

Отдел теории чисел: штрихи к групповому портрету

С.В. Конягин, М.А. Королёв

(доклад на конференции «МИАН-90» 13 мая 2024 года)

§1. Введение.

Желая хотя бы вкратце рассказать о деятельности отдела теории чисел Математического института за сорок лет, прошедшие с его полувекового юбилея, мы оказались перед непростой задачей. За минувшие годы в числе сотрудников отдела перебивало много выдающихся учёных, яркие и глубокие результаты которых заслужили мировое признание. Связанные узкими временными рамками доклада, мы должны были выбрать из этой драгоценной россыпи несколько теорем, в которых, как свет в капле воды, отразилась бы вся многообразная научная деятельность нашего отдела.



А.А. Карацуба (1966 г.)



С.М. Воронин (1969 г.)

Сделанный нами выбор, конечно, субъективен. Насколько он удачен - судить вам. Но мы будем считать свою задачу выполненной, если наш краткий рассказ заронит зёрнышки интереса к аналитической теории чисел среди слушателей. В первую очередь это касается наших молодых коллег - тех, для кого имена Ивана Матвеевича

Виноградова, Анатолия Алексеевича Карацубы, Сергея Михайловича Воронина, Геннадия Ивановича Архипова, Алексея Георгиевича Постникова и других, здесь не названных, стали уже историей.

В итоге мы остановили свой выбор на четырёх результатах, два из которых принадлежат профессору Анатолию Алексеевичу Карацубе (1937-2008), возглавлявшему наш отдел с 1984 по 2008 годы, и ещё два - его ученику, профессору Сергею Михайловичу Воронину (1946-1997). Следует отметить, что слово «результат» в данном случае следует понимать расширительно, не как доказательство того или иного изолированного утверждения, а как создание нового метода в теории чисел, который позволил получить продвижения в целом ряде открытых проблем.

§2. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна

Ключевой объект исследования в аналитической теории чисел - дзета-функция Римана $\zeta(s)$ - определяется в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ как сумма бесконечного ряда:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

В той же области дзета-функция удовлетворяет тождеству Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

(здесь p пробегает все подряд идущие простые числа). Дзета-функция мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \text{где} \quad \xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Она имеет простые нули в точках $s = -2, -4, -6, \dots$, а также бесконечно много комплексных нулей $\varrho = \beta + i\gamma$, которые лежат в так называемой «критической полосе»

$$0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1.$$

Для целого ряда вопросов теории чисел принципиально важно знать, как именно распределены в критической полосе нули ϱ . Например, для известной функции Чебышёва $\psi(x)$,

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p + \sum_{p \leq \sqrt[3]{x}} \ln p + \dots$$

играющей важную роль в теории распределения простых чисел, справедлива следующая «явная формула»:

$$\psi(x) = x - \sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)},$$

в которой ρ пробегает всё множество комплексных нулей $\zeta(s)$.

Риманом было высказано предположение о том, что все нули $\rho = \beta + i\gamma$ лежат на так называемой «критической прямой» $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Эта проблема, включённая в список «задач тысячелетия», остаётся нерешённой по сей день. В то же время за более чем полтора столетия, которые прошли со времени появления эпохального мемуара Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» (1859) наши знания о нулях дзета-функции стали существенно богаче.

Пусть $N(T)$ - число нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике критической полосы

$$0 < \operatorname{Re} s < 1, \quad 0 < \operatorname{Im} s \leq T.$$

Ещё Риману было известно соотношение

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}, \quad T \rightarrow +\infty.$$

Если обозначить через $N_0(T)$ число нулей $\zeta(s)$, лежащих на отрезке критической прямой $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT]$, то классическая теорема Атле Сельберга (1942) утверждает, что

$$N_0(T) \geq c \cdot N(T)$$

для некоторой положительной постоянной c . Допуская известную вольность речи, можно сказать, что гипотеза Римана верна для «положительной доли» нулей $\zeta(s)$ (в настоящее время эта доля доведена до значения $c = 5/12 = 0.4166\dots$).

Доказательство Сельберга существенно опирается на наличие у дзета-функции эйлеровского произведения, а также на следующее простое соображение: если вещественная функция $\varphi(u)$ непрерывна на отрезке $[t, t+h]$ и удовлетворяет неравенству

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(u) du \right| < \int_t^{t+h} |\varphi(u)| du,$$

то $\varphi(u)$ имеет на таком отрезке по крайней мере один нуль нечётного порядка.

