Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 5. Точно решаемые ГКСЛ уравнения, возникающие при усреднении по классическим случайным процессам

Теретёнков Александр Евгеньевич

4 марта 2024 г.

В прошлом семестре...

В результате усреднения по пуассоновскому случайному процессу получался ГКСЛ-генератор

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(U\rho U^\dagger - \rho), \qquad \lambda \geqslant 0,$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В общем случае можно рассмартривать сложный Пуассновский процесс, тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \int_\Omega \lambda(dp)(U_p \rho U_p^\dagger - \rho), \qquad \lambda(dp) \geqslant 0,$$

$$U_p = e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H_p \mathfrak{a}},$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \int_\Omega \lambda(dp)(U_p^\dagger \hat{X} U_p - \hat{X}).$$

Лемма. Пусть $H = H^T \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$, тогда

$$e^{\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a}} \mathfrak{a} e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a}} = S\mathfrak{a}, \qquad S = e^{iJH}.$$

Лемма.

$$\mathcal{L}^*(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}) = \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}, \quad S_p = e^{iJH_p}.$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть

$$U_p = e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H_p \mathfrak{a}},$$

где $H_p = H_p^T = \tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ — непрерывная функция и $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_0 < \infty$, тогда:
Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_t = \exp\left(\int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t\right)\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_0,$$

где $S_p = e^{iJH_p}$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_t \equiv \mathrm{tr}\,(\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})$, $I_{(2n)^m}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^m}$.

Доказательство: Уравнение ГКСЛ в представлении Гейзенберга для оператора $\hat{X}_t = (\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_t$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_t = \int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^{M} S_p - I_{(2n)^M})(\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_t.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным уравнением относительно операторно-значного тензора $(\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_t$. Тогда решение может быть представлено посредством матричной экспоненты от $(2n)^M \times (2n)^M$-матрицы $\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^{M} S_p - I_{(2n)^M})t$, а именно

$$(\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_t = e^{\int_{\Omega} \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^{M} S_p - I_{(2n)^M})t}(\otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a})_0.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. $\square$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В частности, для первых и вторых моментов имеем

$$
\langle \mathfrak{a} \rangle_t = e^{\int \lambda(dp)(S_p - I_{2n})t} \langle \mathfrak{a} \rangle_0,
$$
$$
\langle \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \rangle_t = e^{\int \lambda(dp)(S_p \otimes S_p - I_{4n^2})t} \langle \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \rangle_0.
$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Замечание. Можно проверить, что такая динамика не переводит гауссовские состояния в гауссовские. Это пример, когда динамика моментов (и как мы увидим далее и корреляционных функций) считается в более явном виде, нежели динамика матрицы плотности.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

По обобщённой регрессионной формуле для упорядоченных по времени корреляционных функций $t_M \geqslant \cdots \geqslant t_1$:

$$\langle \mathfrak{a}_{j_M}(t_M) \ldots \mathfrak{a}_{j_1}(t_1) \rangle \equiv$$
$$\equiv \mathrm{tr}\, (\mathfrak{a}_{j_M} \exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1})) \ldots \mathfrak{a}_{j_2} \exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1))\mathfrak{a}_{j_1} \exp(\mathcal{L} t_1)\rho_0)$$

Лемма.(Переход в представление Гейзенберга)

$$\mathrm{tr}\, (\mathfrak{a}_{j_M} \exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1})) \ldots \mathfrak{a}_{j_2} \exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1))\mathfrak{a}_{j_1} \exp(\mathcal{L} t_1)\rho_0) =$$
$$= \mathrm{tr}\, \rho_0 e^{\mathcal{L}^* t_1}((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1))((\ldots \exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M} \ldots)\mathfrak{a}_{j_2}))\mathfrak{a}_{j_1}).$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Если определить
$L_{M,m} \equiv \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{r=1}^m S_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}$, $m = 1, \ldots, M$,
то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\langle \mathfrak{a}(t_M) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{a}(t_1) \rangle = \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a} \rangle_0.$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

$$\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M} = (\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a})_{j_M}.$$

$$\begin{aligned}
&\exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M})\mathfrak{a}_{j_{M-1}}) = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a})_{j_M}\mathfrak{a}_{j_{M-1}}) = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}} = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}} = \\
&= (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}))_{j_M j_{M-1}} = \\
&= (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\exp(L_{2,2}(t_M - t_{M-2}))\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}}.
\end{aligned}$$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Аналогично,

$$\exp(\mathcal{L}^* t_1)((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1))((\ldots \exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M} \ldots)\mathfrak{a}_{j_2}))\mathfrak{a}_{j_1}) =$$
$$= \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a}.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. $\square$

