Курс МФТИ-МИАН «Квантовые вычисления», Весна 2024.
Лекция 6: Базовые элементы квантовых схем.

Яшин Всеволод Игоревич (yashin.vi@mi-ras.ru)

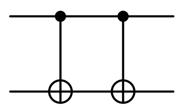
На этой Лекции мы обсудили некоторые свойства базовых элементов в квантовых схемах и дали общее определение квантовым схемам. Мы считаем, что квантовая схема есть некоторая композиция приготовлений состояний, унитарных вентилей из некоторого словаря (например, $C\mathrm{NOT} + \mathcal{U}(2)$), измерений одного кубита, некоторых классических схем и классического контроля. Мы также доказали некоторые полезные соотношения для этих элементов.

Литература к Лекции: [1, Section 4].

Задача 1

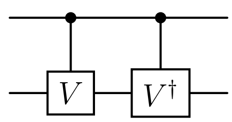
Пусть $V = \sqrt{X} = HSH$. Упростите следующие схемы:

1.



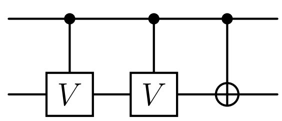
(1)

2.



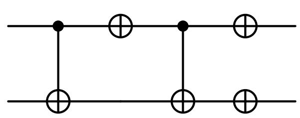
(2)

3.



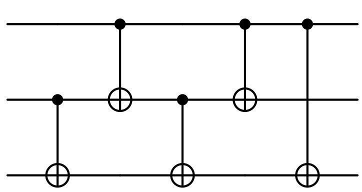
(3)

4.



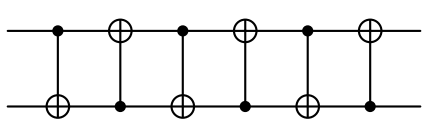
(4)

5.

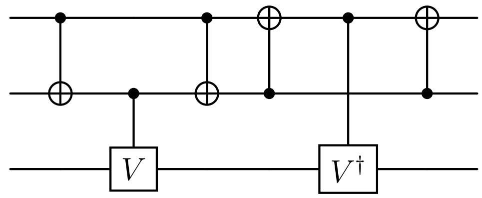


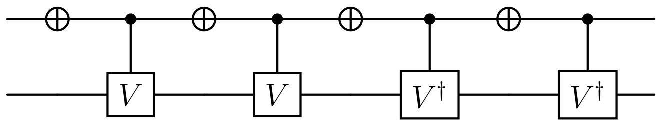
(5)

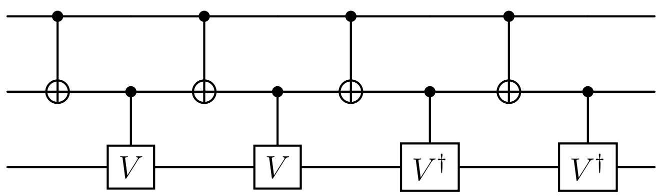
6.



(6)

7.  (7)

8.  (8)

9.  (9)

Если Вы честно разобрались, как действуют эти схемы, то на самом деле Вы значительно продвинулись в понимании того, как квантовые схемы можно оптимизировать [2, 3].

Задача 2

В квантовых вычислениях зачастую важно рассматривать операции из списка

$$I, X, Y, Z, H, S, CX, CZ, \mathrm{SWAP}, \ldots \tag{10}$$

Покажите, что эти операции можно выразить при помощи словаря $\{H, S, C\mathrm{NOT}\}$. Выпишете для каждой операции U из списка, как она действует на наблюдаемые Паули I, X, Y, Z (для двухкубитных вентилей рассмотрите действие на матрицах вида X_1, Z_1, X_2, Z_2) при отображении $O \mapsto UOU^\dagger$.

Группа унитарных операций, порождённая $\langle H, S, C\mathrm{NOT}\rangle$, называется *группой Клиффорда*[1] *на n кубитах $\mathcal{C}\ell^n$* [4, 5]. Она возникает в связи с теорией квантовой коррекции ошибок, вентили из этой группы оказываются устойчивыми к ошибкам. Покажите, что группа Клиффорда конечная, и как-нибудь оцените сверху число её элементов. Оказывается, что добавление *любой* унитарной операции к группе Клиффорда делает её универсальной [6, Corollary 6.8.2].

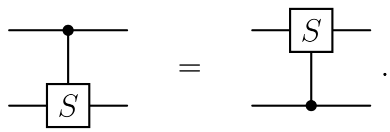
Задача 3

Допустим, что мы можем свободно (то есть, бесплатно) делать операции Клиффорда $\langle H, S, C\mathrm{NOT}\rangle$. Чтобы иметь возможность делать произвольные операции, к ним можно

[1] Не следует путать это с понятием алгебр Клиффорда.

