Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 6. Теорема Иссерлиса - Вика. Модели с точно-решаемым спектром. Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Теретёнков Александр Евгеньевич

11 марта 2024 г.

В прошлой серии...

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}_{H_t,\Gamma_t,f_t}(\rho_t)$ и $\langle \mathfrak{a}_I \rangle_0 < \infty$ для всех наборов индексов I, тогда

$$\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = \left(\sum_{k\in I} B_k(t) \right) \langle \mathfrak{a}_I \rangle_t + \sum_{k\in I} \varphi_k(t) \langle \mathfrak{a}_{I\setminus\{k\}} \rangle_t + \sum_{p\in P(I)} \Xi_p(t) \langle \mathfrak{a}_{I\setminus p} \rangle_t,$$

где $P(I)$ — множество всех возможных пар индексов из I, упорядоченных по возрастанию.

В прошлой серии...

Утверждение.

$$\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = G_I(t) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3} \psi_{I_1}(t) \beta_{I_2}(t) \langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_0,$$

где сумма пробегает все возможные разложения I на объединения трёх непересекающихся множеств I_1, I_2, I_3.

Теорема Иссерлиса - Вика

Для гауссовского состояния с вектором средних μ и матрицей вторых центральных моментов

$$\langle a_I \rangle = \sum_{I = I_1 \sqcup I_2} \mu_{I_1} D_{I_2}.$$

где

$$D_I = \begin{cases} \sum_{I = p_1 \sqcup \ldots \sqcup p_{|I|/2}} D_{p_1} \ldots D_{p_{|I|/2}}, & \text{для чётных } |I|, \\ 0, & \text{для нечётных } |I|, \end{cases}$$

и сумма берётся по всем разбиениям I на пары.

Теорема Иссерлиса - Вика

Упражнение. Проверьте, что если в начальный моменты удовлетворяют теореме Вика, то динамика

$$\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t = G_I(t) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3} \psi_{I_1}(t) \beta_{I_2}(t) \langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_0$$

это свойство сохраняет.

Усреднение динамики с квадратичным генератором по Пуассоновскому процессу

Утверждение. Пусть матрица плотности ρ_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(e^{\mathcal{L}_{H,\Gamma,f}}\rho_t - \rho_t), \qquad \lambda > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t =& \lambda\Big((G_I(1) - 1)\langle \mathfrak{a}_I \rangle_t \\ &+ G_I(1) \sum_{I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3, I_3 \neq I} \psi_{I_1}(1)\beta_{I_2}(1)\langle \mathfrak{a}_{I_3} \rangle_t\Big),\end{aligned}$$

где $G_I(t)$, $\psi_{I_1}(1)$, $\beta_{I_2}(1)$ определены формулами для случая постоянных коэффициентов.

Модели с точно-решаемым спектром

Рассматривается генератор ГКСЛ

$$\mathcal{L}\rho = -i[H, \rho] + \sum_s \gamma_s \left(A_s \rho A_s^\dagger - \frac{1}{2} A_s^\dagger A_s \rho + \rho A_s^\dagger A_s \right),$$

где

$$[A_s, N] = A_s$$

для некоторого интеграла N гамильтониана H: $[H, N] = 0$.

Модели с точно-решаемым спектром

Он представляется в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{K}\rho = -iK\rho + i\rho K^\dagger, \qquad K = H - i\sum_s \frac{\gamma_s}{2} A_s^\dagger A_s,$$

$$\mathcal{A}\rho = \sum_s \gamma_s A_s \rho A_s^\dagger.$$

Модели с точно-решаемым спектром

Утверждение. Если K—дигонализуема[1] $K = Q\Lambda Q^{-1}$ линейным преобразованием Q, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$, то $\mathcal{K}$ — диагонализуема посредством супеороператора $Q \ \cdot Q^\dagger$

$$\mathcal{K} = (Q \ \cdot Q^\dagger)(-i(\Lambda \ \cdot \ - \ \cdot \ \overline{\Lambda}))(Q \ \cdot Q^\dagger)^{-1},$$

причём преобразование Q может быть выбрано так, что

$$\mathcal{A} = (Q \ \cdot Q^\dagger)\mathcal{J}(Q \ \cdot Q^\dagger)^{-1},$$

где $\mathcal{J}$ имеет наддиагональный вид [2].