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Упражнение. Вычислите $\langle \mathfrak{a}(t_2) \otimes \mathfrak{a}(t_1) \rangle$ при $t_2 < t_1$.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Утверждение. (Фермионный случай) Пусть

$$U_p = \exp(-(i/2)\mathfrak{c}^T H_p \mathfrak{c}), \qquad H_p = -H_p^T = -\tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n\times 2n},$$

тогда
1) Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t = \exp\left(\int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M O_p - I_{(2n)^M})t \right) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_0,$$

где $O_p = \exp(-iEH_p)$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t \equiv \mathrm{tr}\,(\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c})$, $I_{(2n)^m}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^m}$.

Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

2) Если определить
$L_{M,m} \equiv \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{r=1}^m O_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}$, $m = 1, \ldots, M$,
то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\langle \mathfrak{c}(t_M) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{c}(t_1) \rangle =$$
$$= \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_0,$$

где $t_M \geqslant \ldots \geqslant t_1 \geqslant 0$.

Генераторы диффузионного типа

Утверждение. Пусть матрицы плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}[\hat{C}_j,[\hat{C}_j,\rho]],$$

где $\hat{C}_j = \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_j \mathfrak{a}$, $K_j = K_j^T = \tilde{K}_j \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ и $\langle \otimes_{l=1}^m \mathfrak{a}\rangle_0 < \infty$, тогда динамика моментов имеет вид:

$$\langle \otimes_{l=1}^m \mathfrak{a}\rangle_t = \exp\left(-\frac{t}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i,p=1}^{m} \otimes_{l=1}^m (JK_j)^{\delta_{il}+\delta_{pl}}\right)\langle \otimes_{l=1}^m \mathfrak{a}\rangle_0.$$

Квадратичный генератор

Вновь вернёмся к квадратичному генератору

$$\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}(\rho) \equiv -i\left[\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a} + f^T \mathfrak{a}, \rho\right] + \mathfrak{a}^T \rho \Gamma^T \mathfrak{a} - \frac{1}{2}\mathfrak{a}^T \Gamma \mathfrak{a} \rho - \frac{1}{2}\rho\, \mathfrak{a}^T \Gamma^T \mathfrak{a},$$

Определим

$$B \equiv J\left(iH + \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}\right), \qquad \varphi \equiv iJf, \qquad \Xi \equiv J\Gamma^T J$$

Мы будем использовать нижние индексы $\mathfrak{a}$, φ, Ξ, чтобы обозначить номер тензорного сомножителя, которому он соответствует. Например,

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 \equiv \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}_1\varphi_2 \equiv \mathfrak{a} \otimes \varphi, \qquad \Xi_{12}\mathfrak{a}_3 \equiv \Xi \otimes \mathfrak{a}$$

и т. д. Более того, мы будем обозначать $\mathfrak{a}_{\{1,2,3\}} \equiv \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$.

Уравнения для произвольных моментов

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}_{H_t,\Gamma_t,f_t}(\rho_t)$ и $\langle \mathfrak{a}_I \rangle_0 < \infty$ для всех наборов индексов I, тогда

$$\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = \left(\sum_{k \in I} B_k(t) \right) \langle \mathfrak{a}_I \rangle_t + \sum_{k \in I} \varphi_k(t) \langle \mathfrak{a}_{I \setminus \{k\}} \rangle_t + \sum_{p \in P(I)} \Xi_p(t) \langle \mathfrak{a}_{I \setminus p} \rangle_t,$$

где $P(I)$ — множество всех возможных пар индексов из I, упорядоченных по возрастанию.

Динамика произвольных моментов

Пусть $G(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}G(t) = B(t)G(t), \qquad G(0) = I_{2n},$$

и

$$\psi(t) = \int_0^t d\tau \, (G(\tau))^{-1}\varphi(\tau), \qquad \beta_p(t) = \int_0^t d\tau \, (G_p(\tau))^{-1}\Xi_p(\tau),$$

где p — пара индексов (упорядоченных по возрастанию).

