Семейства равновесных мер, ударные волны и многомерная перспектива

А.И. Аптекарев

Институт Прикладной Математики
им. М.В.Келдыша РАН

Расширенный семинар комплексного анализа 26.12.2011,
посвященный 80-ти летию А.А. Гончара

Задача Равновесия

- External field (semi-continues from below) :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \qquad Q \not\equiv \infty \quad \text{on} \quad \mathbb{R}; \qquad \liminf_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{\log|z|} > 1.$$

- Energy, potential

$$J(\mu) := I(\mu) + 2\int Q(z)d\mu(z),$$

where

$$I(\mu) := \int V^{\mu}(z)d\mu(z), \quad V^{\mu}(z) := -\int \log|z - z|\, d\mu(z).$$

- Extremal measure

$$\lambda(z) \quad : \quad J(\lambda) = \inf_{\mu \in M^+} J(\mu)$$

- Equilibrium property

$$V^{\lambda}(z) + Q(z) \begin{cases} \geq \gamma_Q, & z \in \mathbb{R}, \\ = \gamma_Q, & z \in \operatorname{supp}(\lambda) := S_\lambda. \end{cases}$$

Задача Равновесия

- External field (semi-continues from below) :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \qquad Q \not\equiv \infty \quad \text{on} \quad \mathbb{R}; \qquad \liminf_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{\log|z|} > 1.$$

- Energy, potential

$$J(\mu) := I(\mu) + 2\int Q(z)d\mu(z),$$

where

$$I(\mu) := \int V^{\mu}(z)d\mu(z), \quad V^{\mu}(z) := -\int \log|z - z|\, d\mu(z).$$

- Extremal measure

$$\lambda(z) \quad : \quad J(\lambda) = \inf_{\mu\in M^+} J(\mu)$$

- Equilibrium property

$$V^{\lambda}(z) + Q(z) \begin{cases} \geq \gamma_Q, & z \in \mathbb{R}, \\ = \gamma_Q, & z \in \mathrm{supp}(\lambda) := S_{\lambda}. \end{cases}$$

Задача Равновесия

- External field (semi-continues from below) :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \qquad Q \not\equiv \infty \quad \text{on} \quad \mathbb{R}; \qquad \liminf_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{\log|z|} > 1.$$

- Energy, potential

$$J(\mu) := I(\mu) + 2\int Q(z)d\mu(z),$$

where

$$I(\mu) := \int V^{\mu}(z)d\mu(z), \quad V^{\mu}(z) := -\int \log|z - z|\, d\mu(z).$$

- Extremal measure

$$\lambda(z) \quad : \quad J(\lambda) = \inf_{\mu\in M^+} J(\mu)$$

- Equilibrium property

$$V^{\lambda}(z) + Q(z) \begin{cases} \geq \gamma_Q, & z \in \mathbb{R}, \\ = \gamma_Q, & z \in \mathrm{supp}(\lambda) := S_{\lambda}. \end{cases}$$

Задача Равновесия

- External field (semi-continues from below) :

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \qquad Q \not\equiv \infty \quad \text{on} \quad \mathbb{R}; \qquad \liminf_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{\log|z|} > 1.$$

- Energy, potential

$$J(\mu) := I(\mu) + 2\int Q(z)d\mu(z),$$

where

$$I(\mu) := \int V^\mu(z)d\mu(z), \quad V^\mu(z) := -\int \log|z - z|\, d\mu(z).$$

- Extremal measure

$$\lambda(z) \quad : \quad J(\lambda) = \inf_{\mu\in M^+} J(\mu)$$

- Equilibrium property

$$V^\lambda(z) + Q(z) \begin{cases} \geq \gamma_Q, & z \in \mathbb{R}, \\ = \gamma_Q, & z \in \operatorname{supp}(\lambda) := S_\lambda. \end{cases}$$

Асимптотика ОМ

- Orthogonal Polynomials $P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n})$:

$$\int P_n(z)\, z^k \, \exp\{n\, Q(z) + Q_0(z)\}\, dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

- Weight on $[-1, 1]$; Hermite weight; "varying" weight.
- Zero counting measure:

$$\nu_{P_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(z - z_{k,n}) \xrightarrow{*} ? \qquad n \to \infty.$$

- Theorem [Gonchar-Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials, Mat. Sb., 1984, 125(167), 117–127]:

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|P_n(z)| = -V^{\lambda}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus S,$$