[1] Это является дополнительным условием к тем, что приведены выше, вообще говоря, уже тут могут возникать жордановы блоки.

[2] но не обязательно это жорданов блок

Модели с точно-решаемым спектром

В частности,

$$\operatorname{spec}\mathcal{L} = \operatorname{spec}\mathcal{K} = \operatorname{spec}(-i(\Lambda\ \cdot\ -\ \cdot\ \overline{\Lambda})) = \{-i(\lambda_j - \overline{\lambda}_k)\}.$$

То есть $\operatorname{spec}\mathcal{L}$ просто считается по спектру K. Последний в случае гамильтонианов вида $H = H_0 + \sum_s \omega_s A_s^\dagger A_s$ получается из спектра этих гамильтонианов посредством замены $\omega_s \to \omega_s - i\frac{\gamma_s}{2}$.

Модели с точно-решаемым спектром

Построение собственного базиса при этом упрощается не очень сильно и, фактически, представляет собой процесс диагонализации верхнетреугольной матрицы $-i(\Lambda \;\cdot\; - \;\cdot\; \overline{\Lambda}) + \mathcal{J}$ общего вида.

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Спин-бозон
$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk +$$

$$+ \Omega|1\rangle\langle 1| \otimes I + (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$b_k^\dagger$ и b_k — операторы рождения и уничтожения удовлетворяющие ККС

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Вакуум

$$b_k|\mathrm{vac}\rangle = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Приближение вращающейся волны

$$\hat{H}_0 = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$\hat{H}_I = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t} =$$

$$= (e^{-i\Omega t}|0\rangle\langle 1| + e^{i\Omega t}|1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left(e^{i\omega_k t} g_k^* b_k^\dagger + g_k e^{-i\omega_k t} b_k \right) dk =$$

$$= \int \Big(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + e^{i(\omega_k + \Omega)t} g_k^* |1\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger +$$

$$+ e^{-i(\omega_k + \Omega)t} g_k |0\rangle\langle 1| \otimes b_k + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \Big) dk \approx$$

$$\approx \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk = \hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t)$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} \equiv e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t)e^{i\hat{H}_0 t} =$$
$$= \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega|1\rangle\langle 1| \otimes I +$$
$$+ \int \left(g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{N} = \int I \otimes b_k^\dagger b_k dk + |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$[\hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}}, \hat{N}] = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Проектор на 0-частичное подпространство

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|$$

Проектор на 1-частичное подпространство

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}| + \int |0\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger|\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|b_k$$

$$[P_i, \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}}] = 0$$

Спин-бозон в приближении вращающейся волны

$$P_0 \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} P_0 = 0$$

$$P_1 \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} P_1 = \int \omega_k |0\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| +$$
$$+ \int \left(g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| + g_k |1\rangle\langle 0| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| b_k \right) dk.$$

$$\begin{aligned} |1\rangle \otimes |\mathrm{vac}\rangle \quad &\to |\hat{1}\rangle, \\ |0\rangle \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle &\to |\hat{k}\rangle, \end{aligned}$$

$$H_F = \int \omega_k |\hat{k}\rangle\langle \hat{k}| dk + \Omega |\hat{1}\rangle\langle \hat{1}| + \int \left(g_k^* |\hat{k}\rangle\langle \hat{1}| + g_k |\hat{1}\rangle\langle \hat{k}| \right) dk,$$

— модель Фридрихса.

Модель Фридрихса

Утверждение. Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_F|\psi(t)\rangle \\ |\psi(0)\rangle = |\hat{1}\rangle \end{cases}$$

имеет решение

$$|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \int dk\psi_k(t)|\hat{k}\rangle,$$

где $\psi_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -i\Omega\psi_1(t) - \int_0^t d\tau G(t-\tau)\psi_1(\tau),$$

где введено обозначение $G(t) = \int dk e^{-i\omega_k t}|g_k|^2$, а $\psi_k(t)$ может быть выражено через $\psi_1(t)$ по формуле

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau - t)}\psi_1(\tau).$$