

Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 10. Локальное по времени кинетическое уравнение. Кумулянты Кубо — ван Кампена

Теретёнков Александр Евгеньевич

8 апреля 2024 г.

В прошлой серии...

Утверждение. Уравнение Накажимы-Цванцига (Nakajima, 1958; Zwanzig, 1960):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_s \mathcal{P}, \quad \mathcal{I}_t = \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\text{Tex}} \left(\lambda \int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau \right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Локальное по времени уравнение

Теорема 1

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}(t)\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho_{t_0},$$

где $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$,

$$\mathcal{K}(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} \right) (\mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P})^{(-1)},$$

$$\mathcal{I}(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q} - \mathcal{K}(t) \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q},$$

где $\mathcal{U}_{t_0}^t$ — решение задачи Коши $\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{t_0}^t = \lambda \mathcal{L}_t \mathcal{U}_{t_0}^t, \mathcal{U}_{t_0}^{t_0} = I$, при достаточно малых t или λ .

Локальное по времени уравнение

Псевдообратный

$$\mathcal{A}^{(-1)}$$

выбирается так, что

$$\mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{A} = \mathcal{P}, \quad \mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{A}^{(-1)} = 0.$$

Локальное по времени уравнение

Доказательство.

$$\rho_t = \mathcal{U}_{t_0}^t \rho_{t_0},$$

где $\mathcal{U}_{t_0}^t$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{t_0}^t = \lambda \mathcal{L}_t \mathcal{U}_{t_0}^t, \quad \mathcal{U}_{t_0}^{t_0} = I.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t &= \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} + \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} \right) (\mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P})^{(-1)} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} + \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} \right) (\mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P})^{(-1)} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \\ &\quad - \left(\frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} \right) (\mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P})^{(-1)} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q} + \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{Q}. \quad \square \end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Теорема 2

При $\lambda \rightarrow 0$ выполнено следующее асимптотическое разложение

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_n(t),$$

$$\mathcal{K}_n(t) = \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geq 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_q}(t),$$

$$\mathcal{M}_k(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_k} \mathcal{P},$$

$$\dot{\mathcal{M}}_k(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{M}_k(t).$$

Лемма. При $\lambda \rightarrow 0$

$$\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^n (-1)^q \sum_{\sum_{j=1}^q k_j = n, k_j \geq 1} \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q},$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k \right)^{-1} &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k \right)^q \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\sum_{j=1}^q k_j = n, k_j \geq 1} \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{\sum_{j=1}^q k_j = n, k_j \geq 1} (-1)^q \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q}. \quad \square \end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Доказательство теоремы.

$$\mathcal{U}_{t_0}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_k}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t) &\equiv \frac{d}{dt} \mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} (\mathcal{P} \mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P})^{(-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{M}_m(t) \right)^{(-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^n (-1)^q \sum_{\sum_{j=1}^q k_j = n, k_j \geq 1} \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_q}(t) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geq 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_q}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Теорема 3

При $\lambda \rightarrow 0$ выполнено следующее асимптотическое разложение

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}_n(t),$$

$$\mathcal{I}_n(t) = \dot{\mathcal{M}}_n(t) + \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geq 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_{q-1}}(t) \tilde{\mathcal{M}}_{k_q}(t),$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_k(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_k} \mathcal{Q}, \quad \dot{\mathcal{M}}_k(t) \equiv \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{M}}_k(t).$$

Локальное по времени уравнение

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \\ &\quad - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geq 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_q}(t) \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left(\dot{\mathcal{M}}_k(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geq 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \dots \mathcal{M}_{k_{q-1}}(t) \tilde{\mathcal{M}}_{k_q}(t) \right). \square\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Первые члены

$$\mathcal{M}_0(t) = \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_1(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_2(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_3(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_4(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{L}_{t_4} \mathcal{P}$$

Локальное по времени уравнение

$n = 1$. Композиции: 1

$$\mathcal{K}_1(t) = \dot{\mathcal{M}}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}$$

$n = 2$. Композиции: $2 = 1 + 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(t) &= \dot{\mathcal{M}}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t) \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