Асимптотика ОМ

- Orthogonal Polynomials $P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n})$:

$$\int P_n(z)\, z^k\, \exp\{n\,Q(z) + Q_0(z)\}\, dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

- Weight on $[-1, 1]$; Hermite weight; "varying" weight.
- Zero counting measure:

$$\nu_{P_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta(z - z_{k,n}) \xrightarrow{*} ? \qquad n \to \infty.$$

- Theorem [Gonchar-Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials, Mat. Sb., 1984, 125(167), 117–127]:

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|P_n(z)| = -V^{\lambda}(z), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus S,$$

Асимптотика ОМ

- Orthogonal Polynomials $P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n})$:

$$\int P_n(z)\, z^k\, \exp\{n\, Q(z) + Q_0(z)\}\, dz = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

- Weight on $[-1, 1]$; Hermite weight; "varying" weight.
- Zero counting measure:

$$\nu_{P_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta(z - z_{k,n}) \xrightarrow{*} ? \qquad n \to \infty.$$

- Theorem [Gonchar-Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials, Mat. Sb., 1984, 125(167), 117–127]:

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|P_n(z)| = -V^{\lambda}(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus S,$$

Асимптотика ОМ

- Orthogonal Polynomials $P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n})$:

$$\int P_n(z)\; z^k \;\exp\{n\,Q(z) + Q_0(z)\}\; dz = 0, \quad k = 0, \dots, n{-}1.$$

- Weight on $[-1, 1]$; Hermite weight; "varying" weight.
- Zero counting measure:

$$\nu_{P_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta(z - z_{k,n}) \xrightarrow{*} ? \qquad n \to \infty.$$

- Theorem [Gonchar-Rakhmanov, Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials, Mat. Sb., 1984, 125(167), 117–127]:

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|P_n(z)| = -V^{\lambda}(z), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus S,$$

"Переменные"веса и семейства равновесных мер

Family OP $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\int P_{n,N}(z) z^k W_N(z)\, d\lambda = 0, \quad k = 0, \ldots, n{-}1, \quad W_N(z) := e^{-NQ(z)}.$$

- x – mass of measure:

$$M_x^+ := \{\mu\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 0,\ S(\mu) \subset \mathbb{R},\ \int d\mu = x$$

- Family of equilibrium measures:

$$Q(z) \to \{\lambda_x\}_{x>0} \quad : \quad J(\lambda_x) = \inf_{\mu \in M_x^+} J(\mu)$$

- Asymptotics G-R $(n/N \to x) \quad \Rightarrow$

$$\nu_{n,N}(z) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} \delta(z - z_{j,n,N}), \qquad \nu_{n,N}(\lambda) \xrightarrow[\substack{n/N \to x \\ N \to \infty}]{*} \lambda_x(z)$$

"Переменные"веса и семейства равновесных мер

Family OP $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\int P_{n,N}(z) z^k W_N(z)\, d\lambda = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad W_N(z) := e^{-NQ(z)}.$$

- x – mass of measure:

$$M_x^+ := \{\mu\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 0,\ S(\mu) \subset \mathbb{R},\ \int d\mu = x$$

- Family of equilibrium measures:

$$Q(z) \to \{\lambda_x\}_{x>0} \quad : \quad J(\lambda_x) = \inf_{\mu \in M_x^+} J(\mu)$$

- Asymptotics G-R $(n/N \to x) \quad \Rightarrow$

$$\nu_{n,N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \delta(z - z_{j,n,N}), \qquad \nu_{n,N}(\lambda) \xrightarrow[\substack{n/N \to x \\ N \to \infty}]{*} \lambda_x(z)$$

"Переменные"веса и семейства равновесных мер

Family OP $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\int P_{n,N}(z) z^k W_N(z)\, d\lambda = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \quad W_N(z) := e^{-NQ(z)}.$$

- x – mass of measure:

$$M_x^+ := \{\mu\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 0,\ S(\mu) \subset \mathbb{R},\ \int d\mu = x$$

- Family of equilibrium measures:

$$Q(z) \to \{\lambda_x\}_{x>0} \quad : \quad J(\lambda_x) = \inf_{\mu \in M_x^+} J(\mu)$$

- Asymptotics G-R $(n/N \to x) \quad \Rightarrow$

$$\nu_{n,N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} \delta(z - z_{j,n,N}), \qquad \nu_{n,N}(\lambda) \xrightarrow[\substack{n/N \to x \\ N \to \infty}]{*} \lambda_x(z)$$

Семейство носителей равновесных мер $S(x)$

- V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, Families of equilibrium measures in an external field on the real axis, Sb. Math. 190 (1999), 791–802
- The family of supports $\{S_x\}_{x>0} : S_x := S(\tau_x)$
  - $$S_{x'} \subseteq S_x, \qquad x' \leq x.$$
  - $$\lambda_x(z) = \int_0^x \omega'_{S(x')}(z)\, dx',$$
    here $\omega'_{S(x)}(z)$ is density of the Roben distribution of the compact $S(x)$.