Динамика произвольных моментов

Как и ранее мы будем использовать нижний индекс k для $\psi_k(t)$ и $G_k(t)$ для обозначения номера тензорного сомножителя. И, аналогично, для множество-значных мы определим

$$\psi_I(t) \equiv \prod_{k \in I} \psi_k(t), \qquad G_I(t) \equiv \prod_{k \in I} G_k(t),$$
$$\beta_I(t) \equiv \sum_{I = p_1 \sqcup \ldots \sqcup p_{|I|/2}} \beta_{p_1}(t) \ldots \beta_{p_{|I|/2}}(t),$$

где последняя сумма пробегает все возможные спаривания индексов из I, если $|I|$ — чётная, и равна нулю для нечётной $|I|$.

Утверждение.

$$\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = G_I(t) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3} \psi_{I_1}(t) \beta_{I_2}(t) \langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_0,$$

где сумма пробегает все возможные разложения I на объединения трёх непересекающихся множеств I_1, I_2, I_3.

Примеры

Рассмотрим несколько частных случаев.
Для $I = \{1\}$ имеем

$$\langle \mathfrak{a}_1 \rangle_t = G_1(t)(\langle \mathfrak{a}_1 \rangle_0 + \psi_1(t))$$

Для $I = \{1,2\}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}_{12}(t) \rangle =& G_{12}(t)(\langle \mathfrak{a}_{12} \rangle_0 + \psi_1(t) \langle \mathfrak{a}_2 \rangle_0) \\ & + \psi_2(t) \langle \mathfrak{a}_1 \rangle_0 + \psi_1(t)\psi_2(t) + \beta_{12}(t)).\end{aligned}$$

Примеры

Для матрицы вторых центральных моментов

$$D_{12}(t) \equiv \langle \mathfrak{a}_{12} \rangle_t - \langle \mathfrak{a}_1 \rangle_t \langle \mathfrak{a}_2 \rangle_t,$$

имеем

$$D_{12}(t) = G_{12}(t)(D_{12}(0) + \beta_{12}(t)).$$

Примеры

Пусть (для простоты) $\varphi = 0$,тогда

$$\langle \mathfrak{a}_{1234} \rangle_t = G_{1234}(t)(\langle \mathfrak{a}_{1234} \rangle_0 + \langle \mathfrak{a}_{12} \rangle_0 \beta_{34}(t) + \langle \mathfrak{a}_{13} \rangle_0 \beta_{24}(t) + \langle \mathfrak{a}_{14} \rangle_0 \beta_{23}(t) + \beta_{12}(t)\beta_{34}(t) + \beta_{13}(t)\beta_{24}(t) + \beta_{13}(t)\beta_{24}(t)),$$

или

$$\langle \mathfrak{a}_{1234} \rangle_t - \langle \mathfrak{a}_{12} \rangle_t \langle \mathfrak{a}_{34} \rangle_t = G_{1234}(t)(\langle \mathfrak{a}_{1234} \rangle_0 - \langle \mathfrak{a}_{12} \rangle_0 \langle \mathfrak{a}_{34} \rangle_0 + \langle \mathfrak{a}_{13} \rangle_0 \beta_{24}(t) + \langle \mathfrak{a}_{14} \rangle_0 \beta_{23}(t) + \beta_{13}(t)\beta_{24}(t) + \beta_{13}(t)\beta_{24}(t)).$$

В частности, данный тензор содержит члены вида $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle - \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle$, описывающие корреляции интенсивностей электромагнитного поля.

Постоянные коэффициенты

В случае постоянных коэффициентов, имеем

$$
\begin{aligned}
G(t) &= e^{Bt},\\
\psi(t) &= \int_0^t d\tau\, e^{-B\tau}\varphi = \frac{1-e^{-Bt}}{B}\varphi,\\
\beta_{12}(t) &= \int_0^t d\tau\, e^{-(B_1+B_2)\tau}\Xi_{12} = \frac{1-e^{-(B_1+B_2)t}}{B_1+B_2}\Xi_{12}.
\end{aligned}
$$

В частности, имеем

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}_1\rangle_t &= e^{B_1 t}\langle \mathfrak{a}_1\rangle_0 + \frac{e^{B_1 t}-1}{B_1}\varphi,\\
D_{12}(t) &= e^{(B_1+B_2)t}D_{12}(0) + \frac{e^{(B_1+B_2)t}-1}{B_1+B_2}\beta_{12},
\end{aligned}
$$