Чтобы «нащупать» причины, по которым гипотеза Римана должна быть верной, математики стали изучать классы функций, во многом похожих на $\zeta(s)$, но имеющих от неё и некоторые отличия. В числе наиболее «близких» к дзета-функции Римана - так называемые L -функции Дирихле:

$$L(s; \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \chi - \text{характер Дирихле по модулю } q.$$

Каждая из них разлагается в эйлеровское произведение и удовлетворяет функциональному уравнению «риманова типа». По всей видимости, для всех функций $L(s; \chi)$ справедлив аналог гипотезы Римана.

В 1936 г. Гарольд Дзвенпорт и Ханс Хейльбронн обнаружили класс функций, во многом похожих на $\zeta(s)$, для которых гипотеза Римана заведомо неверна. Следуя

их работам, Эдвард Титчмарш рассмотрел следующую линейную комбинацию L -функций Дирихле:

$$g(s) = c_1 L(s; \chi_1) + c_2 L(s; \chi_2).$$

Здесь χ_1 - неглавный характер Дирихле по модулю 5, такой, что

$$\chi_1(1) = 1, \quad \chi_1(2) = i, \quad \chi_1(3) = -i, \quad \chi_1(4) = -1, \quad \chi_1(5) = 0, \quad \chi_1(n+5) = \chi_1(n),$$

$\chi_2 = \bar{\chi}_1$ - сопряжённый ему характер, а постоянные c_1 и $c_2 = \bar{c}_1$ подобраны так, чтобы $g(s)$ удовлетворяла функциональному уравнению риманова типа

$$\xi_1(s) = \xi_1(1-s), \quad \xi_1(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) g(s).$$

По традиции, за $g(s)$ закрепилось не вполне корректное с исторической точки зрения название «функции Дэвенпорта-Хейльбронна». Оказывается, что $g(s)$ имеет бесконечно много нулей в области абсолютной сходимости своего ряда Дирихле, т.е. в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Что же отличает функцию Дэвенпорта-Хейльбронна от $\zeta(s)$? Существенным отличием является то, что $g(s)$ не обладает эйлеровским произведением.

Если $N^*(T)$ - число нулей $g(s)$, ордината которых не превосходит T , то

$$N^*(T) \sim \frac{T}{2\pi} \ln T, \quad T \rightarrow +\infty.$$

Но что можно сказать о нулях $g(s)$, лежащих на критической прямой? Даже если гипотеза Римана верна для каждого из слагаемых $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$, она ничего не позволяет сказать о нулях их линейной комбинации. Тем не менее оказывается, что прямая $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ остаётся «исключительным множеством» и для $g(s)$. Так, С.М. Воронин доказал, что на отрезке $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT]$ функция Дэвенпорта-Хейльбронна имеет не менее

$$T \cdot f(T), \quad f(T) = \exp\left(\frac{1}{40} \sqrt{\ln \ln \ln \ln T}\right) \quad \text{нулей.}$$

Заменить в этой оценке множитель при T (растущий крайне медленно) другой функцией, скажем, степенью логарифма, казалось непосильной задачей: рассуждения Сельберга в чистом виде здесь не годились, поскольку для них существенным было наличие у дзета-функции эйлеровского произведения, которым $g(s)$ не обладает.

Тем не менее, Анатолий Алексеевич нашёл выход из положения и доказал соответствующий результат с $f(T) = (\ln T)^{0.5-\varepsilon}$, где ε сколь угодно мало. Одним из двух ключевых соображений стало следующее замечательное наблюдение. Хотя у $g(s)$ нет эйлеровского произведения, у эйлеровских произведений слагаемых линейной

комбинации

$$L(s, \chi_1) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 2 \pmod{5}} \left(1 - \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \\ \times \prod_{p \equiv 3 \pmod{5}} \left(1 + \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 4 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

$$L(s, \chi_2) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 2 \pmod{5}} \left(1 + \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \\ \times \prod_{p \equiv 3 \pmod{5}} \left(1 - \frac{i}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 4 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

имеется общий множитель

$$\prod_{p \equiv 1 \pmod{5}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \equiv 4 \pmod{5}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

В него попадает асимптотически половина всех простых чисел, и именно этим объясняется появление в степени логарифма показателя 0.5. Именно это обстоятельство - наличие общего множителя - позволило применить в этой задаче рассуждения, аналогичные тем, что использовал Сельберг.

Другим ключевым соображением явилась идея изучать интегралы

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(u) du \right|^\alpha, \quad \left(\int_t^{t+h} |\varphi(u)| du \right)^\alpha, \quad 0 < t < T$$

(где вещественная функция $\varphi(u)$ некоторым образом связана с $g(0.5 + iu)$) при очень малых $\alpha = \alpha(T) \rightarrow 0$.