Семейство носителей равновесных мер $S(x)$

- V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, Families of equilibrium measures in an external field on the real axis, Sb. Math. 190 (1999), 791–802
- The family of supports $\{S_x\}_{x>0}$: $S_x := S(\tau_x)$
    - $$S_{x'} \subseteq S_x, \qquad x' \leq x.$$
    - $$\lambda_x(z) = \int_0^x \omega'_{S(x')}(z)\, dx',$$

      here $\omega'_{S(x)}(z)$ is density of the Roben distribution of the compact $S(x)$.

Семейство носителей равновесных мер $S(x)$

- V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, Families of equilibrium measures in an external field on the real axis, Sb. Math. 190 (1999), 791–802
- The family of supports $\{S_x\}_{x>0}$: $S_x := S(\tau_x)$
  - $$S_{x'} \subseteq S_x, \qquad x' \leq x.$$
  - $$\lambda_x(z) = \int_0^x \omega'_{S(x')}(z)\, dx',$$

    here $\omega'_{S(x)}(z)$ is density of the Roben distribution of the compact $S(x)$.

Семейство носителей равновесных мер $S(x)$

- V. S. Buyarov, E. A. Rakhmanov, Families of equilibrium measures in an external field on the real axis, Sb. Math. 190 (1999), 791–802
- The family of supports $\{S_x\}_{x>0}$: $S_x := S(\tau_x)$
  - $$S_{x'} \subseteq S_x, \qquad x' \leq x.$$
  - $$\lambda_x(z) = \int_0^x \omega'_{S(x')}(z)\, dx',$$

    here $\omega'_{S(x)}(z)$ is density of the Roben distribution of the compact $S(x)$.

$S(x) <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> Q(z)$

- $$S(x) \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_x(z) \quad \longleftrightarrow \quad Q(z)$$

- x – space variable and z – spectral variable !

$S(x) <---> Q(z)$

- $$S(x) \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_x(z) \quad \longleftrightarrow \quad Q(z)$$

- x – space variable and z – spectral variable !

Прямая задача: $S(x) \longrightarrow Q(z)$

Формула Буярова - Рахманова.

$$Q(z) = \int_0^\infty g_{S(x)}(z)\,dx,$$

Здесь $g_{S(x)}(z)$ функция Грина компакта $S(x)$.

Обратная задача: $S(x) <\!\!-\!\!-\!\!- Q(z)$

- Функционал Машкара - Саффа

$$F_{Q,x}(K) := -x \log \operatorname{cap}(K) + \int Q(z)\, d\omega_K(z).$$

- Вариационный принцип для решения обратной задачи:

$$F_{Q,x}(K) \geqslant F_{Q,x}(S(x)) = \gamma_Q\,.$$

Обратная задача: $S(x) <\!\!-\!\!-\!\!- Q(z)$

- Функционал Машкара - Саффа

$$F_{Q,x}(K) := -x \log \operatorname{cap}(K) + \int Q(z)\, d\omega_K(z).$$

- Вариационный принцип для решения обратной задачи:

$$F_{Q,x}(K) \geqslant F_{Q,x}(S(x)) = \gamma_Q\,.$$

Уравнение Хопфа, Бюрргерса(без вязкости), Навье-Стокса (1-D)

- $x \in \mathbb{R}_+ \quad t \in \mathbb{R}_+$:

$$b(x,0) > 0 \longrightarrow b(x,t) \ : \qquad b_t + b\, b_x \ = \ 0.$$

- Метод обратной задачи:

  1. $S(x) \ := [-b(x,0), b(x,0)] \longrightarrow Q(z,0);$

  2. $Q(z,t) \ = \ Q(z,0) \ + \ z^2 t\,;$

  3. $Q(z,t) \longrightarrow S(x,t) \ := [-b(x,t), b(x,t)].$

Уравнение Хопфа, Бюррrерса(без вязкости), Навье-Стокса (1-D)

