

Конструктивные модели для неклассических предикатных логик. Часть 2

Н. А. Баженов¹, И. Ш. Калимуллин²

¹ — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

² — Казанский федеральный университет

5 апреля 2024 г.

Факты из первой лекции

Шкалой Крипке называем тройку $(W, \leq, D)$, где:

- ▶ $(W, \leq)$ — это частичный порядок,
- ▶ $D: W \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ — монотонная функция из $(W, \leq)$ в $(2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$.

Для предикатной сигнатуры L и $w \in W$ задаются:

- ▶ $L(w) = L \cup \{c_a : a \in D(w)\}$,
- ▶ $\text{At}(w) = \{P(c_{a_1}, \dots, c_{a_k}) : P^k \in L, a_1, \dots, a_k \in D(w)\}$,
- ▶ $\text{At} = \bigcup_{w \in W} \text{At}(w)$.

Модель Крипке — это четвёрка $(W, \leq, D, V)$, где:

- ▶ $(W, \leq, D)$ — шкала Крипке,
- ▶ $V: W \rightarrow 2^{\text{At}}$ — монотонная функция из $(W, \leq)$ в $(2^{\text{At}}, \subseteq)$, такая что $V(w) \subseteq \text{At}(w)$.

Истинность в моделях Крипке

Пусть $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ — модель Крипке, $w \in W$ и $\varphi \in \text{Sn}(L(w))$.

- ▶ Если $\varphi \in \text{At}(w)$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in V(w)$.
- ▶ Если $\varphi = \psi \wedge \theta$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (w \Vdash \psi \text{ и } w \Vdash \theta)$.
- ▶ Если $\varphi = \psi \vee \theta$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (w \Vdash \psi \text{ или } w \Vdash \theta)$.
- ▶ Если $\varphi = \neg\psi$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (v \nVdash \psi \text{ для каждого } v \geq w)$.
- ▶ Если $\varphi = \psi \rightarrow \theta$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (v \nVdash \psi \text{ или } v \Vdash \theta \text{ для каждого } v \geq w)$.
- ▶ Если $\varphi = \forall x\psi(x)$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (v \Vdash \psi(c_a) \text{ для каждого } v \geq w \text{ и каждого } a \in D(v))$.
- ▶ Если $\varphi = \exists x\psi(x)$, то $w \Vdash \varphi \Leftrightarrow (w \Vdash \psi(c_a) \text{ для некоторого } a \in D(w))$.

Если $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ — модель Крипке и $\varphi \in \text{Sn}(L)$, то

$$\mathcal{M} \Vdash \varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi \text{ для всех } w \in W.$$

Определение

Пусть Γ — интуиционистская теория в сигнатуре L . Модель Крипке $\mathcal{M}$ называют **адекватной моделью** теории Γ , если

$$\mathcal{M} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma,$$

для всех $\varphi \in \text{Sn}(L)$.

Основная теорема первой лекции

Модель Крипке $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ называют ω -моделью, если:

- ▶ $W \subseteq 2^{\mathbb{N}}$,
- ▶ $v \leq w \Leftrightarrow v \subseteq w$ для всех $v, w \in W$.

ω -Модель $\mathcal{M} = (W, \subseteq, D, V)$ называется ω -разрешимой, если $W = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}$ и при этом

- ▶ предикаты « $x \in D(w_k)$ » и « $w_k \Vdash \varphi$ » вычислимы,
- ▶ предикат « $x \in w_k$ » перечислим.

Теорема [IKN-98a]

Любая непротиворечивая разрешимая теория над логикой IPL имеет адекватную ω -разрешимую модель Крипке.

[IKN-98a] H. Ishihara, B. Khossainov, A. Nerode, Decidable Kripke models of intuitionistic theories, *Annals of Pure and Applied Logic*, 93:1–3 (1998), 115–123.

Пусть S — промежуточная логика.

Пример. Логика постоянных областей CDL получается добавлением к IPL схемы

$$\forall x(\alpha(x) \vee \beta) \rightarrow \forall x\alpha(x) \vee \beta,$$

где x не входит свободно в формулу β .

Логика S **полна относительно класса шкал** $\mathcal{K}$, если:

1. Если $\mathcal{M}$ — модель Крипке над шкалой из класса $\mathcal{K}$, то $\mathcal{M} \models \varphi$ для всех предложений φ , доказуемых в S (в сигнатуре L для модели $\mathcal{M}$).
2. Если $\alpha \in \text{Sn}(L)$ и $S \not\vdash_{IPL} \alpha$, то существует модель $\mathcal{M}$ над шкалой из класса $\mathcal{K}$, такая что $\mathcal{M} \not\models \alpha$.