$n = 3$. Композиции: $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$

$$\mathcal{K}_3(t) = \dot{\mathcal{M}}_3(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_1(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_2(t) + \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_1(t)$$

$n = 4$. Композиции: $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4(t) = & \dot{\mathcal{M}}_4(t) - \dot{\mathcal{M}}_3(t)\mathcal{M}_1(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_3(t) + \\ & + \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_1(t) + \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_2(t)\mathcal{M}_1(t) \\ & + \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)(\mathcal{M}_1(t))^3\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

В случае обнуления нечётных комбинаций $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_{2m}}\dots\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} = 0$

$$\mathcal{K}_3(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4(t) &= \dot{\mathcal{M}}_4(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_2(t) \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} \\ &\quad - \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Упорядочение интегралов по времени

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 f(t_1, t_2, t_3) &= \int_{\substack{t \geq t_1 \geq t_0 \\ t \geq t_2 \geq t_3 \geq t_0}} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1, t_2, t_3) \\ &= \int_{t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1, t_2, t_3) + \int_{t \geq t_2 \geq t_1 \geq t_3 \geq t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1, t_2, t_3) \\ &+ \int_{t \geq t_2 \geq t_3 \geq t_1 \geq t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1, t_2, t_3) \\ &= \int_{t \geq t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq t_0} dt_1 dt_2 dt_3 (f(t_1, t_2, t_3) + f(t_2, t_1, t_3) + f(t_3, t_1, t_2)) \end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4(t) = & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \cdot \\ & \cdot \left(\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} \right. \\ & \left. - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P} \right)\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Заметим, что между проекторами $\mathcal{P}$ произведения упорядочены по времени. Оказывается, что в общем случае верна формула

$$\mathcal{K}^{(n)}(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_{n-1}}),$$

где $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_{n-1}})$ — *частично упорядоченные кумулянты (Кубо - ван Кампена)*. (Для компактности дальнейших формул переобозначим $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}(t)$.)

Локальное по времени кинетическое уравнение

- 1 Пишем строчку $\mathcal{P}\mathcal{L}\dots\mathcal{L}\mathcal{P}$.
- 2 На её основе пишем все возможные строчки, вставляя операторы $\mathcal{P}$ так, чтобы получившаяся строчка содержала хотя бы один символ $\mathcal{L}$ между двумя операторами $\mathcal{P}$ и ставим знак $(-1)^{\#\mathcal{P}}$, где $\#\mathcal{P}$ — количество вставленных операторов $\mathcal{P}$.
- 3 Добавляем к первому символу $\mathcal{L}$ индекс t , а к остальным индексы t так, чтобы между любой парой супероператоров $\mathcal{P}$ индексы t_k были упорядочены по возрастанию индекса k . Если таких способов несколько, то выписываем все возможные способы, сохраняя знак, получившийся на предыдущем шаге.
- 4 Складываем получившиеся члены с учётом знаков.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}) - ?$$

① $\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P}.$

② $\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P}.$

③ $\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}$

④ $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}) = \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3}) - ?$$

1 $\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P}.$

2 $\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P},$
 $-\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P}, \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P}, \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P}, \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P},$
 $-\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{P}.$

3 $-\mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \mathcal{L} \mathcal{L} \mathcal{P} \rightarrow$
 $-\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}, -\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P}$

4

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}
 \kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3}) = & \underline{\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}} - \\
 & - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \underline{\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}} - \underline{\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}} - \\
 & - \underline{\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P}} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \\
 & + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} + \\
 & + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} + \\
 & + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \\
 & + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \\
 & - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \\
 & - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P}
 \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Несколько более компактный вид (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$\mathcal{K}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_2(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_3(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4(t) = & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \\ & + \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}) \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Аналогично (Chang, Skinner, 1993)

$$\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_3(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^{(4)} = & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} + \\ & + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}) \end{aligned}$$

Пример

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$$

$$\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- \otimes I + \int \left(g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k \sigma_+ \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t) = \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \sigma_+ \otimes b_k \right) dk$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t), \rho]$$

$$\mathcal{P}\rho = \text{Tr}_B \rho \otimes |vac\rangle\langle vac|$$

Пример

Утверждение.