- $x \in \mathbb{R}_+ \quad t \in \mathbb{R}_+$:

$$b(x,0) > 0 \longrightarrow b(x,t) \;:\qquad b_t + b\,b_x \;=\; 0.$$

- Метод обратной задачи:

1. $S(x) \;:=\; [-b(x,0),\, b(x,0)] \longrightarrow Q(z,0);$

2. $Q(z,t) \;=\; Q(z,0) \,+\, z^2 t\,;$

3. $Q(z,t) \longrightarrow S(x,t) \;:=\; [-b(x,t),\, b(x,t)].$

Уравнение Хопфа, Бюрргерса(без вязкости), Навье-Стокса (1-D)

- $x \in \mathbb{R}_+ \quad t \in \mathbb{R}_+$:

$$b(x,0) > 0 \longrightarrow b(x,t) \;:\qquad b_t + b\,b_x \;=\; 0.$$

- Метод обратной задачи:

1. $S(x) \;:=\; [-b(x,0),\, b(x,0)] \longrightarrow Q(z,0);$

2. $Q(z,t) \;=\; Q(z,0) \;+\; z^2 t\,;$

3. $Q(z,t) \longrightarrow S(x,t) \;:=\; [-b(x,t),\, b(x,t)].$

Уравнение Хопфа, Бюрргерса(без вязкости), Навье-Стокса (1-D)

- $x \in \mathbb{R}_+ \quad t \in \mathbb{R}_+$:

$$b(x,0) > 0 \longrightarrow b(x,t) \; : \qquad b_t + b\,b_x = 0.$$

- Метод обратной задачи:

1. $S(x) := [-b(x,0),\, b(x,0)] \longrightarrow Q(z,0);$

2. $Q(z,t) = Q(z,0) + z^2 t\,;$

3. $Q(z,t) \longrightarrow S(x,t) := [-b(x,t),\, b(x,t)].$

Уравнение Хопфа, Бюррггерса(без вязкости), Навье-Стокса (1-D)

- $x \in \mathbb{R}_+ \quad t \in \mathbb{R}_+$:

$$b(x,0) > 0 \longrightarrow b(x,t) \;:\qquad b_t + b\,b_x \;=\; 0.$$

- Метод обратной задачи:

1. $S(x) \;:=\; [-b(x,0),\, b(x,0)] \longrightarrow Q(z,0);$

2. $Q(z,t) \;=\; Q(z,0) \,+\, z^2 t\,;$

3. $Q(z,t) \longrightarrow S(x,t) \;:=\; [-b(x,t),\, b(x,t)].$

Вариационный принцип для гиперболического PDE

- $Q(z,t)$: $\quad S(x,t) := [-b(x,t),\, b(x,t)] \;\Rightarrow$
- Ф-л Машкара-Саффа $F_{Q,x}([-b,\, b])$
- Эволюция: $Q(z,t) = z^2 t + Q(z,0) \quad \Rightarrow$
- Вариационный принцип для $b(x,t)$: $\qquad b_t + b\, b_x = 0$:

$$-x \ln\frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}t + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2 - z^2}}\, d\lambda \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x.$$

- Для симм. сем-ва $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ ф-ла Б-Р:

$$Q(z) = \int_0^\infty \ln\left|\frac{z + \sqrt{\lambda^2 - b^2(x)}}{b(x)}\right| dx.$$

Вариационный принцип для гиперболического PDE

- $Q(z,t)$: $\quad S(x,t) := [-b(x,t),\, b(x,t)] \;\Rightarrow$
- Ф-л Машкара-Саффа $F_{Q,x}([-b,\, b])$
- Эволюция: $Q(z,t) = z^2 t + Q(z,0) \quad \Rightarrow$
- Вариационный принцип для $b(x,t)$: $\qquad b_t + b\, b_x = 0$:

$$-x \ln \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2} t + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} \frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2 - z^2}}\, d\lambda \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x.$$

- Для симм. сем-ва $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ ф-ла Б-Р:

$$Q(z) = \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{z + \sqrt{\lambda^2 - b^2(x)}}{b(x)} \right| dx.$$