Пример. Логика CDL полна относительно класса шкал с постоянными областями, т.е. шкал $(W, \leq, D)$, таких что $D(v) = D(w)$ для всех $v, w \in W$ [Gabbay 1981, Ono 1983].

План лекции 2

Часть I.

Определение

Модель Крипке $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ называют **разрешимой**, если по данным мирам v и w , элементу x и предложению φ можно вычислимо проверить, верно ли:

- ▶ $w \in W$,
- ▶ $v \leq w$,
- ▶ $x \in D(w)$,
- ▶ $w \Vdash \varphi$.

Теорема 1 [IKN-98b]

Любая непротиворечивая разрешимая интуиционистская теория имеет адекватную разрешимую модель Крипке.

[IKN-98b] H. Ishihara, B. Khoussainov, A. Nerode, Computable Kripke models and intermediate logics, *Information and Computation*, 143:2 (1998), 205–230.

Часть II.

Теорема 2 [IKN-98b]

Любая непротиворечивая разрешимая теория над логикой CDL имеет адекватную разрешимую модель Крипке с постоянными областями.

[IKN-98b] H. Ishihara, B. Khoussainov, A. Nerode, Computable Kripke models and intermediate logics, *Information and Computation*, 143:2 (1998), 205–230.

I. Разрешимые модели над логикой *IPL*

Предварительные определения

Определение

Пару $T = (\Gamma, \Sigma)$ будем называть *th-парой*, если Γ и Σ — это множества предложений одной сигнатуры L .

- *th-пара* (Γ, Σ) **противоречива** (в логике S), если существуют предложения $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ и $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Sigma$, такие что

$$\vdash_S \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta_1 \vee \dots \vee \beta_m.$$

- *th-пара* (Γ, Σ) **полна**, если пара (Γ, Σ) непротиворечива и $\Gamma \cup \Sigma = \text{Sn}(L)$.

Далее для множества $\Gamma \subseteq \text{Sn}(L)$ через $\bar{\Gamma}$ будем обозначать множество $\text{Sn}(L) \setminus \Gamma$.

Простые теории

Определение

Теория $\Gamma \subsetneq \text{Sn}(L)$ является **простой**, если для всех $\alpha, \beta \in \text{Sn}(L)$ выполнено:

$$\alpha \vee \beta \in \Gamma \Rightarrow \alpha \in \Gamma \vee \beta \in \Gamma.$$

Лемма

Пусть $\Gamma \subsetneq \text{Sn}(L)$. Множество Γ является простой теорией в том и только том случае, когда th -пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ полна.

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Допустим, что пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ противоречива. Зафиксируем $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ и $\beta_1, \dots, \beta_m \notin \Gamma$, такие что $\vdash \bigwedge \alpha_i \rightarrow \bigvee \beta_j$. Тогда в силу дизъюнктивного свойства одна из формул β_j должна лежать в Γ — противоречие.

$(\Leftarrow)$. Пусть $\Gamma \vdash \alpha$. Если бы $\alpha \notin \Gamma$, то th -пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ была бы противоречивой. Получаем, что $\alpha \in \Gamma$ и множество Γ дедуктивно замкнуто.

Пусть $\alpha \vee \beta \in \Gamma$. Если бы $\alpha, \beta \notin \Gamma$, то из того, что $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$, получили бы противоречивость пары $(\Gamma, \bar{\Gamma})$. Значит, $\alpha \in \Gamma$ или $\beta \in \Gamma$. □

Насыщенность и лемма о расширении

Определение

th -пара (Γ, Σ) в сигнатуре L называется **насыщенной**, если:

1. пара (Γ, Σ) непротиворечива,
2. Γ — это простая теория,
3. для любого предложения $\exists x\varphi(x)$, если $\exists x\varphi(x) \in \Gamma$, то $\varphi(c) \in \Gamma$ для некоторой константы $c \in L$.

th -пара (Γ', Σ') **расширяет** th -пару (Γ, Σ) , если $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

Лемма о расширении

Пусть L — счётная сигнатура, C — счётное множество новых констант. Для любой непротиворечивой th -пары (Γ, Σ) в сигнатуре L существует расширяющая её насыщенная th -пара (Γ', Σ') в сигнатуре $L(C) = L \cup C$.

