для следа матриц в пространстве $\otimes_{j=1}^n \mathbb{C}^2$ и Tr для следа матриц в пространстве $\mathbb{C}^{2n}$.

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. Пусть $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$

$$\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^T \frac{A - A^T}{2} \mathfrak{c} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} AE,$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. Пусть $A \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$

$$\mathfrak{c}^T A\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^T \frac{A - A^T}{2}\mathfrak{c} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} AE,$$

Лемма. Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}, g, f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$\left[\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A\mathfrak{c} + f^T\mathfrak{c}, \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T B\mathfrak{c} + g^T\mathfrak{c}\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T(AEB - BEA)\mathfrak{c}+$$
$$+\mathfrak{c}^T(AEg - BEf) + \mathfrak{c}^T(fg^T - gf^T)\mathfrak{c}.$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадратичных форм) Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ и $f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A\mathfrak{c}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T B\mathfrak{c} + g^T\mathfrak{c}\right)e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A\mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T e^{AE} B e^{-EA}\mathfrak{c} + g^T e^{-EA}\mathfrak{c}.$$

Высветления с формами по фермионным операторам

Лемма. (Квадратичные и линейные формы между экспонентами от квадратичных форм) Пусть $A = -A^T, B = -B^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ и $f \in \mathbb{C}^{2n}$, тогда

$$e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T B \mathfrak{c} + g^T \mathfrak{c}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T A \mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T e^{AE} B e^{-EA} \mathfrak{c} + g^T e^{-EA} \mathfrak{c}.$$

Лемма. (Производная экспоненты) Пусть $K_t = K_t^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}[0, +\infty)$, тогда

$$\left(\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T K_t \mathfrak{c}}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T K_t \mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T \left(\frac{d}{dt} e^{K_t E}\right) e^{-K_t E} E \mathfrak{c},$$

причём матрица $\left(\frac{d}{dt} e^{K_t E}\right) e^{-K_t E} E$ антисимметрична.

Квадратичный фермионный супероператор

Определение. Квадратичный фермионный супероператор:

$$\mathcal{L}(\rho) = \mathfrak{c}^T \Gamma \rho \mathfrak{c} + \mathfrak{c}^T \Gamma_L \mathfrak{c} \rho + \rho \mathfrak{c}^T \Gamma_R \mathfrak{c} + \rho g_R^T \mathfrak{c} + g_L^T \mathfrak{c} \rho + \lambda \rho,$$

где $\Gamma, \Gamma_L = -\Gamma_L^T, \Gamma_R = -\Gamma_R^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, g_L, g_R \in \mathbb{C}^{2n}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Квадратичный фермионный супероператор

Лемма.

$$\mathcal{L}^+(\rho) = \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}^T \rho \mathfrak{c} - \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{c} \rho - \rho \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{c} + \rho \tilde{g}_L^T \mathfrak{c} + \tilde{g}_R^T \mathfrak{c} \rho + \overline{\lambda} \rho,$$

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma} \hat{X} \mathfrak{c} - \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_L \mathfrak{c} \hat{X} - \hat{X} \mathfrak{c}^T \tilde{\Gamma}_R \mathfrak{c} + \hat{X} \tilde{g}_R^T \mathfrak{c} + \tilde{g}_L^T \mathfrak{c} \hat{X} + \overline{\lambda} \hat{X}.$$

Квадратичный фермионный супероператор

Лемма. Пусть $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*(I) = 0$, тогда

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T H \mathfrak{c} + f^T \mathfrak{c}, \rho\right] + \mathfrak{c}^T \rho \Gamma \mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T \Gamma^T \mathfrak{c}\rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{c}^T \Gamma^T \mathfrak{c},$$

где

$$H = -H^T = -\tilde{H}, \quad \Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad f = \tilde{f}.$$

Квадратичный фермионный супероператор

Утверждение. При $\hat{H} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T H \mathfrak{c} + f^T \mathfrak{c}$ $(H = -H^T, H = -\tilde{H}$ и $h = \tilde{h})$ и $\hat{C}^{(i)} = \gamma_i^T \mathfrak{c}$ генератор ГКСЛ принимает вид

$$\mathcal{L}(\rho) = -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T H \mathfrak{c} + f^T \mathfrak{c}, \rho\right] + \mathfrak{c}^T \rho \Gamma \mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T \Gamma^T \mathfrak{c} \rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{c}^T \Gamma^T \mathfrak{c},$$

где

$$\Gamma = \sum_i \gamma_i \tilde{\gamma}_i^T,$$

Более того, возможность написать Γ и f в таком виде эквивалентна условиям

$$\Gamma^T = \tilde{\Gamma}, \quad \Gamma E \geqslant 0, \quad f = \tilde{f}.$$

Динамика моментов

Мы будем рассматривать генераторы без линейных членов:

