УСРЕДНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТОЧНОГО ТИПА

В.А.Слоущ

по совместной работе с Е.А.Жижиной, А.Л.Пятницким и Т.А.Суслиной

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается ограниченный оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вида

$$(\mathbb{A}_\varepsilon u)(x) := \varepsilon^{-d-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} a((x-y)/\varepsilon)\mu(x/\varepsilon, y/\varepsilon)(u(x)-u(y))\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Предполагается, что $a(x)$ — неотрицательная функция класса $L_1(\mathbb{R}^d)$, $\|a\|_{L_1} = 1$; $\mu(x,y)$ — ограниченная и положительно определенная функция, $\mathbb{Z}^d$-периодическая по каждой переменной. Кроме того, предполагаются конечными моменты $M_k = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^k a(x)dx$, $k = 1,2,3$. При сделанных предположениях оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ ограничен, спектр $\sigma(\mathbb{A}_\varepsilon)$ лежит в правой полуплоскости. Оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ не предполагается самосопряженным.

При дополнительных условиях $a(-z) = a(z)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $\mu(x,y) = \mu(y,x)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, оператор $\mathbb{A}_\varepsilon$ самосопряжен и неотрицателен. Операторы такого типа встречаются при описании поведения случайных систем большого (бесконечного) числа частиц.

Изучается поведение резольвенты $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε. Мы покажем, что при $\varepsilon \to 0$ оператор $(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ имеет асимптотику $(\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + I)^{-1}[q_0^\varepsilon]$. Эффективный оператор $\mathbb{A}^0$ представляет собой самосопряженный эллиптический оператор второго порядка $\mathbb{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$, $q_0^\varepsilon(x) := q_0(x/\varepsilon)$; матрица g^0, вектор $\boldsymbol{\alpha}$ и функция $q_0(x)$ определяются в терминах решений некоторых вспомогательных задач на ячейке периодичности $\Omega := [0,1)^d$. Справедлива оценка

$$\|(\mathbb{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathbb{A}^0 + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + I)^{-1}[q_0^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Метод исследования опирается на теоретико-операторный подход, который был развит М.Ш.Бирманом и Т.А.Суслиной. Мы обсудим модификацию теоретико-операторного подхода, позволяющую применить его к случаю несамосопряженного оператора.