# Отдел математической физики Математического института им. В.А.Стеклова РАН

И.В. Волович

Отдел Математической физики
Математический институт им. В.А.  Стеклова РАН

*МИАН*
*13-15 мая 2024 г.*

# План доклада

- **История отдела**
- **Основные направления**
- **Международное сотрудничество**
- **Персональные результаты**

# Математическая физика

- **Математическая физика занимается построением и изучением математических моделей физических процессов**

- **Ньютон, Эйлер, Лаплас, Гаусс, Риман. . . , Гильберт, Эйнштейн, Пуанкаре, Стеклов, Остроградский, Лобачевский, Ковалевская,. . . Шредингер, Гейзенберг, Дирак, фон Нейман, Г. Вейль, Фок,. . . Колмогоров, Петровский, Соболев,. . . Вайтман, Йост, Боголюбов, Владимиров, Фаддеев, Маслов, Виттен, Хокинг, Пенороуз. . .**

# Математическая физика

- **Математические структуры, связанные с геометрией пространства-времени, гладкие Лоренцевы многообразия . . .**

- **Математические структуры, связанные с квантовой теорией: гильбертовы пространства, операторные алгебры . . .**

- **Классические и квантовые уравнения математической физики**

# Пример уравнений квантовой теории поля

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = -\lambda\phi^3, \quad \phi = \phi(t, \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

$$[\phi(0,\mathbf{x}), \dot\phi(0,\mathbf{y})] = \phi(0,\mathbf{x})\dot\phi(0,\mathbf{y}) - \dot\phi(0,\mathbf{y})\phi(0,\mathbf{x}) = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

**Группа Пуанкаре – группа движений пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,d}$**

**Функция Вайтмана (корреляционная функция), $\Omega$ – вектор в гильбертовом пространстве**

$$w(x_1,\ldots,x_n) = (\Omega, \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\Omega), \qquad x = (t, \mathbf{x})$$

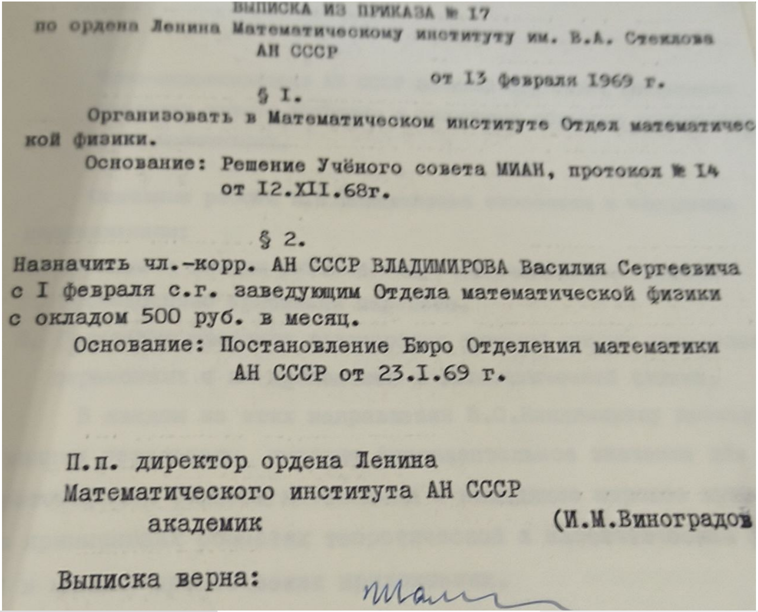
# Создание отдела

**Отдел математической физики МИАН был создан на основании решения ученого совета МИАН от 12.12.1968 года по приказу директора МИАН И.М. Виноградова**

**В.С. Владимиров, О создании Отдела математической физики МИАН (видеозапись)**

**И.В. Волович, 40-летие Отдела математической физики МИАН (видеозапись)**

# Создание отдела



ВЫПИСКА ИЗ ПРИКАЗА № 17
по ордена Ленина Математическому институту им. В.А. Стеклова
АН СССР

от 13 февраля 1969 г.

§ I.

Организовать в Математическом институте Отдел математической физики.

Основание: Решение Учёного совета МИАН, протокол № 14 от I2.XII.68г.

§ 2.

Назначить чл.-корр. АН СССР ВЛАДИМИРОВА Василия Сергеевича с I февраля с.г. заведующим Отдела математической физики с окладом 500 руб. в месяц.

Основание: Постановление Бюро Отделения математики АН СССР от 23.I.69 г.