Вариационный принцип для гиперболического PDE

- $Q(z,t)$: $\quad S(x,t) := [-b(x,t),\, b(x,t)] \;\Rightarrow$
- Ф-л Машкара-Саффа $F_{Q,x}([-b,\, b])$
- Эволюция: $Q(z,t) = z^2 t + Q(z,0) \quad \Rightarrow$
- Вариационный принцип для $b(x,t)$: $\qquad b_t + b\, b_x = 0$:

$$-x \ln \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2} t + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} \frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2 - z^2}}\, d\lambda \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x.$$

- Для симм. сем-ва $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ ф-ла Б-Р:

$$Q(z) = \int_0^\infty \ln \left| \frac{z + \sqrt{\lambda^2 - b^2(x)}}{b(x)} \right| dx.$$

Вариационный принцип для гиперболического PDE

- $Q(z,t)$: $\quad S(x,t) := [-b(x,t),\ b(x,t)] \ \Rightarrow$
- Ф-л Машкара-Саффа $F_{Q,x}([-b,\ b])$
- Эволюция: $Q(z,t) = z^2 t + Q(z,0) \quad \Rightarrow$
- Вариационный принцип для $b(x,t)$: $\qquad b_t + b\,b_x = 0$:

$$-x\ln\frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}t + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2-z^2}}\,d\lambda \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x.$$

- Для симм. сем-ва $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ ф-ла Б-Р:

$$Q(z) = \int_0^\infty \ln\left|\frac{z+\sqrt{\lambda^2-b^2(x)}}{b(x)}\right| dx.$$

Вариационный принцип для гиперболического PDE

- $Q(z,t)$: $S(x,t) := [-b(x,t),\, b(x,t)] \;\Rightarrow$
- Ф-л Машкара-Саффа $F_{Q,x}([-b,\, b])$
- Эволюция: $Q(z,t) = z^2 t + Q(z,0) \quad \Rightarrow$
- Вариационный принцип для $b(x,t)$: $\quad b_t + b\, b_x \;=\; 0$:

$$-x\ln\frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}t + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{b}\frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2-z^2}}\,d\lambda \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x.$$

- Для симм. сем-ва $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ ф-ла Б-Р:

$$Q(z) = \int\limits_0^\infty \ln\left|\frac{z+\sqrt{\lambda^2-b^2(x)}}{b(x)}\right| dx.$$

Разрывные решения (Ударные волны)

- Пример : $Q(z,0) := 3z^6 - 2z^4 + z^2$.

- Соотношения Гюгонио на разрыве.

Разрывные решения (Ударные волны)

- Пример : $Q(z, 0) := 3z^6 - 2z^4 + z^2$.

- Соотношения Гюгонио на разрыве.

Continuum Limit of the Toda Lattice

Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b \, \dfrac{\partial b}{\partial x} \, , \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2} \, \dfrac{\partial a}{\partial x} \, . \end{cases}$$

?

"Varying"рекуррентные коэффициенты

- Three-term recurrence relation

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- Varying recurrence coefficients

$$\{a_{n,N}, b_{n,N}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad b_{n,N} > 0\,,$$

- Example : $a(x)$, $b(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^+ \quad h := \frac{1}{N}$

$$a_{n,N} := a(nh) = a\left(\frac{n}{N}\right), \qquad b_{n,N} := b(nh) = b\left(\frac{n}{N}\right).$$

"Varying"рекуррентные коэффициенты

- Three-term recurrence relation

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- Varying recurrence coefficients

$$\{a_{n,N}, b_{n,N}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad b_{n,N} > 0\,,$$

- Example : $a(x)$, $b(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^+ \quad h := \frac{1}{N}$

$$a_{n,N} := a(nh) = a\left(\frac{n}{N}\right), \qquad b_{n,N} := b(nh) = b\left(\frac{n}{N}\right).$$

"Varying"рекуррентные коэффициенты

- Three-term recurrence relation

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b^2_{n,N}P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- Varying recurrence coefficients

$$\{a_{n,N}, b_{n,N}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad b_{n,N} > 0\,,$$

- Example : $a(x)$, $b(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^+ \quad h := \frac{1}{N}$

$$a_{n,N} := a(nh) = a\left(\frac{n}{N}\right), \qquad b_{n,N} := b(nh) = b\left(\frac{n}{N}\right).$$

Соотношение между пределами "Varying"веса и рек. коэф.

