«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С СУММАРНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ»

Автор: к.ф.-м.н., Ибрагимов Д.Н.

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Москва, 2024

1. Система управления

Рассматривается конечномерная стационарная линейная система управления с дискретным временем и суммарными ограничениями на векторное управление:

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + u(k),\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
&x(0) = x_0,\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant t,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $r \in [1; +\infty)$ и $t > 0$ – заданные параметры, определяющие суммарное ограничение на управление. Через $\mu(u, \mathcal{U})$ обозначен функционал Минковского.

Предположения

1. *$\mathcal{U}$ является **выпуклым** и **компактным**;*
2. $0 \in \mathrm{ri}\,\mathcal{U}$;
3. $\det A \neq 0$.

2. Постановка задачи

Для системы (1) решается задача быстродействия, т.е.

1. **требуется вычислить минимальное число шагов** $N_{\min}$, за которое можно перевести систему (1) из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат:

$$N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$\exists\, u(0), \ldots, u(N-1) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \leqslant t^r,\ x(N) = 0\};$$

2. **требуется построить процесс** $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$**, удовлетворяющий условию** $x^*(N_{\min}) = 0$.

Предполагается, что $N_{\min} < \infty$.

3. Связь с классической постановкой

Классическое описание системы управления может быть получено при предельном переходе $r \to \infty$ и равенстве $t = 1$:

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\
&x(0) = x_0,\ \ u(k) \in \mathcal{U},\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Система (2) не позволяет учесть ресурсные ограничения на управление.

4. Множества 0-управляемости

Обозначим через $\{\mathcal{X}_{t,r}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ класс множеств 0-управляемости системы (1):

$$\mathcal{X}_{t,r}(N) = \left\{x_0 \in \mathbb{R}^n\colon\; -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1),\; \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k),\mathcal{U})^r \leqslant t^r \right\},\; N \in \mathbb{N}.$$

Для краткости обозначений также будем полагать, что $\mathcal{X}_{1,r}(N) = \mathcal{X}_r(N)$.

Лемма 1

Для всех $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно равенство

$$\mathcal{X}_{t,r}(N) = t\mathcal{X}_r(N).$$

$$N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon x_0 \in \mathcal{X}_{t,r}(N)\}. \tag{3}$$

Лемма 2

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ оптимален по быстродействию для системы (1) тогда и только тогда, когда для некоторого $t_0 \leqslant t$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}_{t_{k+1},r}(N_{\min} - k - 1), \\ &t_{k+1} = (t_k^r - \mu(u^*(k),\mathcal{U})^r)^{\frac{1}{r}},\; k = \overline{0, N_{\min} - 1}. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Обобщенная сумма по Минковскому

Введем для двух множеств $\mathcal{X},\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ следующую операцию:

$$\mathcal{X} +_r \mathcal{U} = \bigcup_{\substack{t^r+s^r\leqslant 1\\ t,s\geqslant 0}} (t\mathcal{X} + s\mathcal{U}). \tag{5}$$

Лемма 3

Пусть $\mathcal{X}_1,\ldots,\mathcal{X}_N \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\bigcup_{\substack{t_1^r+\ldots+t_N^r\leqslant 1\\ t_1,\ldots,t_N\geqslant 0}} (t_1\mathcal{X}_1 + \ldots + t_N\mathcal{X}_N) = \mathcal{X}_1 +_r \ldots +_r \mathcal{X}_N.$$

Лемма 4

Пусть $\mathcal{X},\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *выпуклые,* $0 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{U}$. *Тогда*

1. $\mathcal{X} +_1 \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{\mathcal{X} \cup \mathcal{U}\}$;
2. $\mathcal{X} +_\infty \mathcal{U} = \mathcal{X} + \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{X} +_{r_1} \mathcal{U} \subset \mathcal{X} +_{r_2} \mathcal{U}$ *для любых* $1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty$.

6. Свойства обобщенной суммы по Минковскому

Лемма 5

Пусть $\mathcal{X},\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда*

1. *если* $\mathcal{X},\mathcal{U}$ *выпуклые, то* $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – *выпуклое множество;*
2. *если* $\mathcal{X},\mathcal{U}$ *компактные, то* $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – *компактное множество;*
3. *если* $\mathcal{X},\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *относительно строго выпуклые,* $0 \in \operatorname{ri}\mathcal{X} \cap \operatorname{ri}\mathcal{U}$, $r > 1$, *то* $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$ – *относительно строго выпуклое множество.*

Лемма 6

Пусть $\mathcal{X},\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *выпуклые,* $0 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{U}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $u_0 \in \mathcal{U}$, $t_0, s_0 \geqslant 0$, $t_0^r + s_0^r \leqslant 1$. *Тогда*

1. *справедливо соотношение для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X} +_r \mathcal{U}) = \begin{cases} \left(\mathcal{S}(p,\mathcal{X})^{\frac{r}{r-1}} + \mathcal{S}(p,\mathcal{U})^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}}, & r > 1, \\ \max\left\{\mathcal{S}(p,\mathcal{X}), \mathcal{S}(p,\mathcal{U})\right\}, & r = 1; \end{cases}$$