П.п. директор ордена Ленина
Математического института АН СССР
академик (И.М.Виноградов

Выписка верна:

# В.С. Владимиров

**23.01.1969 заведующим отделом был назначен В.С. Владимиров (09.01.1923-03.11.2012)**

**академик (1970), Герой Социалистического Труда (1983), лауреат Сталинской премии (1953) и Государственной премии СССР (1987)**

**участник Великой Отечественной войны и атомного проекта**

В.С. Владимиров является автором выдающихся работ по тематикам:

- уравнения переноса
- аксиоматическая квантовая теория поля
- многомерный комплексный анализ
- многомерная тауберова теория
- теория обобщенных функций
- $p$-адический анализ и его приложения
- краевые задачи уравнений математической физики
- и многим другим

# В.С. Владимиров

**В.С. Владимиров является автором**

- **более 300 научных статей,**
- **а также учебников**
  **"Уравнения математической физики**
  **"Сборник задач по уравнениям математической физики"**
- **и монографий**

# Сотрудники, ушедшие из жизни

- Владимиров Василий Сергеевич
- Виноградов Владимир Сергеевич
- Дезин Алексей Алексеевич
- Завьялов Борис Иванович
- Масленникова Вера Николаевна
- Михайлов Валентин Петрович
- Миллионщиков Владимир Михайлович
- Хоружий Сергей Сергеевич

# Фото сотрудников отдела


<u>Слева направо, стоят</u>: **И.Г. Маннанов, А.С. Трушечкин, М.О. Катанаев, И.В. Маресин, В.В. Жаринов, А.К. Гущин, Р. Павельвев, С.В. Козырев, Е.В. Писковский, А.Н. Печень**

<u>Слева направо, сидят</u>: **И.В. Волович, В.С. Владимиров, Ю.Н. Дрожжинов**

# И.В. Волович – заведующий отделом 2003-2022

Член-корреспондент РАН,
Золотая медаль имени П. Л. Чебышёва,
иностранный член Сербской академии нелинейных наук

Темы научной работы: математические вопросы квантовой теории поля, $p$-адическая математическая физика, математические модели квантовых компьютеров теория квантовых динамических систем, теория струн и суперструн, метод стохастичекого предела, уравнения математической физики, геометрическая теория дефектов, черные дыры и космология

Автор более 230 работ и 3 монографий

# А.И. Шафаревич – заведующий отделом с 2022

Член-корреспондент РАН

Декан механико-математического факультета МГУ

Темы научной работы: математическая физика, асимптотическая и геометрическая теория линейных и нелинейных уравнений в частных производных, квантовая механика и гидродинамика

Автор более 70 научных работ

# Сотрудники

- Шафаревич Андрей Игоревич
- Волович Игорь Васильевич
- Гущин Анатолий Константинович
- Дрожжинов Юрий Николаевич
- Жаринов Виктор Викторович
- Зеленов Евгений Игоревич
- Катанаев Михаил Орионович
- Козырев Сергей Владимирович
- Марчук Николай Гурьевич
- Трушечкин Антон Сергеевич
- Сергеев Армен Глебович (годы работы: 1982-2019)
- Печень Александр Николаевич (годы работы: 2011-2016, асп.: 2001-2004)

# Аспиранты отдела

- Араркцян Б. Г., н.р. Михайлов В.П.
- Гайденко С. В., н.р. Гущин А.К.
- Галеев Р., н.р. Дрожжинов Ю.Н.
- Думанян В. Ж., н.р. Гущин А.К.
- Гущин А. К., н.р. Михайлов В.П.
- Жаринов В.В., н.р. Владимиров В.С.
- Завьялов Б.И., н.р. Владимиров В.С.
- Зеленов Е.И., н.р. Владимиров В.С.
- Иноземцев О.Н., н.р. Волович И.В.
- Баранов А.А., н.р. Волович И.В.

# Аспиранты отдела

- **Козырев С.В., н.р. Волович И.В.**
- **Комлов А.В., н.р. Сергеев А.Г.**
- **Лежнев В. Г., н.р. Михайлов В.П.**
- **Лежнев А. В., н.р. Гущин А.К.**
- **Маннанов И. Г., н.р. Катанаев М.О.**
- **Муравей Л. А., н.р. Михайлов В.П.**
- **Михайлов Ю. А., н.р. Гущин А.К.**
- **Петрушко И. М., н.р. Михайлов В.П.**
- **Печень А.Н., н.р. Волович И.В.**
- **Писковский Е.В., н.р. Волович И.В.**

# Аспиранты отдела

- **Рощин Р.А., н.р. Волович И.В**
- **Иванов М.Г., н.р. Волович И.В**
- **Русалев Т.А., н.р. Волович И.В.**
- **Трушечкин А.С., н.р. Волович И.В.**
- **Тимофеев Г.М., н.р. Трушечкин А.С.**
- **Чжоу Щ., н.р. Сергеев А.Г.**
- **Широков Д. С., н.р. Марчук Н.Г.**

# Аксиоматическая квантовая теория поля

- **Вайтман, Боголюбов, Владимиров**
- **Теорема Владимирова о $C$-выпуклой оболочке**

  **Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, Наука, М., 1964**

  **Владимиров В. С., Обобщённые функции в математической физике, Наука, М., 1976.**

# Основные направления

- $p$-адическая математическая физика
- Многомерная тауберова теория
- Уравнения математической физики
- Геометрическая теория дефектов
- Квантовая теория поля и теория струн
- Теория открытых квантовых систем
- Статистическая механика
- Квантовые эффекты в гравитационных полях

