

Основы теории открытых квантовых систем II.

Лекция 7. Модель Фридрихса. Метод псевдомод. Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией

Теретёнков Александр Евгеньевич

18 марта 2024 г.

Модель Фридрихса

Утверждение. Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH_F|\psi(t)\rangle \\ |\psi(0)\rangle = |\hat{1}\rangle \end{cases}$$

имеет решение

$$|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \int dk \psi_k(t)|\hat{k}\rangle,$$

где $\psi_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -i\Omega\psi_1(t) - \int_0^t d\tau G(t-\tau)\psi_1(\tau),$$

где введено обозначение $G(t) = \int dk e^{-i\omega_k t} |g_k|^2$, а $\psi_k(t)$ может быть выражено через $\psi_1(t)$ по формуле

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau-t)} \psi_1(\tau).$$

Модель Фридрихса

С учётом $|\psi(t)\rangle = \psi_1(t)|\hat{1}\rangle + \int dk \psi_k(t)|\hat{k}\rangle$, имеем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i \int dk g_k \psi_k(t), \\ \frac{d}{dt}\psi_k(t) = -i\omega_k\psi_k(t) - ig_k^* \psi_1(t). \end{cases}$$

С учётом $\psi_k(0) = 0$, имеем

$$\psi_k(t) = -ig_k^* \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau-t)} \psi_1(\tau).$$

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - \int dk |g_k|^2 \int_0^t d\tau e^{i\omega_k(\tau-t)} \psi_1(\tau)$$



Метод псевдомод

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} J(\omega).$$

$$J(\omega) = \sum_{l=1}^n \frac{\gamma_l g_l^2}{\left(\frac{\gamma_l}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_l)^2}$$

$$G(t) = \sum_{l=1}^n g_l^2 e^{-\left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)t}, \quad t > 0,$$

Метод псевдомод

Утверждение. Введём неэрмитов гамильтониан в $H_{\text{eff}} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$ по формуле

$$H_{\text{eff}} = \Omega |\hat{1}\rangle \langle \hat{1}| + \sum_{l=1}^n \left(\left(\omega_l - i \frac{\gamma_l}{2} \right) |\tilde{l}\rangle \langle \tilde{l}| + g_l (|\tilde{l}\rangle \langle \hat{1}| + |\hat{1}\rangle \langle \tilde{l}|) \right)$$

тогда вектор

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \psi_1(t) |\hat{1}\rangle + \sum_l \varphi_l(t) |\tilde{l}\rangle,$$

где

$$\varphi_l(t) = -ig_l \int_0^t d\tau e^{-(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l)(t-\tau)} \psi_1(\tau),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -i H_{\text{eff}} |\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -i\Omega\psi_1(t) - i\sum_l g_l\varphi_l(t).$$

Кроме того, дифференцируя определение $\varphi_l(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\varphi_l(t) = -ig_l\psi_1(t) - \left(\frac{\gamma_l}{2} + i\omega_l\right)\varphi_l(t).$$

Полученные уравнения совпадают с уравнением $\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle = -iH_{\text{eff}}|\tilde{\psi}(t)\rangle$, расписанным покомпонентно. □

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$ и матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \langle \psi | \\ |\psi \rangle & R \end{pmatrix}, \quad \rho_{00} = 1 - \text{Tr } R, \quad R = R^\dagger.$$

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Утверждение. Решение уравнения ГКСЛ $\rho(t)$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[0 \oplus H, \rho(t)] + \sum_{l=1}^n \left(L_l \rho(t) L_l^\dagger - \frac{1}{2} L_l^\dagger L_l \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_l^\dagger L_l \right),$$

где $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($H = H^\dagger$) и $L_l = \sqrt{\gamma_l} |0\rangle \langle l| \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$,
имеет вид представленный на предыдущем слайде, где $|\psi(t)\rangle$ и $R(t)$ удовлетворяет уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= -iH_{\text{eff}}|\psi(t)\rangle, \\ \frac{d}{dt}R(t) &= -iH_{\text{eff}}R(t) + iR(t)H_{\text{eff}}^\dagger, \end{aligned}$$

где

$$iH_{\text{eff}} = iH + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \gamma_l |l\rangle \langle l|,$$

—аккретивная матрица.