- Limit of varying weight

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z)^{1/N} =: W(z) =: e^{-Q(z)},$$

- Limit of varying recurrence coefficients

$$\lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} a_{n,N} =: a(x), \qquad \lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} b_{n,N} =: b(x).$$

- Relation between limits

$$\left\{\begin{matrix} a(x) \\ b(x) \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \{Q(z)\}.$$

- $S(x) = [\alpha(x), \beta(x)]$:

$$\alpha(x) = a(x) - 2b(x), \quad \beta(x) = a(x) + 2b(x)\,!$$

Соотношение между пределами "Varying"веса и рек. коэф.

- Limit of varying weight

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z)^{1/N} =: W(z) =: e^{-Q(z)} \,,$$

- Limit of varying recurrence coefficients

$$\lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} a_{n,N} =: a(x), \qquad \lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} b_{n,N} =: b(x).$$

- Relation between limits

$$\begin{Bmatrix} a(x) \\ b(x) \end{Bmatrix} \leftrightarrow \{Q(z)\}.$$

- $S(x) = [\alpha(x), \beta(x)]$:

$$\alpha(x) = a(x) - 2b(x), \quad \beta(x) = a(x) + 2b(x)\,!$$

Соотношение между пределами "Varying"веса и рек. коэф.

- Limit of varying weight

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z)^{1/N} =: W(z) =: e^{-Q(z)} \,,$$

- Limit of varying recurrence coefficients

$$\lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} a_{n,N} =: a(x), \qquad \lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} b_{n,N} =: b(x).$$

- Relation between limits

$$\left\{\begin{matrix} a(x) \\ b(x) \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \{Q(z)\}.$$

- $S(x) = [\alpha(x), \beta(x)]$:

$$\alpha(x) = a(x) - 2b(x), \quad \beta(x) = a(x) + 2b(x)\,!$$

Соотношение между пределами "Varying"веса и рек. коэф.

- Limit of varying weight

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z)^{1/N} =: W(z) =: e^{-Q(z)} \,,$$

- Limit of varying recurrence coefficients

$$\lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} a_{n,N} =: a(x), \qquad \lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} b_{n,N} =: b(x).$$

- Relation between limits

$$\left\{\begin{matrix} a(x) \\ b(x) \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \{Q(z)\}.$$

- $S(x) \;=\; [\alpha(x), \beta(x)]$:

$$\alpha(x) = a(x) - 2b(x), \quad \beta(x) = a(x) + 2b(x)\,!$$

Continuum Limit of the Toda Lattice

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\ , \\[2mm] \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\ . \end{cases}$$

- Discretization: $(h := \frac{1}{N}) \to a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N},\cdot\right),\ b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N},\cdot\right)$
- The Toda lattice $(T := Nt)$:

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b_{k,N}^2 - b_{k-1,N}^2), \\[2mm] \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \qquad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- $\lim_{N\to\infty, k/N\to x}\{a_{k,N}(Nt), b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t), b(x,t)\}$

Continuum Limit of the Toda Lattice

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b \, \dfrac{\partial b}{\partial x} \, , \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2} \, \dfrac{\partial a}{\partial x} \, . \end{cases}$$

- Discretization: $(h := \frac{1}{N}) \to a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$, $b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$
- The Toda lattice $(T := Nt)$:

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b_{k,N}^2 - b_{k-1,N}^2), \\[2ex] \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \qquad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- $\lim_{N\to\infty, k/N \to x} \{a_{k,N}(Nt), b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t), b(x,t)\}$

Continuum Limit of the Toda Lattice

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\,. \end{cases}$$

- Discretization: $(h := \frac{1}{N}) \to a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$, $b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$
- The Toda lattice $(T := Nt)$:

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b^2_{k,N} - b^2_{k-1,N}), \\ \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \qquad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- $\lim_{N\to\infty, k/N\to x}\{a_{k,N}(Nt), b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t), b(x,t)\}$

Continuum Limit of the Toda Lattice

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\,. \end{cases}$$

- Discretization: $(h := \frac{1}{N}) \to a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N},\cdot\right),\ b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N},\cdot\right)$
- The Toda lattice $(T := Nt)$:

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b_{k,N}^2 - b_{k-1,N}^2), \\ \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \qquad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

- $\lim_{N\to\infty,k/N\to x}\{a_{k,N}(Nt),\ b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t),\ b(x,t)\}$

Solution of the Toda equations

- $\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty} \to$

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- $W_N(\lambda, T) \quad : \quad \frac{dW_N}{dT} = -\lambda W_N$
- $\{a(x,t),\, b(x,t)\} \to$

$$\lim_{N\to\infty} W_N(\lambda, t)^{1/N} = W(\lambda, t) =: e^{-2Q(\lambda,t)}, \qquad (\, t := NT\,)$$