# Международное сотрудничество

**Отдел ведет исследования в тесном международном сотрудничестве с коллегами из Италии, Японии, США, Сербии, Китая, Нидерландов, Польши и др.**

**Проводятся многочисленные международные конференции, издается международный журнал "p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications" (главный редактор Волович И.В.)**

**Изданы монографии совместно с итальянскими и японскими коллегами**

- **L. Accardi, Lu Yun Gang, I. Volovich, Quantum theory and its stochastic limit, Springer-Verlag, Berlin, 2002**
  `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-04929-7`
- **M. Ohya, I. Volovich, Mathematical foundations of quantum information and computation and its applications to nano- and bio-systems, Springer, Dordrecht, 2011**
  `https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-0171-7`

# Формальные показатели

- **Vladimirov, V. S., Volovich, I. V., Zelenov, E. I. (1994), "p-adic Analysis and Mathematical Physics", Ser.Sov.East Eur.Math. 1, 1-319, cited: 1428**
- **Katanaev, M. O., Volovich, I. V. (1992), "Theory of defects in solids and three-dimensional gravity", Annals of Physics, 216(1), 1-28, cited: 601**
- **Volovich, I. V. (1987), "p-Adic string", Classical and Quantum Gravity, 4(4), L83, cited: 455**

# Монографии

- **Владимиров В. С. Уравнения математической физики М., 1967.**
- **Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М., 1976.**
- **Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М., 1986**
- **Владимиров В. С., Волович И. В., Зелёнов Е. И. Р-адический анализ и математическая физика М., 1994**
- **Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 2001.**
- **Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М., 2004.**
- **Дезин А.А., Общие вопросы теории граничных задач. М. : Наука. 1980.**
- **Дезин А.А., Уравнения, операторы, спектры. М. : Знание, 1984.**
- **Дезин А.А., Многомерный анализ и дискретные модели. М. : Наука. 1990.**

# Монографии

- Михайлов В.П., Дифференциальные уравнения в частных производных. -М.: Наука, 1983
- Козырев С.В., Методы и приложения ультраметрического и p -адического анализа: от теории всплесков до биофизики, Современные проблемы математики, 12, МИАН, Москва, 2008
- N. Marchuk, Field theory equations, Amazon, CreateSpace, 2012
- Н. Г. Марчук, Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда, РХД, Ижевск, 2009
- Н. Г. Марчук, Д. С. Широков, Введение в теорию алгебр Клиффорда, Фазис, Москва, 2012
- М. О. Катанаев, Геометрические методы в математической физике, НОЦ МИАН, 2016
- L. Accardi, Lu Yun Gang, I. Volovich, Quantum theory and its stochastic limit, Springer-Verlag, Berlin, 2002
- M. Ohya, I. Volovich, Mathematical foundations of quantum information and computation and its applications to nano- and bio-systems, Springer, Dordrecht, 2011

# $p$-адическая математическая физика

В.С. Владимиров, И.В. Волович,
Е.И. Зеленов, С.В. Козырев

# $p$-адическая математическая физика

- Обычно в математической физике используются результаты математического анализа, основанные на понятии вещественного числа.
- Однако в [I.V. 1987] было отмечено, что фактически вещественные числа, включающие бесконечное число знаков, являются ненаблюдаемыми. Наблюдаемыми являются только рациональные числа.
- На поле рациональных чисел имеются только две нормы, вещественная и $p$-адическая (теореме Островского).
- Таким образом, по существу единственной альтернативой для вещественного анализа является $p$-адический анализ.

# $p$-адическая математическая физика

- **В [IV, 1897] было показано, что при попытках все более точного измерения положения на Планковских масштабах мы приходим по существу к неархимедовой геометрии, которая соответствует описанию в терминах $p$-адического анализа.**

- **Была предложена конструкция $p$-адических струн [IV, 1987] и начата разработка $p$-адической квантовой механики, см. [VSV,IV,EZ,1990]. Для дальнейшего обзора различных результатов $p$-адической математической физики, включая применения в теории спиновых стекол, белковых молекул, космологии и другие, [см. ссылки ниже]**

- [1] Volovich, I. V. (1987), p-Adic string. Classical and Quantum Gravity, 4(4), L83.
- [2] Volovich, I. V. (1987), Number theory as the ultimate physical theory. Nucl. Phys., (CERN-TH-4781-87).
- [3] Vladimirov, V. S., Volovich I. V. (1989), p-Adic quantum mechanics. Communications in mathematical physics, 123, 659-676.
- [4] Владимиров, В. С. (1988), Обобщенные функции над полем p-адических чисел. Успехи математических наук, 43(5 (263), 17-53.
- [5] Владимиров, В. С., Волович, И. В., Зеленов, Е. И. (1990), Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. Известия РАН. Сер. матем., 54, 275-302.

# $p$-адическая математическая физика


- [6] Владимиров В. С., Волович И. В., Зелёнов Е. И., Р-адический анализ и математическая физика М., 1994
- [7] Dragovich, B., Khrennikov, A. Y., Kozyrev, S. V., Volovich, I. V., Zelenov, E. I. (2017), p-Adic mathematical physics: the first 30 years. P-Adic numbers, ultrametric analysis and applications, 9, 87-121.
- [8] Aref'eva, I. Y., Dragovich, B., Frampton, P. H., Volovich, I. V. (1991). The wave function of the Universe and p-adic gravity. Inter.J of Modern Phys A, 6, 4341-4358.

