МЕТОД КРОТОВА В ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Оптимизация и нелинейный анализ

18 апреля 2024 года

Царьков К.А.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная нестационарная система с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $u(k) \in U(k)$ – управление, $U(k)$ – непустые выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^n$, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – произвольные заданные матрицы, $N \geq 0$ – некоторое фиксированное значение дискретного времени. Начальное условие для системы (1) задано:

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Для системы (1) – (2) ставится задача

$$J(x(N)) = \|x(N)\|^2 \to \min_{u \in \mathcal{U}}, \tag{3}$$

где $\mathcal{U} := \{k \mapsto u(k) : \{0, \dots, N-1\} \to \mathbb{R}^n \mid u(k) \in U(k)\}$.

Для оптимальности управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$ в задаче (1) – (3) необходимо и достаточно потребовать выполнения N условий максимума

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \max_{v \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle, \tag{4}$$

при $k = 0, \ldots, N-1$, где значения двойственной переменной $\hat{\psi}(k)$ однозначно определяются формулами

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0, \tag{5}$$

$$\hat{\psi}(k) = A(k)^{\mathrm{T}} \hat{\psi}(k+1), \quad \hat{\psi}(N) = -2\hat{x}(N). \tag{6}$$

Отметим, что в случае $J(\hat{x}(N)) = \|\hat{x}(N)\|^2 = 0$ управление $\hat{u}$ является особым.

Рассмотрим расширенную систему уравнений

$$x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),$$

$$X(k+1) = A(k)X(k)A(k)^{\mathrm{T}} + A(k)x(k)u(k)^{\mathrm{T}} + u(k)x(k)^{\mathrm{T}}A(k)^{\mathrm{T}} + u(k)u(k)^{\mathrm{T}}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad X(0) = x_0 x_0^{\mathrm{T}}$$

и задачу

$$\mathcal{J}(X(N)) = \mathrm{tr}[X(N)] \to \min_{u \in \mathcal{U}}. \qquad (7)$$

По построению $\mathcal{J}(X(N)) = \mathcal{J}(x(N)x(N)^{\mathrm{T}}) = J(x(N))$.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧИ

Для оптимальности управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$ в задаче (7) необходимо выполнение при $k = 0, \ldots, N-1$ условий максимума

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \max_{v \in U(k)} H(k, \hat{x}(k), \hat{X}(k), \hat{\psi}(k+1), \hat{\Psi}(k+1), v),$$

где

$$H(k, x, X, \psi, \Psi, u) = \\ = \langle \psi, A(k)x + u \rangle + \operatorname{tr}\left[\Psi\left(A(k)XA(k)^{\mathrm{T}} + A(k)xu^{\mathrm{T}} + ux^{\mathrm{T}}A(k)^{\mathrm{T}} + uu^{\mathrm{T}}\right)\right],$$

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$\hat{X}(k+1) = A(k)\hat{X}(k)A(k)^{\mathrm{T}} + A(k)\hat{x}(k)\hat{u}(k)^{\mathrm{T}} + \hat{u}(k)\hat{x}(k)^{\mathrm{T}}A(k)^{\mathrm{T}} + \hat{u}(k)\hat{u}(k)^{\mathrm{T}}, \\ \hat{X}(0) = x_0 x_0^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\psi}(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\hat{\psi}(k+1) + 2A(k)^{\mathrm{T}}\hat{\Psi}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\psi}(N) = 0,$$
$$\hat{\Psi}(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\hat{\Psi}(k+1)A(k), \quad \hat{\Psi}(N) = -I.$$

Здесь I – единичная матрица.

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ИСХОДНОЙ ЗАДАЧЕ

Для оптимальности управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$ в задаче (1) – (3) необходимо выполнение при $k = 0, \ldots, N-1$ условий минимума

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{v \in U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)v + \mathcal{A}(k)\hat{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\|, \tag{8}$$

где $\mathcal{A}(k) = A(N-1) \ldots A(k)$, а значения $\hat{x}(k)$ и $\hat{\xi}(k)$ определяются равенствами

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0, \tag{9}$$

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \mathcal{A}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(N) = 0. \tag{10}$$

Классический принцип максимума

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \max_{v \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle,$$

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$\hat{\psi}(k) = A(k)^{\mathrm{T}} \hat{\psi}(k+1), \quad \hat{\psi}(N) = -2\hat{x}(N)$$

Принцип максимума для эквивалентной задачи

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{v \in U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)v + \mathcal{A}(k)\hat{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\|,$$

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \mathcal{A}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(N) = 0$$

Теорема. *Пусть* $\hat{u} \in \mathcal{U}$ *– произвольное управление и значения* $\hat{x}(k)$ *найдены из*

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0.$$

Пусть также значения $\hat{\psi}(k)$, $\hat{\xi}(k)$ *определены соответственно формулами*

$$\hat{\psi}(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\hat{\psi}(k+1), \quad \hat{\psi}(N) = -2\hat{x}(N),$$

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \mathcal{A}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(N) = 0.$$

Тогда при каждом $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ *условия*

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg}\max_{v \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle,$$

$$\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg}\min_{v \in U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)v + \mathcal{A}(k)\hat{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\|$$

выполняются или не выполняются одновременно.