Этот результат произвёл сенсацию в теории чисел. Он стал темой доклада Анатолия Алексеевича на международной конференции в Амальфи (Италия, сентябрь 1989). Интересно отметить, что первую статью с доказательством этой теоремы Анатолий Алексеевич начал писать летом 1989 г. на Памире, на поляне Москвина во время очередного восхождения в горы. Теорема А.А. Карацубы о нулях функции Дэвенпорта-Хейльбронна стимулировала интерес к этой тематике и послужила отправной точкой для целого ряда работ как в нашей стране, так и за рубежом.

§3. Оценки коротких сумм Клоостермана

Второй результат, о котором мы бы хотели упомянуть, также принадлежит Анатолию Алексеевичу. В этом разделе речь пойдёт о созданном им методе оценок коротких тригонометрических сумм специального вида.

Пусть $q \geq 3$ - целое число. Для целого n , взаимно простого с q , через n^* станем обозначать обратный вычет по модулю q :

$$nn^* \equiv 1 \pmod{q}.$$

В 1920-е г. датский математик Хендрик Дауве Клоостерман, исследуя количество представлений натурального числа квадратичной формой

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2, \quad \text{где } A, B, C, D \geq 1 - \text{целые,}$$

пришёл к задаче оценки тригонометрических сумм вида

$$S = S(q; N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ (n, q) = 1}} \exp\left(\frac{2\pi i}{q}(an^* + bn)\right),$$

где a, b - целые числа, $(a, q) = 1$, $1 < N \leq q$. Такая сумма называется полной, если $N = q$, и неполной, если $1 < N < q$.

Тривиальной оценкой S служит число слагаемых: $|S| \leq N$. Что можно сказать о нетривиальных оценках S ? Во-первых, оценки неполных можно выводить (с некоторой потерей точности) из оценок полных сумм. Во-вторых, «самым сложным» является случай, когда модуль q - простое число: $q = p$. Клоостерман показал, что

$$\left| \sum_{n=1}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(an^* + bn)\right) \right| \leq 3^{1/4} p^{3/4}.$$

Этот результат даёт возможность нетривиально оценить в общем случае неполную сумму $S(q; N)$ при числе слагаемых

$$q^{3/4+\varepsilon} \ll N \leq q.$$

Оценка Клоостермана впоследствии уточнялась. Знаменательной вехой на этом пути явилась классическая работа Андре Вейля (1948), следствием которой стала, в частности, неулучшаемая оценка полной суммы

$$\left| \sum_{n=1}^{p-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(an^* + bn)\right) \right| \leq 2\sqrt{p}.$$

Она дала возможность оценивать неполные суммы Клоостермана с числом слагаемых $N \geq q^{1/2+\varepsilon}$. Однако при $N \leq \sqrt{q}$ к оценке неполной суммы $S(q; N)$ в общем случае не было никаких подходов.

В 1993 г. А.А. Карацуба создал новый метод, который позволил улавливать осцилляцию в суммах фантастически малой длины, а именно уже при $N \asymp q^\varepsilon$, где

$\varepsilon > 0$ - сколь угодно малая постоянная. Более того, развитие метода Карацубы позволило получать нетривиальные оценки таких сумм и в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon(q) \rightarrow 0$ при возрастании q , например, при

$$N \asymp \exp \{ (\ln q)^\alpha \}, \quad \text{где} \quad \frac{2}{3} < \alpha < 1.$$

В основе метода Карацубы лежало следующее наблюдение. Рассмотрим симметричное сравнение

$$n_1^* + n_2^* + \dots + n_k^* \equiv n_{k+1}^* + n_{k+2}^* + \dots + n_{2k}^* \pmod{q},$$

где переменные n_j принимают значения из промежутка $(N, 2N]$. Если обозначить через $J_q(N)$ число его решений, то очевидны неравенства

$$N^k \leq J_q(N) \leq N^{2k-1}.$$

Оказывается, если N достаточно мало по сравнению с q , скажем, $N \leq \frac{1}{4}q^{1/(2k-1)}$, такое сравнение имеет «мало» решений:

$$J_q(N) \leq c(k)N^k(\ln N)^{4k^2}.$$

С другой стороны, равенство

$$\frac{1}{q} \sum_{a=1}^q \exp \left(\frac{2\pi i a m}{q} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

позволяет записать $J_q(N)$ как

$$\frac{1}{q} \sum_{a=1}^q \sum_{N < n_1, \dots, n_{2k} \leq 2N} \exp \left(\frac{2\pi i a}{q} (n_1^* + \dots - n_{2k}^*) \right) = \frac{1}{q} \sum_{a=1}^q \left| \sum_{N < n \leq 2N} \exp \left(\frac{2\pi i a n^*}{q} \right) \right|^{2k},$$

т.е. как среднее значение $2k$ -й степени модуля короткой суммы Клоостермана.