# $p$-адическая математическая физика

- Adelic spacetime (Ю.И. Манин), adelic strings (P. Freund, E. Witten), adelic quantum mechanics (Б. Драгович, ...), spin glasses (С.В. Козырев)
- Cosmology (И.Я. Арефьева, И.В. Волович, Б. Драгович, P. Frampton), Biology (В.А. Аветисов, А.Х. Викулов, С.В. Козырев, Б. Драгович, A.N. Khrennikov)
- Автоматы, Планковские масштабы (В.С. Анашин)

# $p$-адическая квантовая механика

$p$-адическая квантовая механика для гармонического осциллятора задаётся тройкой [1, 2] $(L_2(Q_p),\ W(z),\ U(t))$. Здесь $z=\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ — точка в классическом фазовом пространстве, которое представляет собой симплектическое пространство $(V, B)$, где $V=Q_p\times Q_p$, $B$ — симплектическая форма,

$$B(z, z')=-pq'+p'q, \quad z=\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\in V, \ z'=\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix}\in V^1. \tag{3.1}$$

Классическая динамика гармонического осциллятора задаётся группой автоморфизмов симплектического пространства $(V, B)$. Именно,

$$z=\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}=T_t z. \tag{3.2}$$

Здесь тригонометрические функции $p$-адического аргумента $t$ задаются обычными рядами, которые сходятся в $G_p$, где группа $G_p$ определена в § 2. Имеет место соотношение

$$T_t T_{t'}=T_{t+t'}, \quad t\in G_p, \quad t'\in G_p. \tag{3.3}$$

**где** $G_p=\{t\in\mathbb{Q}_p : |t|_p\le 1/p\}$

Семейство унитарных операторов $W(z)$ задаёт представление группы Гейзенберга — Вейля

$$(z, \alpha)\circ(z', \alpha') = (z+z', \alpha+\alpha'+B(z, z')), \tag{3.4}$$

где $\alpha\in Q_p$, $\alpha'\in Q_p$. Операторы $W(z)$ действуют по формуле

$$W(z)\psi(x) = \chi(2px+pq)\psi(x+q), \quad \psi\in L_2(Q_p).$$

Они удовлетворяют соотношению $W(z)W(z') = \chi(B(z, z'))W(z+z')$. Представление группы Гейзенберга — Вейля задаётся следующим образом: $(z, \alpha)\to\chi(\alpha)W(z)$.

Семейство унитарных операторов $U(t)$ задаёт представление группы $G_p$,

$$U(t+t') = U(t)U(t'), \quad t\in G_p, \quad t'\in G_p, \tag{3.5}$$

причём имеет место соотношение

$$U(t)W(z)U(t)^{-1} = W(T_t z). \tag{3.6}$$

На основные функции $\psi\in\mathcal{D}(Q_p)$ оператор $U(t)$ действует следующим образом [1, 2]:

$$U(t)\psi(x) = \int_{Q_p} K_t(x, y)\psi(y)\,dy, \tag{3.7}$$

где ядро $K_t(x, y)$ имеет вид

$$K_t(x, y) = \lambda_p(t)|t|_p^{-1/2}\chi\left(-\frac{x^2+y^2}{\operatorname{tg} t} + \frac{2xy}{\sin t}\right), \quad t\neq 0, \tag{3.8}$$
$$K_0(x, y) = \delta(x-y).$$

# $p$-адическая квантовая механика

ТЕОРЕМА *Пусть $p \geqslant 3$. Функция $\psi_\alpha(x)$ принадлежит пространству $L_2(Q_p)$ и удовлетворяет соотношению*

$$U(t)\,\psi_\alpha(x) = \chi(\alpha t)\,\psi_\alpha(x), \quad |t|_p \leqslant 1/p, \quad \alpha \in J_p. \tag{5.26}$$

*Если $\psi_\alpha \not\equiv 0$, то она является собственной функцией для оператора эволюции, соответствующей собственному значению $\chi(\alpha t)$. При этом*

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \Omega\left(\frac{1}{p}|\alpha|_p\right), & |x|_p \leqslant 1, \\ \delta(|\alpha|_p - p^2)\,\delta((x^2)_0 - \alpha_0), & |x|_p = p, \\ \delta(|x|_p^2 - |\alpha|_p)\,\delta((x^2)_0 - \alpha_0)\,\delta((x^2)_1 - \alpha_1)\,\varphi_\alpha(x), & |x|_p \geqslant p^2, \end{cases} \tag{5.27}$$

*где $(x^2)_j$ — $j$-й член канонического представления (2.8) числа $x^2$, $\varphi_\alpha(x)$ — некоторая непрерывная функция.*

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = p^{-\gamma}(\alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_{\gamma-2}p^{\gamma-2}),$$

$$0 \leqslant \alpha_j \leqslant p-1, \quad \alpha_0 \neq 0; \quad j = 0, 1, \ldots, \gamma-2,$$