Доказательство леммы о расширении

Фиксируем список $(\alpha_s)_{s \in \mathbb{N}}$ всех предложений сигнатуры $L(C)$.

Построим расширяющуюся последовательность непротиворечивых th -пар $(\Gamma_s, \Sigma_s)_{s \in \mathbb{N}}$. Полагаем $(\Gamma_0, \Sigma_0) = (\Gamma, \Sigma)$.

Шаг $s + 1$. Случай 1. Если пара $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$ непротиворечива, то полагаем $(\Gamma_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$.

Случай 2. Если $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$ противоречива и α_s не имеет вид $\exists x\beta(x)$, то полагаем $(\Gamma_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (\Gamma_s \cup \{\alpha_s\}, \Sigma_s)$.

Случай 3. Если $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$ противоречива и $\alpha_s = \exists x\beta(x)$, то полагаем $(\Gamma_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (\Gamma_s \cup \{\alpha_s, \beta(c)\}, \Sigma_s)$ для ранее не использованной константы $c \in C$ с наименьшим номером.

Как обычно, задаём $(\Gamma', \Sigma') = (\bigcup_{s \in \mathbb{N}} \Gamma_s, \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \Sigma_s)$. Ясно, что $\Gamma' \cup \Sigma' = \text{Sn}(L(C))$ и пара (Γ', Σ') удовлетворяет условию 3 из определения насыщенности.

Для того, чтобы доказать непротиворечивость (Γ', Σ') , достаточно показать, что каждая пара (Γ_s, Σ_s) , $s \in \mathbb{N}$, непротиворечива.

Пусть th -пара (Γ_s, Σ_s) непротиворечива.

В случае 2: Имеем, что пара $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$ противоречива.

Фиксируем $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_s$ и $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Sigma_s$, такие что
 $\vdash \bigwedge \gamma_i \rightarrow (\alpha_s \vee \bigvee \delta_j)$.

Допустим, что пара $(\Gamma_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (\Gamma_s \cup \{\alpha_s\}, \Sigma_s)$ противоречива. Фиксируем $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n'} \in \Gamma_s$ и $\delta'_1, \dots, \delta'_{m'} \in \Sigma_s$, такие что $\vdash (\alpha_s \wedge \bigwedge \gamma'_k) \rightarrow \bigvee \delta'_\ell$.

Тогда выводим, что

$$\vdash (\bigwedge \gamma_i \wedge \bigwedge \gamma'_k) \rightarrow (\bigvee \delta_j \vee \bigvee \delta'_\ell),$$

и получаем, что пара (Γ_s, Σ_s) противоречива. Приходим к противоречию.

Пусть th -пара (Γ_s, Σ_s) непротиворечива.

В случае 3: Формула α_s равна $\exists x\beta(x)$.

Как и ранее, имеем, что пара $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_s\})$ противоречива.

Фиксируем $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_s$ и $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Sigma_s$, такие что

$$\vdash \bigwedge \gamma_i \rightarrow (\alpha_s \vee \bigvee \delta_j).$$

Допустим, что пара $(\Gamma_{s+1}, \Sigma_{s+1}) = (\Gamma_s \cup \{\alpha_s, \beta(c)\}, \Sigma_s)$ противоречива. Фиксируем $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n'} \in \Gamma_s$ и $\delta'_1, \dots, \delta'_{m'} \in \Sigma_s$, такие что $\vdash (\alpha_s \wedge \beta(c) \wedge \bigwedge \gamma'_k) \rightarrow \bigvee \delta'_\ell$.

В силу того, что c не входит в $\alpha_s, \gamma'_k, \delta'_\ell$, получаем, что

$$\alpha_s \wedge \bigwedge \gamma'_k \vdash \beta(y) \rightarrow \bigvee \delta'_\ell,$$

$$\alpha_s \wedge \bigwedge \gamma'_k \vdash \exists x\beta(x) \rightarrow \bigvee \delta'_\ell.$$

Значит, пара $(\Gamma_s \cup \{\alpha_s = \exists x\beta(x)\}, \Sigma_s)$ противоречива, и всё сводится к случаю 2.