- $Q(z,t) = zt + Q(z,0)$

Solution of the Toda equations

- $\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty} \to$

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- $W_N(\lambda, T) \quad : \quad \frac{dW_N}{dT} = -\lambda W_N$
- $\{a(x,t),\, b(x,t)\} \to$

$$\lim_{N\to\infty} W_N(\lambda, t)^{1/N} = W(\lambda, t) =: e^{-2Q(\lambda,t)}, \qquad (\, t := NT\,)$$

- $Q(z,t) = zt + Q(z,0)$

Solution of the Toda equations

- $\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty} \to$

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- $W_N(\lambda, T) \quad : \quad \frac{dW_N}{dT} = -\lambda W_N$
- $\{a(x,t),\, b(x,t)\} \to$

$$\lim_{N\to\infty} W_N(\lambda, t)^{1/N} = W(\lambda, t) =: e^{-2Q(\lambda,t)}, \qquad (\, t := NT\,)$$

- $Q(z,t) = zt + Q(z,0)$

Solution of the Toda equations

- $\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty} \to$

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

- $W_N(\lambda, T) \quad : \quad \frac{dW_N}{dT} = -\lambda W_N$
- $\{a(x,t),\, b(x,t)\} \to$

$$\lim_{N\to\infty} W_N(\lambda, t)^{1/N} = W(\lambda, t) =: e^{-2Q(\lambda,t)}, \qquad (\, t := NT\,)$$

- $Q(z,t) = zt + Q(z,0)$

Регуляризации гиперболических систем

- Дисперсионная регуляризация Бюргерса —> KDV ур-е. Лакс-Левермор
- Дискретизация Хопфа —> "схемная вязкость".
- Дискретизация Хопфа —> "схемная дисперсия".
- Асимптотика ОМ с "varying"весами.

Регуляризации гиперболических систем

- Дисперсионная регуляризация Бюргерса —> KDV ур-е. Лакс-Левермор
- Дискретизация Хопфа —> "схемная вязкость".
- Дискретизация Хопфа —> "схемная дисперсия".
- Асимптотика ОМ с "varying"весами.

Регуляризации гиперболических систем

- Дисперсионная регуляризация Бюргерса —> KDV ур-е. Лакс-Левермор
- Дискретизация Хопфа —> "схемная вязкость".
- Дискретизация Хопфа —> "схемная дисперсия".
- Асимптотика ОМ с "varying"весами.

Регуляризации гиперболических систем

- Дисперсионная регуляризация Бюргерса —> KDV ур-е. Лакс-Левермор
- Дискретизация Хопфа —> "схемная вязкость".
- Дискретизация Хопфа —> "схемная дисперсия".
- Асимптотика ОМ с "varying"весами.

Многомерные обобщения

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\ , \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\ . \end{cases}$$

- 2-d generalizations : $\vec{a}(x,y,t)$, $\vec{b}(x,y,t) \in \mathbb{R}_2$, where $(x,y,t) \in \mathbb{R}_2^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \nabla |\vec{b}|^2, \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial t} = \dfrac{b_1}{2}\,\dfrac{\partial a_1}{\partial x}\ , \qquad \dfrac{\partial b_2}{\partial t} = \dfrac{b_2}{2}\,\dfrac{\partial a_2}{\partial y}\ . \end{cases}$$

Многомерные обобщения

- Cauchy problem : $a(x,t)$, $b(x,t)$, where $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\,. \end{cases}$$

- 2-d generalizations : $\vec{a}(x,y,t)$, $\vec{b}(x,y,t) \in \mathbb{R}_2$, where $(x,y,t) \in \mathbb{R}_2^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \nabla|\vec{b}|^2, \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial t} = \dfrac{b_1}{2}\,\dfrac{\partial a_1}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial b_2}{\partial t} = \dfrac{b_2}{2}\,\dfrac{\partial a_2}{\partial y}\,. \end{cases}$$

Совместно Ортогональные Многочлены

- Multiindex $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$, $|\vec{n}| := \sum n_j$.
- Multiple Orthogonal Polynomials $P_{\vec{n}}(z)$, $\deg P_{\vec{n}} = |\vec{n}|$:

$$\int P_{\vec{n}}(z)\, z^k \; d\mu_j(z) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1, \; j = 1, \ldots, d.$$