причём при $p \equiv 1 \pmod 4$ $\gamma = 2, 3, 4, 5, \ldots$, а при $p \equiv 3 \pmod 4$ $\gamma = 2, 4, 6, \ldots$; при $p = 2$

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 2^{-\gamma}(1 + 2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \cdots + \alpha_{\gamma-3} \cdot 2^{\gamma-3}),$$

$$\gamma = 4, 5, \ldots; \quad \alpha_j = 0, 1; \quad j = 2, 3, \ldots, \gamma-3.$$

Это множество индексов обозначим $J_p$. Числа из $J_p$ аналогичны «уровням энергии» в стандартной квантовой механике.

*$p$-адическим псевдодифференциальным оператором* назовём оператор $A$ вида

$$A\varphi = \int_{Q_p} a(\xi, x)\,\widetilde{\varphi}(\xi)\,\chi(-\xi x)\,d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(Q_p),$$

где функция $a(\xi, x)$ называется *символом* оператора $A$.

Примером $p$-адического псевдодифференциального оператора является оператор $D^\alpha$, $\alpha > 0$, с символом $a(\xi, x) = |\xi|_p^\alpha$ — аналог оператора дробного дифференцирования в вещественном анализе. Этот оператор введён в работе [15]. В $x$-представлении он имеет вид

$$D^\alpha \varphi(x) = \int_{Q_p} |\xi|_p^\alpha\,\widetilde{\varphi}(\xi)\,\chi(-\xi x)\,d\xi = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{Q_p} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|_p^{\alpha+1}}\,dy.$$

# Оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования

# $p$-адическая квантовая теория
# Е.И. Зеленов

**$p$-адическая математическая физика – раздел современной математической физики, основанный на использовании $p$-адических чисел, $p$-адического анализа для построения моделей физических явлений.**

**Одним из основных мотивов для развития этого направления послужила гипотеза о неархимедовой структуре пространства-времени на планковских масштабах. Первые работы, положившие начало $p$-адической математической физике, появились в 1987 году и были посвящены неархимедовому подходу к динамике струны на планковских масштабах [1].**

**[1] I.,V.,Volovich. p-Adic strings. Class. Quant. Grav. 4, (1987), L83-L87.**

**Обширная библиография по $p$-адической математической физике и современное состояние содержатся в книге [2] и обзоре [3]. В работе [4] впервые была предложена модель $p$-адической квантовой механики, построено квантование $p$-адического осциллятора и свободной частицы.**

[2] V. S. Vladimirov, I. V Volovich, E. I. Zelenov. $p$-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure

[3] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **9**:2 (2017), 87–121.

В. С. Владимиров, И. И. Волович. $p$-Адическая квантовая механика. ДАН СССР, **302**, (1988), 320-322.

**Пусть** $(W, H)$ **– представление канонических коммутационных соотношений над двумерным симплектическим пространством** $(F, \Delta)$ **над полем** $p$**-адических чисел (**$F$ **– двумерное векторное пространство над** $\mathbb{Q}_p$**,** $\Delta$ **– невырожденная симплектическая форма на** $F$**), то есть** $W$ **– отображение из пространства** $F$ **в множество унитарных операторов на пространстве** $H$**, удовлетворяющее соотношению**

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z, z')\right)W(z + z')$$

**для всех** $z, z' \in F$**. Здесь** $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$**, где** $\{x\}_p$ **-** $p$**-адическая дробная часть числа** $x \in \mathbb{Q}_p$**. Дополнительно будем считать отображение** $W$ **непрерывным в сильной операторной топологии.**

# $p$-адическая квантовая теория

**Унитарная динамика $p$-адической квантовой системы описывается специальным представлением симплектической группы двумерного симплектического пространства над полем $p$-адических чисел, так называемым метаплектическим представлением или представлением Вейля.**

**Вышеуказанное представление тесно связано с действием симплектической группы на дереве Брюа-Титса. Дано определение $p$-адического индекса Маслова для троек решеток (вершин дерева Брюа-Титса). Получены новые явные формулы для коцикла метаплектического представления симплектической группы и описаны орбиты действия этой группы на множестве троек вершин дерева Брюа-Титса через $p$-адический индекс Маслова.**

# $p$-адическая квантовая теория

**В качестве примера неунитарной динамики предложена конструкция одномодового квантового бозонного канала.**

**По аналогии с вещественным случаем, линейным бозонным каналом (в представлении Шредингера) будем называть линейное вполне положительное сохраняющее след отображение на пространстве состояний $\Phi$ такое, что характеристическая функция $\pi_\rho$ любого состояния $\rho$ преобразуется по формуле**

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z),$$

**для некоторого линейного преобразования $K$ пространства $F$ и некоторой комплекснозначной функции $k$ на $F$.**

Особый интерес представляет случай гауссовских каналов, когда $k(z)$ есть индикаторная функция $h_L(z)$ решетки $L$.

Получен следующий критерий существования такого канала.