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \sigma_+ \otimes \rho_B = -G_I(t - t_1) \sigma_+ \otimes \rho_B,$$

где

$$\rho_B = |vac\rangle\langle vac|$$
$$G_I(t) = \int |g_k|^2 dk e^{-i(\omega_k - \Omega)t}$$

Кроме того,

$$\mathcal{P} \sigma_+ \otimes \rho_B = \sigma_+ \otimes \rho_B$$

Пример

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) &= -i[\hat{H}_{\text{SB},\text{I}}^{\text{RWA}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] = \\ &= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) &= -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] = \\ &= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk \\ \mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) &= \\ &= - \left[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t), \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk \right] = \\ &= - \int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \sigma_- \sigma_+ \otimes b_{k'} b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk dk' = \\ &= - \int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \otimes \delta(k - k') |vac\rangle\langle vac| dk dk' = \\ &= - \int dk e^{-i(\omega_k - \Omega)(t - t_1)} |g_k|^2 \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| = \\ &= -G_I(t - t_1) \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad \square\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} & (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\ & - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\ & = -(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3} + \mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\ & = -(G_I(t-t_2)G_I(t_1-t_3) + G_I(t-t_3)G_I(t_1-t_2))\sigma_+ \otimes \rho_B \end{aligned}$$

Ранее было

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda^2 \int_0^t ds G_I(t-s)x(s), \quad x(0) = 1$$

При $x(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho(t)] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_- \right),$$

где

$$\gamma(t) = -2 \operatorname{Re} \frac{\frac{d}{dt}x(t)}{x(t)}, \quad \Delta\varepsilon(t) = -\operatorname{Im} \frac{\frac{d}{dt}x(t)}{x(t)}.$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) = \\ = \left(-i[\Delta\epsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\} \right) \right) \otimes \rho_B\end{aligned}$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) &= \\ &= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\} \right) \right) \otimes \rho_B \\ \mathcal{K}_t(\sigma_+ \otimes \rho_B) &= - \left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2} \right) (\sigma_+ \otimes \rho_B)\end{aligned}$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) = \\ = \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\} \right) \right) \otimes \rho_B\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_t(\sigma_+ \otimes \rho_B) = - \left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2} \right) (\sigma_+ \otimes \rho_B)$$

$$i\Delta\varepsilon^{(2)}(t) + \frac{\gamma^{(2)}(t)}{2} = \int_0^t dt_1 G_I(t-t_1)$$

$$\begin{aligned}i\Delta\varepsilon^{(4)}(t) + \frac{\gamma^{(4)}(t)}{2} = \\ = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (G_I(t-t_2)G_I(t_1-t_3) + G_I(t-t_3)G_I(t_1-t_2))\end{aligned}$$

Пример

В условиях резонанса:

$$G_I(t) = g^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \gamma_M(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}), \gamma_M = \frac{4g^2}{\gamma}, \quad \varepsilon^{(2)}(t) = 0$$

$$\gamma^{(4)}(t) = \frac{2\gamma_M^2}{\gamma} \left(\operatorname{sh} \frac{\gamma}{2}t - \frac{\gamma}{2}t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad \varepsilon^{(4)}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) = \\ & = \left(\lambda^2 \gamma^{(2)}(t) + \lambda^4 \gamma^{(4)}(t) + O(\lambda^6) \right) \left(\sigma_- \rho(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho(t) \} \right) \otimes \rho_B \end{aligned}$$

Пример

У нас сократились члены вида

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\sigma_+ \otimes \rho_B = G_I(t-t_1)G_I(t_2-t_3)\sigma_+ \otimes \rho_B$$

В случае $G_I(t) = g^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 G_I(t-t_1)G_I(t_2-t_3) = \frac{4g^4}{\gamma^3}(-4+\gamma t+e^{-\frac{\gamma}{2}t}(4+\gamma t))$$

$\rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.