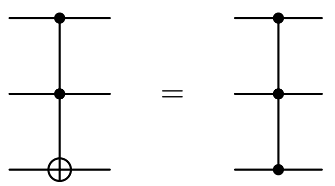
добавить не-клиффордовы операции вида T, CS, Toffoli. Полезно разобраться, как эти три операции можно выразить друг через друга. Докажите правильность следующих соотношений:

1. Операция CS симметрична по перестановкам:



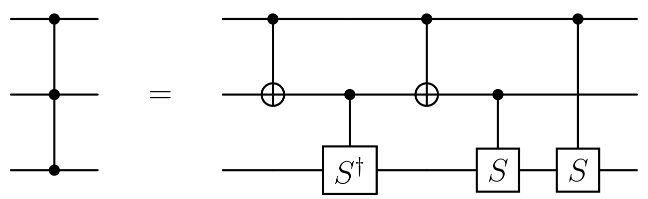
(11)

2. Вентиль Toffoli связан с C^2Z при помощи вентилей H:



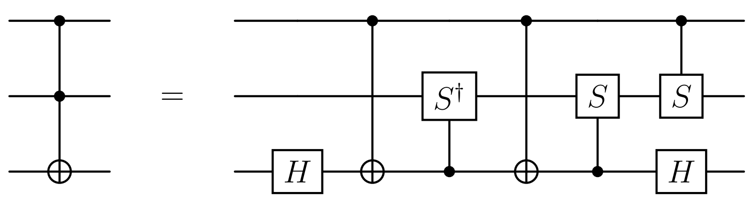
(12)

3. Вентиль C^2Z выражается при помощи 3-х вентилей CS:



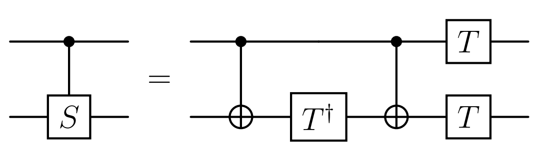
(13)

4. Вентиль Toffoli выражается при помощи 3-х вентилей CS:



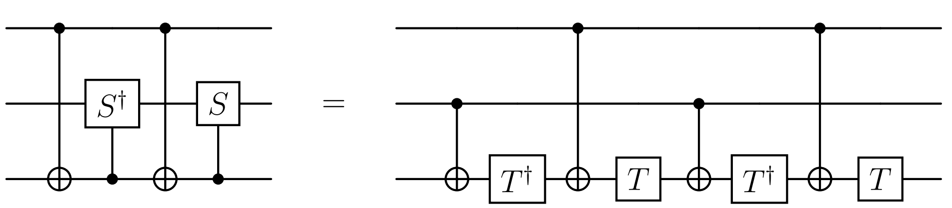
(14)

5. Вентиль CS выражается при помощи 3-х вентилей T:



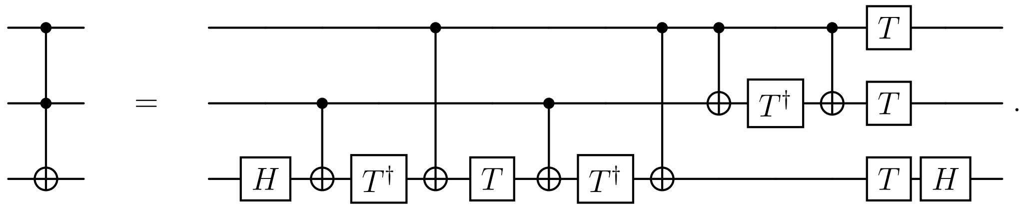
(15)

6. Выполнено следующее соотношение:



(16)

7. Вентиль Toffoli выражается при помощи 7-ми вентилей T:



(17)

Оказывается, что приведённые схемы для выражения Toffoli через CS и T почти оптимальны. Про ещё более удачные схемы и рассуждения о способах их нахождения можно прочитать в [7]. С другой стороны, при помощи взаимодействия с классическим управлением (адаптивности) можно ещё больше оптимизировать эти схемы [8], и можно точно выразить вентиль T при помощи Toffoli и CS. Но это уже другая история...

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010).

[2] D. Maslov, G. Dueck, D. Miller, and C. Negrevergne, Quantum circuit simplification and level compaction, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems **27**, 436–444 (2008).

[3] R. Iten, R. Moyard, T. Metger, D. Sutter, and S. Woerner, Exact and practical pattern matching for quantum circuit optimization, ACM Transactions on Quantum Computing **3**, 1–41 (2022).

[4] D. Gottesman, Stabilizer codes and quantum error correction (1997), arXiv:quant-ph/9705052 [quant-ph].

[5] D. Gottesman, The heisenberg representation of quantum computers (1998), arXiv:quant-ph/9807006 [quant-ph].

[6] G. Nebe, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, *et al.*, *Self-dual codes and invariant theory*, Vol. 17 (Springer, 2006).

[7] M. Amy, D. Maslov, M. Mosca, and M. Roetteler, A meet-in-the-middle algorithm for fast synthesis of depth-optimal quantum circuits, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems **32**, 818–830 (2013).

[8] C. Jones, Low-overhead constructions for the fault-tolerant toffoli gate, Physical Review A **87**, 10.1103/physreva.87.022328 (2013).