**Теорема.** Пусть $K$ – невырожденное линейное преобразование пространства $F$, $L$ – произвольная решетка в пространстве $F$, $k(z) = h_L(z)$. В этом случае выражение $\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z))$ определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство

$$|1 - \mathrm{det}K|_p|L| \leq 1.$$

**Получена формулы для выигрыша энтропии $G_p$ в таком канале. А именно,**

$$G_p(\Phi) = \inf_{\rho} \{H(\Phi[\rho]) - H(\rho)\} = \log |\det K|_p.$$

**Здесь $H(\rho)$ – энтропия фон-Неймана состояния $\rho$.**
**В случае, когда $K$ – линейное преобразование над полем рациональных чисел, можно определить соответствующий линейный бозонный канал для каждого простого $p$ и $p = \infty$ (соответствует вещественному каналу). Все эти каналы связаны нетривиальным образом. А именно, справедлива адельная формула для выигрыша энтропии**

$$\sum_{p-\text{простое число}, p=\infty} G_p(\Phi) = 0.$$

**Адельная формула для выигрыша энтропии**

$$\sum_{p-\textbf{простое число},p=\infty} G_p(\Phi) = 0.$$

**То есть, в каждом из локальных каналов происходит изменение энтропии, при этом суммарная энтропия не меняется.**

# $p$-адическая квантовая теория

**С каждой самодвойственной решеткой $L$ (вершиной дерева Брюа-Титса) можно связать вакуумное состояние (его характеристическая функция есть индикаторная функция решетки) и систему когерентных состояний. Отличительным свойством $p$-адической модели является тот факт, что когерентные состояния образуют ортонормированный базис в пространстве неприводимого представления коммутационных соотношений. Кроме того, базисы когерентных состояний, соответствующие различным решеткам являются взаимно несмещенными (при сужении на соответствующие конечномерные подпространства). Унитарная динамика $p$-адической квантовой системы задается блочными комплексными адамаровыми матрицами.**

# Спиновые стекла и $p$-адический анализ С.В. Козырев

Проводились работы по стохастическому пределу квантовой теории и другим моделям квантовой динамики (например, модели квантового управления в квантовом фотосинтезе). Были получены результаты по $p$-адическими всплескам и $p$-адическим методам в теории сложных систем (в их иерархическом приближении).

# Спиновые стекла и $p$-адический анализ С.В. Козырев

- **Некоторые результаты:**
  - **$p$-Адическая параметризация матрицы Паризи (описывающей нарушении симметрии в модели Шеррингтона–Киркпатрика спинового стекла) позволяет представить корреляционные функции такой модели в виде интеграла по $p$-адическому аргументу.**

# Спиновые стекла и $p$-адический анализ

**Матрица Паризи есть $n \times n$ матрица $Q = (Q_{ab})$, матричный элемент матрицы которой равен**

$$Q_{aa} = 0, \quad Q_{ab} = q_i, \qquad \left\lceil \frac{a}{m_i} \right\rceil \neq \left\lceil \frac{b}{m_i} \right\rceil; \quad \left\lceil \frac{a}{m_{i+1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{b}{m_{i+1}} \right\rceil. \tag{1}$$

**Здесь $m_i$ и их отношения $p_i = m_{i+1}/m_i$ суть натуральные числа,**

$$1 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < m_k = n.$$

**Функция $\lceil x \rceil$ есть наименьшее целое число $\geq x$ (целая часть сверху), $q_i$ суть неотрицательные параметры.**

# Спиновые стекла и $p$-адический анализ

**Было показано, что для случая $m_i = p^i$ (то есть когда все $p_i = p$), формула (1) эквивалентна следующей $p$-адической параметризации: после соответствующей перенумеровки индексов матрицы Паризи, матричные элементы этой матрицы имеют вид**

$$Q_{ab} = q(|l(a) - l(b)|_p), \qquad (2)$$

**где $|\cdot|_p$ есть $p$-адическая норма и $q(p^i) = q_i$, $q(0) = 0$.**

**Такая перенумеровка задана вариантом отображения Монна**

$$l : \{1, 2, \dots, p^k\} \to p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},$$

$$l^{-1} : \quad x = \sum_{i=-k}^{-1} x_i p^i \mapsto 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i p^{i-1}, \qquad 0 \le x_i \le p-1.$$

# Спиновые стекла и $p$-адический анализ

**Подобное иерархическое приближение позволяет описать релаксацию в белках моделями типа $p$-адического уравнения диффузии**

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\int_{\mathbb{Q}_p} q(|x-y|_p)\,[f(x,t) - f(y,t)]\,d\mu(y),$$

**которое при $q(|x|_p) = \Gamma_p^{-1}(-\alpha)|x|_p^{-1-\alpha}$ принимает вид $p$-адического уравнения теплопроводности с дробным оператором $D^\alpha$ Владимирова (именно такое уравнение релаксации подтверждается на эксперименте).**