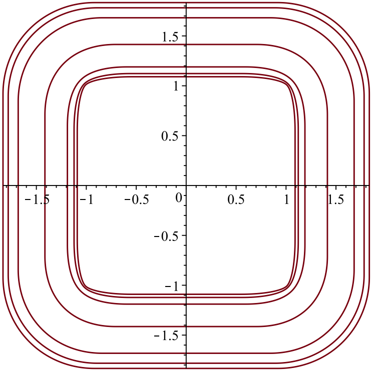
2. *справедливо соотношение для нормального конуса*

$$\mathcal{N}(t_0x_0+s_0u_0, \mathcal{X}+_r\mathcal{U}) = \mathcal{N}(x_0,\mathcal{X})\cap\mathcal{N}(u_0,\mathcal{U})\cap\mathcal{N}(t_0x_0+s_0u_0, (x_0\ u_0)\mathcal{E}_r(2)).$$

7. Пример

$$\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \colon |u_1|^2 + |u_2|^2 \leqslant 1\right\},$$



Множество $\mathcal{X} +_r \mathcal{U}$, $r \in \left\{\frac{8}{7}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6, 8\right\}$

8. Представление множеств 0-управляемости

Теорема 1

Пусть $\det A \neq 0$. *Тогда для всех* $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. *верно равенство*

$$\mathcal{X}_{t,r}(N) = -t\left(A^{-1}\mathcal{U} +_r \ldots +_r A^{-N}\mathcal{U}\right);$$

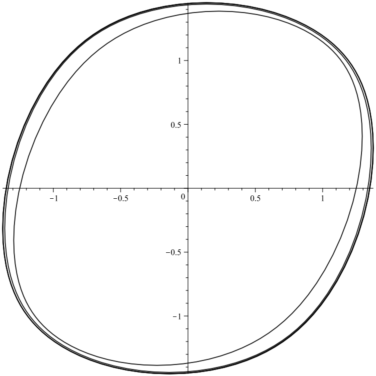
2. *верно представление для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}_{t,r}(N)) = \begin{cases} t\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \mathcal{S}(-(A^{-k})^{\mathrm{T}}p, \mathcal{U})^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}}, & r > 1, \\ t \max\limits_{k=\overline{1,N}} \left\{\mathcal{S}(-(A^{-k})^{\mathrm{T}}p, \mathcal{U})\right\}, & r = 1; \end{cases}$$

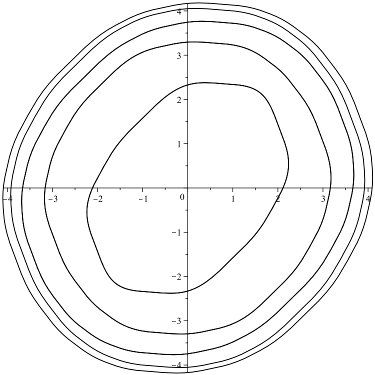
3. $\mathcal{X}_{t,r}(N)$ *выпуклое и компактное;*
4. *если* $\mathcal{U}$ *относительно строго выпуклое и* $r > 1$, *то* $\mathcal{X}_{t,r}(N)$ *относительно строго выпуклое.*

9. Пример

$$A = \frac{10}{9}\begin{pmatrix}\cos(2) & -\sin(2)\\ \sin(2) & \cos(2)\end{pmatrix},\ b = \frac{10}{9}\begin{pmatrix}\cos(2)-\sin(2)\\ \cos(2)+\sin(2)\end{pmatrix},\ \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{b, -b\}.$$



Множества $\mathcal{X}_{\frac{4}{3}}(N)$, $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$



Множества $\mathcal{X}_4(N)$, $N \in \{4, 8, 12, 16, 20\}$

10. Оптимальное управление для случая $r \in (1; +\infty)$

Теорема 2

Пусть в системе (1) *множество* $\mathcal{U}$ *относительно строго выпукло,* $r > 1$, $x_0 \in \mathcal{X}_{t,r}(N_{\min}) \setminus \mathcal{X}_{t,r}(N_{\min} - 1)$, *наборы* $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{R}^n$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *определяются согласно рекуррентным соотношениям*

$$
\begin{aligned}
& x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k), \\
& \psi(k+1) = (A^{-1})^{\mathrm{T}} \psi(k), \\
& u^*(k) = t_0 \left(\frac{\mathcal{S}(\psi(k+1), \mathcal{U})}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(N_{\min}))} \right)^{\frac{1}{r-1}} \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (\psi(k+1), u), \\
& x^*(0) = x_0, \\
& t_0 = \mu(x_0, \mathcal{X}_r(N_{\min})) \leqslant t, \\
& -\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}_{t_0,r}(N_{\min})) \setminus \mathrm{Lin}^{\perp} \mathcal{X}_{t_0,r}(N_{\min}).
\end{aligned}
$$

Тогда

1. $N_{\min}$ *– время быстродействия для системы* (1) *и начального состояния* x_0;
2. *процесс* $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ *оптимален в задаче быстродействия для системы* (1);
3. *если* $t = t_0$, *то оптимальный процесс единственный.*