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $|\psi(t)\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} 0 \oplus R(t) &= -i0 \oplus H_{\text{eff}} R(t) + i0 \oplus R(t) H_{\text{eff}}^\dagger = \\
 &= -i0 \oplus [H, R(t)] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n 0 \oplus \gamma_l |l\rangle \langle l| R(t) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n 0 \oplus \gamma_l R(t) |l\rangle \langle l| = \\
 &= -i[0 \oplus H, 0 \oplus R(t)] - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \gamma_l |l\rangle \langle 0||0\rangle \langle l| 0 \oplus R(t) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \gamma_l 0 \oplus R(t) |l\rangle \langle 0||0\rangle \langle l| = \\
 &= -i[0 \oplus H, \rho(t)] - \frac{1}{2} \sum_l \left(L_l^\dagger L_l \rho(t) + \rho(t) L_l^\dagger L_l \right),
 \end{aligned}$$

где были использованы ортогональность $\langle 0|l\rangle = 0, l \neq 0$ и определение $L_l = \sqrt{\gamma_l} |0\rangle \langle l|$.

Уравнение с неэрмитовым гамильтонианом

Кроме того,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \text{Tr } R(t) |0\rangle\langle 0| &= - \sum_l \gamma_l \langle l | R(t) | l \rangle |0\rangle\langle 0| = \\ &= - \sum_l \gamma_l |0\rangle\langle l| 0 \oplus R(t) | l \rangle\langle 0| = - \sum_l L_l \rho(t) L_l^\dagger.\end{aligned}$$



"Одночастичное" вторичное квантование

Определение. Рассмотрим гильбертово пространство вида $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n$. Пусть, кроме того, $\mathcal{X}_i$ — вспомогательные гильбертовы пространства $\dim \mathcal{X}_i \geq 2$. Введём линейную инъекцию $\hat{\cdot}: \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^n \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{X}_i$, определённую на базисных векторах по правилу

$$\begin{aligned} |l\rangle &\rightarrow |\hat{l}\rangle = |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_{l-1} \otimes |1\rangle_l \otimes |0\rangle_{l+1} \otimes \cdots \otimes |0\rangle_n, & l \neq 0; \\ |0\rangle &\rightarrow |\hat{0}\rangle = |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_n. \end{aligned}$$

Такое отображение будем называть **одночастичным вторичным квантованием**.

$$\hat{\rho} = \sum_{l,k=0}^n \rho_{lk} |\hat{l}\rangle \langle \hat{k}|.$$

"Одночастичное" вторичное квантование

Утверждение. Пусть a_l — произвольный набор операторов таких, что $a_l^\dagger|\hat{0}\rangle = |\hat{l}\rangle$ и $a_l|\hat{l}\rangle = |\hat{0}\rangle$. Пусть $\rho(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[0\oplus H, \rho(t)] + \sum_{l=1}^K \left(L_l\rho(t)L_l^\dagger - \frac{1}{2}L_l^\dagger L_l\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)L_l^\dagger L_l \right),$$

с коэффициентами, определёнными в предыдущем утверждении. Тогда $\hat{\rho}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \sum_{l=1}^n \gamma_l \left(a_l\hat{\rho}(t)a_l^\dagger - \frac{1}{2}a_l^\dagger a_l\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)a_l^\dagger a_l \right),$$

$$\hat{H} = \sum_{l,k=1}^n H_{lk}a_l^\dagger a_k.$$

"Одночастичное" вторичное квантование

В физических приложениях в качестве операторов a_l чаще всего выбираются

- бозонные операторы уничтожения b_l , удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениями
$$[b_l, b_k^\dagger] = \delta_{lk}, [b_l, b_k] = 0,$$
- фермионные операторы уничтожения f_l , удовлетворяющие антикоммутационным соотношениями
$$\{f_l, f_k^\dagger\} = \delta_{lk}, \{f_l, f_k\} = 0,$$
- двухуровневые операторы уничтожения σ_l , удовлетворяющие
$$\{\sigma_l, \sigma_l^\dagger\} = I, \{\sigma_l, \sigma_l\} = 0, [\sigma_l, \sigma_k] = 0, [\sigma_l, \sigma_k^\dagger] = 0, l \neq k.$$

Важно отметить, что не обязательно выбирать операторы одинакового типа для всех индексов.