***V.A.Avetisov, A.H.Bikulov, S.V.Kozyrev, Application of $p$-adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry, J. Phys. A: Math. Gen. 32 (no 50), 8785–8791 (1999).*** **(207 ссылок по GoogleScholar, включая)**
***G.Parisi, N.Sourlas, $p$-Adic numbers and replica symmetry breaking, Eur. Phys. J. B, 14, 535–542 (2000).***

**Был введён базис $p$-адических всплесков — собственных векторов оператора Владимирова.**

**Оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования диагонализуется $p$-адическим преобразованием Фурье $F$**

$$D^{\alpha} f(x) = F^{-1} \circ |k|_p^{\alpha} \circ F[f](x).$$

**Для $\alpha > 0$ имеет место интегральное представление**

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y), \tag{3}$$

**где** $\Gamma_p(-\alpha) = \dfrac{p^{\alpha} - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}$ **есть р-адическая $\Gamma$ – функция**

# $p$-адические всплески

**Базис $p$-адических всплесков вводится как набор сдвигов и растяжений конечного набора всплесков, связанных с единичным шаром.**

$$\psi_k(x) = \chi(p^{-1}kx)\Omega(|x|_p), \qquad k = 1, \ldots, p-1.$$

**Здесь $\Omega$ есть характеристическая функция $[0,1]$ (то есть $\Omega(|x|_p)$ есть характеристическая функция единичного шара $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Q}_p$), $\chi$ есть характер**

$$\chi(x) = \exp\left(2\pi i\{x\}\right), \quad \{x\} = \sum_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j, \quad x = \sum_{j=\gamma}^{\infty} x_j p^j, \quad x_j = 0, \ldots,$$

**Теорема.**
**1) Набор функций $\{\psi_{k;\,jn}\}$ ($p$-адических всплесков), получаемых из функций $\{\psi_k\}$ растяжениями на степени $p$ и сдвигами на представители из классов эквивалентности факторгруппы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$:**

$$\psi_{k;\,jn}(x) = p^{-\frac{j}{2}}\psi_k(p^j x - n), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p/$$

$$n = \sum_{i=\beta}^{-1} n_i p^i, \quad n_i = 0, \ldots, p-1, \quad \beta \in \mathbb{Z}, \beta < 0$$

**есть ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.**

**2) Элементы введённого базиса являются собственными векторами оператора Владимирова:**

$$D^{\alpha}\psi_{k;\,jn} = p^{\alpha(1-j)}\psi_{k;\,jn}.$$

**С.В.Козырев, Теория всплесков как $p$-адический спектральный анализ, Известия РАН Серия Мат. 66 (no 2), 149–158 (2002). (221 ссылка по GoogleScholar)**
**A.Khrennikov, S.Kozyrev, W. Zuniga-Galindo, Ultrametric Pseudodifferential Equations and Applications, Cambridge University Press, 2018.**

# О работах А.И. Шафаревича

**Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — гладкие компактные геодезически полные ориентированные римановы многообразия размерности не выше 3 и $\gamma_1, \ldots \gamma_s$ — отрезки, наделенные параметризацией.** *Гибридное пространство* $M$ **— топологическое пространство, полученное приклеиванием концов отрезков к некоторым точкам $q_1, \ldots, q_{2s}$ на многообразиях; мы предполагаем, что разные концы приклеены к разным точкам $q_j$.**

**Такие пространства появляются как модели для наноструктур, электронных устройств и движения транспорта.**

# О работах А.И. Шафаревича

**Рассмотрим следующую задачу Коши для нестационарного уравнения Шредингера в гибридном пространстве** $M$

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi, \quad \psi|_{t=0} = A_0(z)\mathrm{e}^{\frac{i}{h}((z-z_0)+q_0(z-z_0)^2)},$$

**где** $z_0$ **— точка отрезка** $\gamma$**,** $h \to 0$ **— квазиклассический малый параметр,** $q_0 \in \mathbb{C}$**,** $\Im q_0 > 0$**,** $A_0 \in C_0^\infty(\gamma)$ **— гладкая срезающая функция. Исходная функция имеет вид узкого пика, сосредоточенного в малой окрестности точки** $z_0$**.**

# О работах А.И. Шафаревича

**Асимптотический носитель решения $\psi(t)$ — это дополнение к множеству точек $x \in M$, в которых $\psi = O(h^\infty)$ Ограничение асимптотического носителя на ребра — конечное число точек $N(t)$. Поведение этой функции при $t \to \infty$ определяется свойствами геодезического потока на $M$. А именно, для каждой пары $(q_i, q_j)$ точек склейки, лежащих на одном и том же многообразии $M_l$, рассмотрим число $m_{ij}(t)$ различных длин геодезических на $M_l$, соединяющих $q_i$ и $q_j$ и таких, что эти длины не превосходят $t$ (мы предполагаем, что это число конечно для произвольного $t$). Обозначим через $m(t)$ сумму $m_{ij}(t)$ для всех пар точек, лежащих на одних и тех же многообразиях. Асимптотика $N(t)$ определяется асимптотикой $m(t)$; последняя связана со свойствами геодезических потоков на многообразиях $M_j$.**