Схема доказательства

Лемма. *В предположениях теоремы при каждом* $k \in \{0, \dots, N\}$ *имеет место равенство*

$$\hat{\psi}(k) = 2\mathcal{A}(k)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\xi}(k) - \mathcal{A}(k)\hat{x}(k) \right).$$

В силу леммы достаточно установить эквивалентность следующих двух условий:

1. $\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{v \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle;$
2. $\hat{u}(k) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{v \in U(k)} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), v \rangle - \|\mathcal{A}(k+1)(\hat{u}(k) - v)\|^2 \right).$

Последнее вытекает из выпуклости множеств $U(k)$.

Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ – некоторое произвольное управление. Зафиксируем значения $\hat{\xi}(k)$:

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \mathcal{A}(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(N) = 0.$$

Построим новое управление $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее при $k = 0, \ldots, N-1$ условиям

$$\tilde{u}(k) \in \operatorname{Arg} \min_{v \in U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)v + \mathcal{A}(k)\tilde{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\|,$$

где значения $\tilde{x}(k)$ последовательно определяются равенствами

$$\tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + \tilde{u}(k), \quad \tilde{x}(0) = x_0.$$

Тогда имеет место следующее:

- $J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N))$;
- $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N)) \Leftrightarrow \hat{u}$ – оптимальное управление в задаче (1) – (3).

Рассмотрим систему

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad k = 0, 1, 2, \quad x(0) = x_0 \in (2; 3]$$

с ограничением на управление $|u(k)| \le 1$ и задачу

$$J = x(3)^2 \to \min_{u \in \mathcal{U}}, \quad \mathcal{U} = \{u : u(k) \in [-1; 1]\}.$$

Положим $\hat{u}(k) \equiv 0$. Тогда

$$\hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\xi}(k) \equiv 0$$

и новое управление $\tilde{u}$ имеет вид:

$$\tilde{u}(0) = \arg \min_{v \in [-1;1]} |v + x_0| \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(0) = -1,$$

$$\tilde{x}(1) = x_0 + \tilde{u}(0) = x_0 - 1 \in (1; 2],$$

$$\tilde{u}(1) = \arg \min_{v \in [-1;1]} |v + \tilde{x}(1)| \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(1) = -1,$$

$$\tilde{x}(2) = \tilde{x}(1) + \tilde{u}(1) = x_0 - 2 \in (0; 1],$$

$$\tilde{u}(2) = \arg \min_{v \in [-1;1]} |v + \tilde{x}(2)| \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(2) = -\tilde{x}(2) = 2 - x_0,$$

$$\tilde{x}(3) = \tilde{x}(2) + \tilde{u}(2) = 0.$$

Классический принцип максимума

$$\hat{x}(k+1) \in \operatorname{Arg} \min_{z \in A(k)\hat{x}(k)+U(k)} \langle \hat{x}(N), \mathcal{A}(k+1)z \rangle, \quad \hat{x}(0) = x_0$$

Принцип максимума для эквивалентной задачи

$$\hat{x}(k+1) \in \operatorname{Arg} \min_{z \in A(k)\hat{x}(k)+U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)(z - \hat{x}(k+1)) + \hat{x}(N)\|, \quad \hat{x}(0) = x_0$$

Метод Кротова

$$\tilde{x}(k+1) \in \operatorname{Arg} \min_{z \in A(k)\tilde{x}(k)+U(k)} \|\mathcal{A}(k+1)(z - \hat{x}(k+1)) + \hat{x}(N)\|, \quad \tilde{x}(0) = x_0$$

- $J(\tilde{x}(N)) \leq J(\hat{x}(N))$ для любой допустимой траектории $\hat{x}$;
- $J(\tilde{x}(N)) = J(\hat{x}(N)) \Leftrightarrow \hat{x}$ – оптимальная траектория;
- $\hat{u}(k) = \hat{x}(k+1) - A(k)\hat{x}(k)$, $\tilde{u}(k) = \tilde{x}(k+1) - A(k)\tilde{x}(k)$.