Итак, пара $(\Gamma', \Sigma') = (\Gamma', \overline{\Gamma'})$ полна, а значит, Γ' — простая теория. Получаем, что пара (Γ', Σ') насыщена. □

Эффективная версия леммы о расширении

Следствие

Пусть Γ — разрешимая теория, Σ — конечное множество предложений, а th -пара (Γ, Σ) в сигнатуре L непротиворечива. Тогда существует насыщенная th -пара (Γ', Σ') в сигнатуре $L(C)$, расширяющая (Γ, Σ) , такая что множества Γ' и Σ' разрешимы.

Кроме того, (Γ', Σ') строится равномерно по (индексам для) L , C и паре (Γ, Σ) .

Существование разрешимой модели Крипке

Теорема 1 [IKN-98b]

Пусть Γ — непротиворечивая разрешимая интуиционистская теория. Тогда Γ имеет адекватную разрешимую модель Крипке.

[IKN-98b] H. Ishihara, B. Khoussainov, A. Nerode, Computable Kripke models and intermediate logics, *Information and Computation*, 143:2 (1998), 205–230.

Доказательство теоремы 1

Зафиксируем бесконечные вычислимые, попарно не пересекающиеся множества констант C_i , $i \in \omega$.

Полагаем $L_0 = L$ и $L_{i+1} = L_i \cup C_i$.

Вначале определим шкалу Крипке $(W, \leq, D)$.

Определение шкалы Крипке

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольная конечная последовательность предложений, такая что:

- ▶ $\alpha_i \in \text{Sn}(L_i)$,
- ▶ каждое α_i имеет вид $\beta \rightarrow \gamma$ или $\forall x\beta(x)$.

Зададим последовательность th -пар $(\Gamma_s, \Sigma_s)_{s \leq n}$. Считаем, что $(\Gamma_{-1}, \Sigma_{-1}) = (\Gamma, \{\perp\})$.

Шаг s . Если $(\Gamma_{s-1}, \Sigma_{s-1}) = (\emptyset, \emptyset)$, то полагаем $(\Gamma_s, \Sigma_s) = (\emptyset, \emptyset)$. Далее считаем, что $\Gamma_{s-1} \neq \emptyset$.

Если пара $(\Gamma_{s-1}, \{\alpha_s\})$ противоречива, то полагаем $(\Gamma_s, \Sigma_s) = (\emptyset, \emptyset)$.

Пусть теперь пара $(\Gamma_{s-1}, \{\alpha_s\})$ непротиворечива.

Случай 1. Пусть $\alpha_s = \beta \rightarrow \gamma$. В этом случае пара $(\Gamma_{s-1} \cup \{\beta\}, \{\gamma\})$ непротиворечива.

Применяем эффективную лемму о расширении к паре $(\Gamma_{s-1} \cup \{\beta\}, \{\gamma\})$, и для получившейся th -пары (Γ', Σ') сигнатуры L_{s+1} задаём $(\Gamma_s, \Sigma_s) = (\Gamma', \Sigma')$.

Определение шкалы Крипке

Пара $(\Gamma_{s-1}, \{\alpha_s\})$ непротиворечива.

Случай 2. Пусть $\alpha_s = \forall x \beta(x)$.

В этом случае для константы $c \in C_s$ пара $(\Gamma_{s-1}, \{\beta(c)\})$ непротиворечива.

Применяем эффективную лемму о расширении к паре $(\Gamma_{s-1}, \{\beta(c)\})$, и для получившейся *th*-пары (Γ', Σ') сигнатуры L_{s+1} задаём $(\Gamma_s, \Sigma_s) = (\Gamma', \Sigma')$.

Для последовательности $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ задаём $\Gamma(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \Gamma_n$, где Γ_n — это множество, взятое из построенной выше последовательности *th*-пар $(\Gamma_s, \Sigma_s)_{s \leq n}$.

Определение

Шкала $(W, \leq, D)$ задаётся по следующим правилам:

- ▶ $W = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) : \Gamma(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq \emptyset\}$,
- ▶ для $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_m)$ имеем $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$ в том и только том случае, когда $\vec{\alpha}$ есть начальный сегмент $\vec{\beta}$,
- ▶ $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n) =$ множество всех констант сигнатуры L_{n+1} .

Вычислимость для шкалы

Определение

Шкала $(W, \leq, D)$ задаётся по следующим правилам:

- ▶ $W = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) : \Gamma(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq \emptyset\}$,
- ▶ для $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_m)$ имеем $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$ в том и только том случае, когда $\vec{\alpha}$ есть начальный сегмент $\vec{\beta}$,
- ▶ $D(\alpha_0, \dots, \alpha_n) =$ множество всех констант сигнатуры L_{n+1} .