11. Оптимальное управление для случая $r = 1$

Теорема 3

Пусть в системе (1) $r = 1$, *выполнено включение* $x_0 \in \mathcal{X}_{t,1}(N_{\min})$, $\det A \neq 0$, *справедливы представления*

$$\mathcal{U} = \mathrm{conv}\{u^1, \ldots, u^M\},\ \ \mathcal{X}_1(N) = \mathrm{conv}\{x^1(N), \ldots, x^{L(N)}(N)\},\ \ N \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

наборы $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$, $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$, $\{t_k\}_{k=0}^{N_{\min}}$ *определяются соотношениями*

$$\begin{aligned}
&x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k),\\
&u^*(k) = \sum_{j=1}^{M} \mu_j^* u^j,\\
&t_{k+1} = t_k - \sum_{j=1}^{M} \mu_j^*,\ \ k = \overline{0, N_{\min} - 1},\\
&x^*(0) = x_0,\ \ t_0 = \mu(x_0, \mathcal{X}_1(N_{\min})),
\end{aligned}$$

где на каждом шаге $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ *числа* $\mu_1^*, \ldots, \mu_M^*$ *определяются из решения задачи линейного программирования*

12. Оптимальное управление для случая $r = 1$

Теорема 3 (Продолжение)

$$
\begin{gathered}
\mu_1 + \ldots + \mu_M \to \min_{\lambda,\mu}, \\
Ax^*(k) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j u^j = \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i x^i(N_{\min} - k - 1), \\
t_k - \sum_{j=1}^{M} \mu_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i, & k < N_{\min} - 1, \\ 0, & k = N_{\min} - 1, \end{cases} \\
\lambda_1, \ldots \lambda_{L(N_{\min}-k-1)}, \mu_1, \ldots, \mu_M \geqslant 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Тогда $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ – *оптимальный по быстродействию процесс.*

13. Пример решения задачи быстродействия

Решим задачу быстродействия для системы, на управление которой накладываются ресурсные ограничения:

$$A = \begin{pmatrix} 2-\cos\delta & \sin\delta & 2-2\cos\delta \\ \sin\delta & \cos\delta & 2\sin\delta \\ -1+\cos\delta & -\sin\delta & -1+2\cos\delta \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} = \mathrm{conv}\{-b, b\}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\sin\delta + 2\delta \\ 2-2\cos\delta \\ 2\sin\delta - \delta \end{pmatrix}.$$

Параметр $r \geqslant 1$ определяет энергоэффективность двигательной установки.
Пусть $\delta = 0.5$, $x_0 = (0, 0, 0.4)^{\mathrm{T}}$, $t = 1$, $r \in \{1, 4\}$.

14. Оптимальная траектория для $r = 1$

В ходе расчетов были получены следующие значения:

$$\mu(x_0, \mathcal{X}_1(9)) = 1.0470, \;\; \mu(x_0, \mathcal{X}_1(10)) = 0.9817, \;\; N_{\min} = 10.$$

Энергетические затраты при этом составляют

$$\sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \mu(u^*(k), \mathcal{U}) = 0.9960.$$

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^*(k)$	0	0.0680	0.1667	0.2398	0.2689	0.2468
$x_2^*(k)$	0	0.2056	0.1797	0.1065	0.0072	-0.0938
$x_3^*(k)$	0.4	-0.0313	-0.1368	-0.2099	-0.2389	-0.2168
$u^*(k)$	$-0.7266b$	$-0.0134b$	0	0	0	$0.0871b$
k	6	7	8	9	10	
$x_1^*(k)$	0.1825	0.1064	0.0423	0.0068	0	
$x_2^*(k)$	-0.1506	-0.1467	-0.1042	-0.0373	0	
$x_3^*(k)$	-0.1090	-0.0278	0.0367	0.0700	0	
$u^*(k)$	$0.0101b$	$0.0008b$	$-0.0054b$	$-0.1525b$	–	

15. Оптимальная траектория для $r = 4$

В ходе расчетов было получено

$$x_0 \in \mathcal{X}_4(5) \setminus \mathcal{X}_4(4), \ \ N_{\min} = 6.$$

$$t_0 = \mu(x_0, \mathcal{X}_4(5)) = 0.8472,$$

$$-\psi(0) = (-0.6540, -0.3886, -0.6491)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}_{t_0,4}(5)).$$

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^*(k)$	0	0.0663	0.1348	0.0927	0.0166	0
$x_2^*(k)$	0	0.1951	0.0312	-0.1608	-0.0990	0
$x_3^*(k)$	0.4	-0.0510	-0.3706	-0.1191	0.1855	0

k	0	1	2	3	4
$u_1^*(k)$	-0.0317	-0.0207	0.0172	0.0188	-0.0166
$u_2^*(k)$	-0.1884	-0.1229	0.1025	0.1119	-0.0990
$u_3^*(k)$	-0.3531	-0.2304	0.1922	0.2097	-0.1855