"Одночастичное" вторичное квантование. Примеры

Для (бозонных) гауссовских состояний введём "ополовиненные" обозначения $\mu_j \equiv \text{Tr} a_j \hat{\rho}$, $Y_{ij} \equiv \text{Tr} a_i^\dagger a_j \hat{\rho} - \bar{\mu}_i \mu_j$,
 $Z_{ij} \equiv \text{Tr} a_i a_j \hat{\rho} - \mu_i \mu_j$

Упражнение. Если обозначить, то $V(t) = e^{-iH_{\text{eff}}t}$

$$\mu(t) = V(t)\mu(0),$$

$$Y(t) = \bar{V}(t)Y(0)V^T(t),$$

$$Z(t) = V(t)Z(0)V^T(t).$$

Частичный след и "одночастичное" вторичное квантование

Утверждение. Пусть $\hat{\rho} = \sum_{l,k=0}^n \rho_{lk} |\hat{l}\rangle \langle \hat{k}|$, тогда след по пространствам, пронумерованным индексами I , может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_i, i \in I} \hat{\rho} = \hat{\rho}_{\bar{I}} + \sum_{l \in I} \rho_{ll} |\hat{0}\rangle \langle \hat{0}|, \quad \hat{\rho}_{\bar{I}} = \sum_{l,k \in \bar{I}} \rho_{lk} |\hat{l}\rangle \langle \hat{k}|,$$

где $\bar{I} = \{0, \dots, n\} \setminus I$.

Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией

Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией (Сачдев) при нулевой температуре определяется уравнением ГКСЛ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & -i[\Omega\sigma^\dagger\sigma + \omega_1 b^\dagger b + g(\sigma^\dagger b + \sigma b^\dagger), \hat{\rho}(t)] + \\ & + \gamma \left(b\hat{\rho}(t)b^\dagger - \frac{1}{2}b^\dagger b\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)b^\dagger b \right). \end{aligned}$$

Модель Джейнса-Каммингса как модель с точно-решаемым спектром

$$K = \Omega \sigma^\dagger \sigma + \left(\omega_1 - i\gamma \frac{1}{2} \right) b^\dagger b + g(\sigma^\dagger b + \sigma b^\dagger)$$

Интеграл движения:

$$N = \sigma^\dagger \sigma + b^\dagger b$$

Поэтому в базисе $|0\rangle$ и $|n, 0\rangle$, $|n-1, 1\rangle$ при $n \in \mathbb{N}$ представляется в блочном виде

$$K = K^{(0)} \oplus K^{(1)} \oplus \dots$$

$$K^{(0)} = 0$$

$$K^{(n)} = \begin{pmatrix} \left(\omega_1 - i\gamma \frac{1}{2} \right) n & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega + \left(\omega_1 - i\gamma \frac{1}{2} \right) (n-1) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Модель Джейнса-Каммингса как модель с точно-решаемым спектром

$$\begin{aligned} \text{spec } K^{(n)} = & \frac{\Omega}{2} + \left(\omega_1 - i\gamma \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) \\ & \pm \sqrt{g^2 n + \left(\frac{\Omega}{2} - \frac{1}{2} \left(\omega_1 - i\gamma \frac{1}{2} \right) \right)^2} \equiv \lambda_{n,\pm} \end{aligned}$$

$$\text{spec } \mathcal{L} = \{-i\lambda_{n,\pm}, i\bar{\lambda}_{n,\pm}, -i(\lambda_{n,\pm} - \bar{\lambda}_{m,\pm'})\}$$

Модель Джейнса-Каммингса при одночастичном ограничении

Модель Джейнса-Каммингса с диссипацией (Сачдев) при нулевой температур

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\Omega\sigma^\dagger\sigma + \omega_1 b^\dagger b + g(\sigma^\dagger b + \sigma b^\dagger), \hat{\rho}(t)] + \\ + \gamma \left(b\hat{\rho}(t)b^\dagger - \frac{1}{2}b^\dagger b\hat{\rho}(t) - \frac{1}{2}\hat{\rho}(t)b^\dagger b \right).$$

Оно сводится к одночастичному

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\Omega|1\rangle\langle 1| + \omega_1|2\rangle\langle 2| + g(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|), \rho(t)] + \\ + \gamma \left(|0\rangle\langle 2|\rho(t)|2\rangle\langle 0| - \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)|2\rangle\langle 2| \right).$$

А оно к динамике с неэрмитовым гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = \Omega|1\rangle\langle 1| + \left(\omega_1 - i\frac{\gamma}{2} \right) |2\rangle\langle 2| + g(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|).$$

Немарковский резонансный распад

Вернёмся к модели спин-бозона в приближении вращающейся волны:

$$G(t) = g^2 e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)t}$$

$$H_{\text{eff}} = \Omega |\hat{1}\rangle\langle\hat{1}| + \left(\omega_1 - i\frac{\gamma}{2}\right) |\tilde{1}\rangle\langle\tilde{1}| + g(|\tilde{1}\rangle\langle\hat{1}| + |\hat{1}\rangle\langle\tilde{1}|).$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_{\tilde{1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Omega & -ig \\ -ig & -i\omega_1 - \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_{\tilde{1}}(t) \end{pmatrix}.$$