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma}(\rho) \equiv -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T H\mathfrak{c}, \rho\right] + \mathfrak{c}^T\rho\Gamma\mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T\Gamma^T\mathfrak{c}\rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{c}^T\Gamma^T\mathfrak{c}$$

Тогда

$$\mathcal{L}^*_{H,\Gamma}(\hat{X}) = i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T H\mathfrak{c}, \hat{X}\right] + \mathfrak{c}^T\hat{X}\Gamma^T\mathfrak{c} - \frac{1}{2}\mathfrak{c}^T\Gamma^T\mathfrak{c}\hat{X} - \frac{1}{2}\hat{X}\, \mathfrak{c}^T\Gamma^T\mathfrak{c}.$$

Динамика моментов

Лемма. Действие сопряжённого генератора на попарные произведения операторов рождения-уничтожения определяется формулами

$$\mathcal{L}^*_{H,\Gamma}\left(\mathfrak{c}\;\mathfrak{c}^T\right) = E\left(-iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)\mathfrak{c}\;\mathfrak{c}^T + \mathfrak{c}\;\mathfrak{c}^T\left(iH - \frac{\Gamma^T + \Gamma}{2}\right)E + \\ + E\Gamma^T E.$$

Динамика моментов

Определение. Определим **матрицу вторых моментов** D состояния ρ по формуле

$$D \equiv \operatorname{tr}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T \rho).$$

Динамика моментов

Определение. Определим **матрицу вторых моментов** D состояния ρ по формуле

$$D \equiv \operatorname{tr}(\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}^T \rho).$$

Утверждение. Пусть

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}_{H,\Gamma}(\rho_t),$$

тогда соответствующая матрица вторых моментов удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}D_t = E\left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right)D_t + D_t\left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right)E + E\Gamma_t^T E.$$

Динамика моментов

Утверждение.

$$D^T = \tilde{D}, \qquad DE \geqslant 0.$$

$$D + D^T = E.$$

Определение. Матрица антиковариаций

$$A = \frac{D - D^T}{2}.$$

Динамика моментов

Утверждение. Матрица антиковариаций удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}A_t = E\left(-iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right)A_t + A_t\left(iH_t - \frac{\Gamma_t^T + \Gamma_t}{2}\right)E + \\ + E\frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}E.$$

Если в начальный момент времени $D_0 + D_0^T = E$, то $D_t + D_t^T = E$ в произвольный момент времени.

Гауссовские состояния

Определение. Состояние ρ называется **чётным гауссовским состоянием**, если его характеристическая функция $\chi_W(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{\boldsymbol{\theta}^T E \mathfrak{c}})$ представима в виде экспоненты от квадратичной формы по $\boldsymbol{\theta}$.

Гауссовские состояния

Утверждение.

$$\chi_W(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{\boldsymbol{\theta}^T E \mathfrak{c}}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T A \boldsymbol{\theta}}$$

$$\chi_N(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2}\mathfrak{c}} e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2}\mathfrak{c}}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T \left(A + \frac{1}{2}J\right)\boldsymbol{\theta}},$$

$$\chi_A(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E+J}{2}\mathfrak{c}} e^{\boldsymbol{\theta}^T \frac{E-J}{2}\mathfrak{c}}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T \left(A - \frac{1}{2}J\right)\boldsymbol{\theta}}.$$

Гауссовские состояния

Утверждение.

$$\rho_N(\boldsymbol{\theta}) = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^T \; R \, \boldsymbol{\theta} + r}$$

$$R = 4(2J - EA^{-1}E)^{-1}, \qquad A = -\frac{1}{2}E(2R^{-1} - J)^{-1}E,$$

$$e^r = \frac{1}{\sqrt{\det R}}.$$

Утверждение.

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{c}^T K \mathfrak{c} + s}$$

$$D = E\frac{1}{1 + e^{KE}}, \qquad A = -\frac{E}{2}\operatorname{th}\frac{KE}{2},$$

$$e^s = \frac{1}{\sqrt{\det(e^{KE} + I)}}.$$

Динамика матрицы плотности

Утверждение. Нормальный символ $\rho_t(\boldsymbol{\theta})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\rho_t(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta}^T P_t^T \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\rho_t(\boldsymbol{\theta}) + $$
$$+\boldsymbol{\theta}^T(\Gamma_t - \Gamma_t^T)\boldsymbol{\theta}\rho_t(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\Gamma_t^T J\,\rho_t(\boldsymbol{\theta}),$$

где

$$Q_t = J\frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}J - \frac{E}{2}\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right)J - J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right)\frac{E}{2},$$

$$P_t^T = (\Gamma_t - \Gamma_t^T)J - \left(iH + \frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}\right)E.$$

Пример: Классический резервуар

Интересно, что в фермионном случае классический резервуар $\Gamma = \Gamma^T$ приводит к более простым уравнениям, чем в бозонном случае. А именно, принимает вид

$$A_t = e^{-E(iH+\Gamma)t} A_0 e^{(iH-\Gamma)Et}.$$