Лемма

Структура $(W, \leq)$ есть вычислимый частичный порядок, изоморфный дизъюнктому объединению счётного числа бесконечно ветвящихся деревьев.

Доказательство. Как показать бесконечное ветвление? Фиксируем предложение $\beta^s \notin \Gamma_{s-1}$.

Для того, чтобы пара $(\Gamma_{s-1}, \{\alpha_s\})$ была непротиворечива, достаточно выбрать

$$\alpha_s = \forall x(\underbrace{\beta^s \wedge \beta^s \wedge \dots \wedge \beta^s}_{k \text{ раз}}). \quad \square$$

Адекватная модель Крипке

Теперь модель $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ задаётся по правилу:

- ▶ Пусть $w = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in W$ и $\tilde{\Gamma} = \Gamma(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Для $P^k \in L$ и $c_1, \dots, c_k \in D(w)$,

$$P(c_1, \dots, c_k) \in V(w) \Leftrightarrow P(c_1, \dots, c_k) \in \tilde{\Gamma}.$$

Лемма 1.1

Пусть $w = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in W$ и ψ — предложение в сигнатуре для мира w . Тогда

$$w \Vdash \psi \Leftrightarrow \psi \in \Gamma(\alpha_0, \dots, \alpha_n).$$

Из леммы 1.1 вытекает, что $\mathcal{M}$ — это адекватная разрешимая модель для исходной теории Γ . В самом деле:

- ▶ По эффективной лемме о расширении, для данных w и ψ можно вычислимо проверить, верно ли $\psi \in \Gamma(w)$.
- ▶ Если $\psi \in \Gamma$, то $\psi \in \Gamma(w)$ для всех миров w .
- ▶ Если $\psi \in \text{Sn}(L) \setminus \Gamma$, то для $\alpha_0 = \forall x \psi$ имеем $\psi \notin \Gamma(\alpha_0)$.

Доказательство леммы 1.1

Индукция по сложности предложения ψ . Для $\psi = \varphi \vee \theta$, $\psi = \varphi \wedge \theta$ и $\psi = \exists x\beta(x)$ нужный шаг индукции вытекает из того, что для каждого мира $w \in W$ пара $(\Gamma(w), \Sigma(w))$ насыщена.

Случай 1. Пусть $\psi = \varphi \rightarrow \theta$.

Пусть $(\varphi \rightarrow \theta) \in \Gamma(w)$. Если $v \geq w$ и $\varphi \in \Gamma(v)$, то в силу того, что $\Gamma(w) \subseteq \Gamma(v)$, получаем $\theta \in \Gamma(v)$. Значит, $w \Vdash \varphi \rightarrow \theta$.

Пусть $(\varphi \rightarrow \theta) \notin \Gamma(w)$. Тогда рассмотрим мир $v_0 = (w, \varphi \rightarrow \theta) \in W$. По построению имеем $\varphi \in \Gamma(v_0)$ и $\theta \notin \Gamma(v_0)$. Значит, $w \nVdash \varphi \rightarrow \theta$.

Аналогично рассматривается случай $\psi = \neg\varphi$.

Случай 2. Пусть $\psi = \forall x\beta(x)$.

Пусть $\forall x\beta(x) \in \Gamma(w)$. Если $v \geq w$ и $c \in D(v)$, то в силу того, что $\Gamma(w) \subseteq \Gamma(v)$, получаем $\forall x\beta(x) \in \Gamma(v)$ и $\beta(c) \in \Gamma(v)$. Значит, $w \Vdash \forall x\beta(x)$.

Пусть $\forall x\beta(x) \notin \Gamma(w)$. Тогда рассмотрим мир $v_0 = (w, \forall x\beta(x)) \in W$. По построению имеем $\beta(c) \notin \Gamma(v_0)$ для некоторой константы c . Значит, $w \nVdash \forall x\beta(x)$. □

Теорема 1 доказана. □

II. Разрешимые модели над логикой CDL

Логика постоянных областей CDL получается добавлением к IPL схемы

$$\forall x(\alpha(x) \vee \beta) \rightarrow \forall x\alpha(x) \vee \beta,$$

где x не входит свободно в формулу β .

Логика CDL полна относительно класса шкал с постоянными областями, т.е. шкал $(W, \leq, D)$, таких что $D(v) = D(w)$ для всех $v, w \in W$.

Теорема 2 [IKN-98b]

Любая непротиворечивая разрешимая теория Γ над логикой CDL имеет адекватную разрешимую модель Крипке с постоянными областями.

