

Краткое содержание лекции 27.02.24.

Интерпретации с параметрами, допустимые значения параметров. Определимость области допустимых значений параметров.

Пример 1: Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Инверсия относительно окружности. Переводы отношений “лежать между” и равенства отрезков в сигнатуре Тарского.

Упражнение: Вспомнить построение точки, симметричной данной точке относительно данной окружности, и на этой основе выразить функцию инверсии относительно данной окружности в элементарной геометрии Тарского.

Пример 2: Группы $SL_2(\mathbb{R})$ и $SL_2(\mathbb{Z})$, а также $PSL_2(\mathbb{R})$ и $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Интерпретации этих групп в кольцах \mathbb{R} и \mathbb{Z} , соответственно. Их действие на модели Пуанкаре.

Подгруппа Санова группы $SL_2(\mathbb{Z})$, ее свобода (без доказательства). Ее применение в теореме Губы о сведении бесконечных систем уравнений в свободной группе к конечным системам.

Упражнение: Доказать, что подгруппа Санова 4-мерно определима в $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: она состоит из матриц в $SL_2(\mathbb{Z})$, у которых диагональные элементы $\equiv 1 \pmod{4}$, а остальные два - четные.

Пример 3: Интерпретация свободной полугруппы слов в стандартной модели арифметики.

Полугруппа $SL_2(\mathbb{N})$. Ее изоморфизм свободной полугруппе слов $(\{0,1\}^*, \cdot)$. На лекции было установлено, порождающие матрицы порождают всю полугруппу $SL_2(\mathbb{N})$, но (еще) не была доказана свобода этой полугруппы. Обсужден вопрос о том, как это кодирование двоичных слов матрицами (по А.А. Маркову) ведет к доказательству теоремы Гёделя о неполноте.