- Recurrence relations $(d+2)$ - order.
  (Along multidimensional stepline) —->

$$b_{\vec{n},j}\,, \; a_{\vec{n},j}\,, \quad j = 1, \ldots, d.$$

- Multidimensional generalization of the Toda lattice:
  $d\mu_j(z,t) := \exp(-tz) d\mu_j(z,0) \;\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{a}_{\vec{n},k} = \sum_{j=1}^{d} (b^2_{\vec{n},j} - b^2_{\vec{n}+e_k,j}), \quad k = 1, \ldots, d, \\ \dot{b}_{\vec{n},k} = \dfrac{b_{\vec{n},k}}{2} (a_{\vec{n}+e_k,k} - a_{\vec{n},k}), \quad k = 1, \ldots, d\,. \end{cases}$$

Совместно Ортогональные Многочлены

- Multiindex $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$, $|\vec{n}| := \sum n_j$.
- Multiple Orthogonal Polynomials $P_{\vec{n}}(z)$, $\deg P_{\vec{n}} = |\vec{n}|$:

$$\int P_{\vec{n}}(z)\, z^k \; d\mu_j(z) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1, \;\; j = 1, \ldots, d.$$

- Recurrence relations $(d+2)$ - order.
(Along multidimensional stepline) —->

$$b_{\vec{n},j}\,, \;\; a_{\vec{n},j}\,, \quad j = 1, \ldots, d.$$

- Multidimensional generalization of the Toda lattice:
$d\mu_j(z,t) := \exp(-tz) d\mu_j(z,0) \;\; \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{a}_{\vec{n},k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} (b^2_{\vec{n},j} - b^2_{\vec{n}+e_k,j}), & k = 1, \ldots, d, \\ \dot{b}_{\vec{n},k} = \dfrac{b_{\vec{n},k}}{2} (a_{\vec{n}+e_k,k} - a_{\vec{n},k}), & k = 1, \ldots, d\,. \end{cases}$$

Совместно Ортогональные Многочлены

- Multiindex $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$, $|\vec{n}| := \sum n_j$.
- Multiple Orthogonal Polynomials $P_{\vec{n}}(z)$, $\deg P_{\vec{n}} = |\vec{n}|$:

$$\int P_{\vec{n}}(z)\, z^k \; d\mu_j(z) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1, \;\; j = 1, \ldots, d.$$

- Recurrence relations $(d+2)$ - order.
  (Along multidimensional stepline) —->

$$b_{\vec{n},j}\,, \;\; a_{\vec{n},j}\,, \quad j = 1, \ldots, d.$$

- Multidimensional generalization of the Toda lattice:
  $d\mu_j(z,t) := \exp(-tz) d\mu_j(z,0) \;\; \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{a}_{\vec{n},k} = \sum_{j=1}^{d} (b^2_{\vec{n},j} - b^2_{\vec{n}+e_k,j}), & k = 1, \ldots, d, \\ \dot{b}_{\vec{n},k} = \dfrac{b_{\vec{n},k}}{2} (a_{\vec{n}+e_k,k} - a_{\vec{n},k}), & k = 1, \ldots, d\,. \end{cases}$$

Совместно Ортогональные Многочлены

- Multiindex $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$, $|\vec{n}| := \sum n_j$.
- Multiple Orthogonal Polynomials $P_{\vec{n}}(z)$, $\deg P_{\vec{n}} = |\vec{n}|$:

$$\int P_{\vec{n}}(z)\, z^k \; d\mu_j(z) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1, \;\; j = 1, \ldots, d.$$

- Recurrence relations $(d+2)$ - order.
  (Along multidimensional stepline) —->

$$b_{\vec{n},j}\,, \;\; a_{\vec{n},j}\,, \quad j = 1, \ldots, d.$$

- Multidimensional generalization of the Toda lattice:
  $d\mu_j(z,t) := \exp(-tz)d\mu_j(z,0) \;\; \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{a}_{\vec{n},k} = \sum_{j=1}^{d} (b^2_{\vec{n},j} - b^2_{\vec{n}+e_k,j}), \quad k = 1, \ldots, d, \\ \dot{b}_{\vec{n},k} = \dfrac{b_{\vec{n},k}}{2} (a_{\vec{n}+e_k,k} - a_{\vec{n},k}), \quad k = 1, \ldots, d\,. \end{cases}$$

С юбилеем!