Почётное место в научном творчестве Анатолия Алексеевича занимала другая теорема о среднем - теорема И.М. Виноградова об оценке $J_{k,r}(P)$ числа решений системы диофантовых уравнений

$$x_1^s + x_2^s + \dots + x_k^s = y_1^s + y_2^s + \dots + y_r^s, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad 0 < x_j, y_j \leq P.$$

Одним из её следствий является оценка т.н. «дзетовой суммы»

$$\sum_{N < n \leq 2N} n^{it}$$

и современная граница нулей дзета-функции Римана:

$$\zeta(\beta + i\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \leq 1 - \frac{c}{(\ln |\gamma|)^{2/3+\varepsilon}}.$$

Блестяще владея соответствующей техникой, А.А. Карацуба вывел из своей теоремы о среднем оценку

$$\left| \sum_{n \leq N} \exp \left(\frac{2\pi i}{p} (an^* + bn) \right) \right| \ll \frac{N}{(\ln p)^c},$$

справедливую уже при $N \asymp p^\varepsilon$. Постоянная c изначально зависела от ε и была очень маленькой. Отметим, что метод Карацубы в принципе не может дать в такой задаче понижения лучшего, чем $(\ln p)^{-1}$. Тем не менее, этот метод сразу нашёл широкое применение в различных задачах аналитической теории чисел. В их числе - распределение величин $an^* + bn$ в полной системе вычетов по модулю q , когда n пробегает короткий промежуток, уточнение неравенства Бруна-Титчмарша, распределение бесквадратных чисел в арифметических прогрессиях, распределение простых в «редких» последовательностях и пр.

§4. Теоремы Воронина о дифференциальной независимости и универсальности дзета-функции

Упомянутую выше гипотезу Римана о нулях дзета-функции можно рассмотреть в несколько ином, более общем контексте, а именно: как распределены значения $\zeta(s)$ при изменении переменной $s = \sigma + it$ в некоторой области на комплексной плоскости? Первым, кто стал рассматривать подобные задачи, был, по-видимому, датский математик и футболист Харальд Бор, брат известного физика. Ему принадлежит, в частности, следующее утверждение (1914): пусть $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ - произвольное фиксированное число. Тогда кривая $\gamma(t) = \zeta(\sigma + it)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ всюду плотна в $\mathbb{C}$.

С.М. Воронин в своей кандидатской диссертации, защищённой в МИАН в 1972 г., доказал гораздо более общий результат: при любом $n \geq 2$ кривая

$$V(t) = (\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \zeta''(\sigma + it), \dots, \zeta^{(n-1)}(\sigma + it)), \quad -\infty < t < +\infty$$

всюду плотна в $\mathbb{C}^n$. Его следствием явилась замечательная теорема о дифференциальной независимости дзета-функции. Именно, $\zeta(s)$ не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению вида

$$s^m F_m(y, y', \dots, y^{(n-1)}) + \dots + F_0(y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad y = y(s),$$

где $F_0, \dots, F_m$ - непрерывные на $\mathbb{C}^n$ функции, не все тождественно равные нулю.

Другой вершиной творчества Сергея Михайловича стало открытие им «свойства универсальности». Оно выражается в том, что любую аналитическую функцию из достаточно широкого класса можно с любой степенью точности приблизить «вертикальными сдвигами» $\zeta(s)$. Строгая формулировка теоремы Воронина такова:

Пусть $F(s)$ - произвольная аналитическая функция в области $|s| < r < \frac{1}{4}$. Если $F(s)$ непрерывна вплоть до границы круга $|s| \leq r$ и не имеет внутри круга нулей,

то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $t > 0$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} |F(s) - \zeta(s + \frac{3}{4} + it)| < \varepsilon.$$

Этот результат вошёл в докторскую диссертацию Сергея Михайловича «Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов», которую он защитил в Математическом институте 20 октября 1977 года. Оба утверждения были перенесены С.М. Ворониным и его многочисленными последователями на широкие классы функций и обобщены в разных направлениях. Эти теоремы получили широкий резонанс и стали отправной точкой для целой серии работ. Исследования, связанные с универсальностью дзета-функции и её многочисленных обобщений, активно продолжаются и в настоящее время.