Конференция МИАН-90

Отдел комплексного анализа

Е. М. Чирка, С. П. Суетин

13 мая 2024 г.

1. Отдел комплексного анализа

образован в 1964 г. как отдел ТФКП, нынешнее название – с 2002 г.

Заведующие отделом:

Мергелян Сергей Никитович (1964 – 1972 гг.)

Гончар Андрей Александрович (1972 – 2002 гг.)

Чирка Евгений Михайлович – с 2002 г.

Сотрудники отдела:

Буслаев Виктор Иванович – с 1975 г.

Комлов Александр Владимирович – с 2011 г.

Кружилин Николай Георгиевич – с 1984 г.

Немировский Стефан Юрьевич – с 1999 г.

Оревков Степан Юрьевич – с 1998 г.

Сергеев Армен Глебович – с 2015 г.

Суетин Сергей Павлович – с 1982 г.

Чирка Евгений Михайлович – с 1971 г.

Семинары:

Семинар Гончара (совместно с ИПМ, А. И. Аптекарев)

Семинар Витушкина (совместно и в МГУ, В. К. Белошапка)

Комплексные задачи мат.физики (А. Г. Сергеев, А. В. Домрин)

2. Равновесие во внешнем поле, 1/9-problem

Задача Ричарда Варги (1969)
Скорость рациональной аппроксимации e^{-x} на $[0,+\infty)$?
("Varga's Constant" или "One-Ninth Constant" или "Halphen Constant" (1886))

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов (1986), ICM 1986

(1) $$\rho_n := \inf_{r_n=p_n/q_n,\deg r_n\leqslant n} \|e^{-x}-r_n(x)\|_{[0,+\infty)} \ \Rightarrow\ \exists \lim_{n\to\infty} \rho_n^{1/n} = v,$$

где $v = 1/9{,}2802549192081\ldots$ – единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v^n = \frac{1}{8}, \quad a_n = \Bigl|\sum_{d|n}(-1)^d d\Bigr|.$$

(2) Решение 1/9-problem $\Longrightarrow$ задача равновесия с внешним полем $\Longrightarrow$ GRS-**метод (Гончара–Рахманова–Штaля)**
(3) Nuclear Engineering $\Longrightarrow$ Burnup equation $\Longrightarrow$ Burnup Calculations $\Longrightarrow$ **Matrix exponential methods**

3. Аппроксимации Паде

Аппроксимации Паде $[n/n]_f(z)$ ряда $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k/z^k$ в $z = \infty$ определяются условием

$$(f - [n/n]_f)(z) = O\Big(\frac{1}{z^{2n+1}}\Big)$$

$[n/n]_f$ рационально (=конструктивно) зависит от z и $c_0, \dots, c_{2n}$

Теория Герберта Шталя (1985–1986)

$[n/n]_f$ при $n \to \infty$ восстанавливают аналитическую функцию по ее ростку в бесконечности на дополнении к компакту Шталя на "нулевом" листе её римановой поверхности.

В. И. Буслаев (цикл работ 2013–2021 гг.)

Теория Шталя для многоточечных аппроксимаций Паде: Обобщение GRS-метода, понятие "взвешенного" компакта Шталя, сходимость вне этого компакта.

4. Аппроксимации Эрмита–Паде

Гипотеза Джона Наттолла (1984)
Риманова поверхность алгебраической функции степени $m+1$ имеет естественное разбиение на $m+1$ лист, причем множество $\mathfrak{D} \ni \infty^{(0)}$ – дополнение к самому “верхнему” листу – открыто и связно.

Е. Чирка, А. Комлов, Р. Пальвелев, С. Суетин (2017)
Множество Наттолла $\mathfrak{D} \ni \infty^{(0)}$ действительно область.
Для $m = 2$ рациональные аппроксимации Эрмита–Паде для пары $f_{\infty^{(0)}}, f^2_{\infty^{(0)}}$ восстанавливают $f(z)$ в области Наттолла.

А. В. Комлов (2021)
Для произвольного $m \geqslant 2$ обобщенные рациональные аппроксимации Эрмита–Паде для набора $f_{\infty^{(0)}}, f^2_{\infty^{(0)}}, \ldots, f^m_{\infty^{(0)}}$ восстанавливают $f(z)$ в области Наттолла (т.е. на первых m листах).

5. Полиномиальные и рациональные приближения в $\mathbb{C}^n$

Задача Эвы Каллин (1964)
Является ли полиномиально выпуклым объединение четырёх замкнутых непересекающихся шаров в $\mathbb{C}^2$?

Ответа нет до сих пор.

Открытым оставался и вопрос о рациональной выпуклости $\geqslant 4$ шаров в $\mathbb{C}^n$.

С. Ю. Немировский (2008)
Объединение произвольного конечного набора попарно непересекающихся замкнутых шаров в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, является рационально выпуклым компактом.

Короткое доказательство (краткое сообщение в УМН) основано на глубокой характеристике рационально выпуклых компактов в терминах симплектической и комплексной геометрии, данной Жюльеном Дювалем и Нессимом Сибони (1995).