[IKN-98b] H. Ishihara, B. Khoussainov, A. Nerode, Computable Kripke models and intermediate logics, *Information and Computation*, 143:2 (1998), 205–230.

Схема доказательства теоремы 2

Рассмотрим th -пару $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ в сигнатуре L .

Напомним, что th -пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ *насыщенна*, если $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ непротиворечива и при этом для любого предложения $\exists x\varphi(x)$, если $\exists x\varphi(x) \in \Gamma$, то $\varphi(c) \in \Gamma$ для некоторой константы $c \in L$.

Если пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ насыщена, то Γ является теорией с дизъюнктивным свойством.

Определение

th -пара $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ в сигнатуре L **полна по Хенкину**, если:

- ▶ $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ насыщена, и
- ▶ для любой формулы $\alpha(x)$ с одной свободной переменной x выполнено: если $\alpha(c) \in \Gamma$ для всех констант $c \in L$, то $\forall x\alpha(x) \in \Gamma$.

Новая лемма о расширении

Лемма о расширении II

Если (Γ, Σ) — это непротиворечивая th -пара в сигнатуре L , то существует полная по Хенкину th -пара (Γ', Σ') в сигнатуре $L_C = L \cup C$, расширяющая (Γ, Σ) .

Идея доказательства. Хотим добавить предложение $\alpha_{s+1} = \forall x\beta(x)$ в пару (Γ_s, Σ_s) . Если $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_{s+1}\})$ непротиворечива, то переходим к $(\Gamma_s, \Sigma_s \cup \{\alpha_{s+1}, \beta(c)\})$ для свежей константы c .

Иначе переходим к $(\Gamma_s \cup \{\alpha_{s+1}\}, \Sigma_s)$.



Новая лемма о расширении

Лемма о расширении II допускает эффективную версию (в случае разрешимого Γ и конечного Σ).

Кроме того, на построенную теорию Γ' можно наложить следующие дополнительные условия:

- ▶ Γ' **сильно универсальна**, т.е. для любых предложения $\forall x\beta(x) \in \text{Sn}(L_C)$ и конечного множества $\Delta \subset \text{Sn}(L_C)$ верно:

$$(\Gamma', \Delta \cup \{\forall x\beta(x)\}) \text{ непротиворечива} \Rightarrow (\Gamma', \Delta \cup \{\beta(c)\}) \\ \text{непротиворечива для некоторого } c \in L_C.$$

- ▶ Γ' **сильно экзистенциальна**, т.е. для любых предложения $\exists x\beta(x) \in \text{Sn}(L_C)$ и конечного множества $\Delta \subset \text{Sn}(L_C)$ верно:

$$(\Gamma' \cup \{\exists x\beta(x)\}, \Delta) \text{ непротиворечива} \Rightarrow (\Gamma' \cup \{\beta(c)\}, \Delta) \\ \text{непротиворечива для некоторого } c \in L_C.$$

Схема доказательства теоремы 2

Лемма [Gabbay 1981, Ono 1983]

Пусть (Γ', Σ') — *th*-пара в сигнатуре L_C , такая что множество Γ' сильно универсально и сильно экзистенциально. Тогда (в логике *CDL*) для любого $\alpha \in \text{Sn}(L_C)$, множество $\Gamma' \cup \{\alpha\}$ также сильно универсально и сильно экзистенциально.

Замечание. Логика *CDL* используется здесь для доказательства сильной универсальности $\Gamma' \cup \{\alpha\}$.

Применяя новые леммы, по аналогии с теоремой 1 можно построить для данной теории Γ её разрешимую адекватную модель Крипке $\mathcal{M} = (W, \leq, D, V)$ с условием постоянства областей.

(При этом для каждого мира $w \in W$ его сигнатура равна $L_C = L \cup C$, а $D(w) = C$.)



Литература:

- ▶ H. Ishihara, B. Khoussainov, and A. Nerode,
Decidable Kripke models of intuitionistic theories //
Annals of Pure and Applied Logic, 93:1–3 (1998), 115–123.
- ▶ H. Ishihara, B. Khoussainov, and A. Nerode,
Computable Kripke models and intermediate logics //
Information and Computation, 143:2 (1998), 205–230.
- ▶ S. Ganguli and A. Nerode,
Effective completeness theorems for modal logic //
Annals of Pure and Applied Logic, 128:1–3 (2004), 141–195.