6. Гипотеза о якобиане

Гипотеза о якобиане
Полиномиальное отображение $\mathbb{C}^2$ в себя с ненулевым постоянным якобианом обратимо.

Сформулирована в 1939 г. Отт-Хайнрихом Келлером как "трудный открытый вопрос". С 1955 до конца 60-х гг. считалась доказанной.

А. Г. Витушкин (1971)
Указал ошибку в доказательстве и построил пример разветвлённого трёхлистного накрытия $X \to \mathbb{R}^4$, множество ветвления которого гомеоморфно $\mathbb{R}^2$, а его дополнение в X гомеоморфно $\mathbb{R}^4$ ($\Longrightarrow$ **контрпример** к попыткам топологического доказательства ГЯ).

"Гипотеза о якобиане на бесконечности"
Пусть U – неособая комплексная поверхность, L – вложенная в неё проективная прямая с индексом самопересечения $+1$ и $f : U \setminus L \to \mathbb{C}^2$ – голоморфное отображение с ненулевым якобианом, заданное двумя функциями, мероморфными в U. Тогда f инъективно.

С. Ю. Оревков (1990, 2001)
Серия контрпримеров к гипотезе о якобиане на бесконечности.

7. Области с большой группой симметрий в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$

В отличие от одномерного случая, вопрос о голоморфной эквивалентности многомерных комплексных областей является трансцендентно сложным, и его разумно ставить для специальных классов областей. Например, для областей с богатыми группами голоморфных автоморфизмов.

Н. Г. Кружилин (1988)

Если две гиперболические (по Кобаяси) области Рейнхарта в $\mathbb{C}^n$ биголоморфно эквивалентны, то их логарифмические диаграммы аффинно эквивалентны и семейство биголоморфных отображений между такими областями может быть описано явно.

Другие классы областей, голоморфная эквивалентность которых сводится к аффинной (за исключением явно описанных случаев):

Н. Г. Кружилин, П. А. Солдаткин (2005)

Двумерные гиперболические по Кобаяси трубчатые области.

Н. Г. Кружилин (2021)

Трехмерные трубчатые области с границей, содержащей Леви-плоские участки.

8. Униформизация строго псевдовыпуклых областей

Любая область в $\mathbb{C}$ с непустой гладкой границей голоморфно накрывается единичным кругом. Накрытие продолжается на замыкание области, а для вещественно-аналитических границ это продолжение голоморфно.

В многомерном случае аналоги этих классических результатов справедливы для *строго псевдовыпуклых* областей. Граница такой области имеет нетривиальную внутреннюю структуру, которая полностью определяет тип универсального накрытия.

С. Ю. Немировский, Р. Г. Шафиков (2005)
Универсальные накрытия строго псевдовыпуклых областей биголоморфны тогда и только тогда, когда границы этих областей всюду локально CR-эквивалентны.

Доказательство существенно опирается на предшествующие работы С. И. Пинчука и А. Г. Витушкина с учениками.

9. Комплексный анализ и математическая физика

А. Г. Сергеев, П. Хайнцнер (1991), Чжоу Щаньюй (1998)
Расширенная световая труба будущего является областью голоморфности.

Это утверждение возникло как гипотеза у физиков в школах Н. Н. Боголюбова и А. С. Уайтмана. Сергеев и Хайнцнер рассмотрели версию для компактных групп, а Чжоу (в то время докторант в МИАН) доказал гипотезу в исходной формулировке.

А. Г. Сергеев (2008)
Изучение кэлеровой геометрии бесконечномерных комплексных многообразий позволило построить квантование универсального пространства Тейхмюллера, играющего важную роль в теории струн.

А. Г. Сергеев, Р. В. Пальвелев (цикл работ 2001–2020)
Адиабатический предел в уравнениях Зайберга–Виттена является комплексной версией адиабатического предела в уравнениях Гинзбурга–Ландау.

10. Голоморфные движения и сепаратная голоморфность

Сепаратная голоморфность функции в области $D \subset \mathbb{C}^n$ – это её голоморфность в D по каждой переменной в отдельности.

Знаменитая теорема Фридриха Хартогса (1906) утверждает, что такая функция голоморфна в D по совокупности переменных.

Голоморфные движения – топологические слоения комплексными гиперповерхностями. Изучаются и применяются с 1993 г.

Е. М. Чирка (2006)
Пусть D – область в проколотом шаре $\mathbb{B} \setminus 0$ в $\mathbb{C}^2$, которая топологически расслаивается замкнутыми в $\mathbb{B}$ голоморфными гладкими кривыми, трансверсально пересекающимися в 0 и принадлежащими $D \cup 0$. Тогда любая функция в шаре, бесконечно дифференцируемая в 0 и голоморфная вдоль каждой кривой слоения, голоморфна в D по совокупности переменных.

Фрэнк Форелли (1977): $D = \mathbb{B} \setminus 0$ с очевидным голоморфным слоением линейными дисками, проходящими через 0.

Спасибо за внимание !