## Теорема

**1. Пусть общее число длин указанных геодезических конечно (такая ситуация возникает, например, если все $M_j$ являются евклидовыми или гиперболическими пространствами или сферами). Обозначим через $L_1, \dots, L_p$ эти длины, а через $l_1, \dots l_s$ — длины отрезков. Пусть множество $L_1, \dots, L_p, l_1, \dots, l_s$ линейно независимо над полем $\mathbb{Q}$. Тогда**

$$N(t) = Ct^{p+s-1} + o(t^{p+s-1}),$$

$$C = \frac{\sum_{j=1}^{s} l_s}{2^{2s-2}(p+s-1)! \prod_{j=1}^{s} l_j \prod_{i=1}^{p} L_i}$$

**2. Предположим, что количество геодезических $m(t)$ полиномиально растет с ростом $t \to \infty$. Такая ситуация имеет место для многообразий с не очень сложным (в частности, интегрируемым) геодезическим потоком. Пусть $m(t) = c_0 t^{\gamma}(1 + O(t^{-\varepsilon}))$, $\gamma > 0, \varepsilon > 0$.**
**Пусть множество длин $L_j, l_j$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$ (т.е. любое конечное подмножество длин линейно независимо). Тогда**

$$\log N(t) = (\gamma + 1)\left(\frac{c_0 \Gamma(\gamma+1)\zeta(\gamma+1)}{\gamma^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}} t^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(1 + o(1))$$

**Здесь $\Gamma(x)$ и $\zeta(x)$ — $\Gamma$-функция и $\zeta$ - iemann function.**

**3. Наконец, предположим, что функция $m(t)$ растет экспоненциально (этот случай типичен для геодезических потоков с положительной топологической энтропией. Пусть B$\log m(t) = Ht(1 + t^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.**

**$\mathbf{L}_j, l_j$ линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Тогда**

$$\log N(t) = Ht(1 + o(1)).$$

# О работах А.И. Шафаревича

**Основные этапы доказательства — использование различных результатов аналитической теории чисел: теорем об асимптотике числа точек в расширяющихся многогранниках и о распределениях абстрактных простых.**

**Аналогичные результаты справедливы для многообразий с коническими точками (в частности, для многогранников).**

# Многомерные тауберовы теории В.С. Владимиров, Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов

# Многомерные тауберовы теории

Теоремами абелева типа называют теоремы, связывающие асимптотическое поведение функции (вообще говоря, обобщенной) на бесконечности (или в нуле) с асимптотическим поведением ее преобразования Лапласа, Фурье или других интегральных преобразований, производящих функций и т.п., в окрестности нуля (или бесконечности). Теоремы, обратные к абелевым, называют тауберовыми.

В случае одного независимого переменного тауберова теория для мер далеко продвинута и носит законченный характер и имеет многочисленные применения в теории чисел, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической физике. Наибольшую известность и применения получают тауберовы теоремы Харди–Литтлвуда (1908), Н. Винера (1930) и М. Келдыша (1950).

**В отличии от одномерной, многомерная тауберова теория до последней четверти прошлого века не имела существенного применения и развивалась как непосредственное перенесение результатов на многомерный случай (для многомерных областей, представляющих собой прямое произведение одномерных областей).**

# Многомерные тауберовы теории

В семидесятые годы прошлого столетия в связи с теоретическим обоснованием наблюдаемого на эксперименте автомодельного поведения при высоких энергиях и больших переданных импульсах величин квантовой теории поля выходит ряд работ, которые инициирует интерес к тауберовой теории.

Вот что пишет в те годы академик В.С. Владимиров: "Потребности современной математики, особенно математической физики, поставили задачу создания тауберовой теории для обобщенных функций многих переменных. Другими словами, нужно было распространить классическую тауберову теорию для мер, заданных на прямой, на более общие объекты – на обобщенные функции, заданные на многомерном пространстве".

# Многомерные тауберовы теории

**В 1976 году выходит статья В.С. Владимирова "Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда которая положила начало развитию многомерной тауберовой теории для обобщенных функций. Введенное Б.И. Завьяловым понятие квазиасимптотики оказалось наиболее адекватно приспособленным для формулировки тауберовых теорем для обобщенных функций. После этого развернулись систематические исследования по многомерной тауберовой теории для обобщенных функций и их приложениям в отделе математической физики Математического института им. В.А. Стеклова.**

# Многомерные тауберовы теории

**В 1986 году выходит монография , В.С. Владимиров, Ю.Н. Дрожжинов, Б.И. Завьялов. "Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций."М.: Наука, (1986),**
**которая подытоживает десятилетний период этих иследований.**

**В 2016 году выходит обзорная статья**
**Ю.Н. Дрожжинов, "Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций"УМН.,(2016),т. 71, №6, являющаяся дополнением к этой монографии.**

**Приведем одну из многомерных теорем типа Харди и Литтлвуда**

Теорема (Общая тауберова теорема)

**Пусть** $\Gamma$ **- регулярный конус, допускающий семейство невырожденных линейных преобразований** $\{U_k \in \mathcal{A}(\Gamma), k \in I\}$, **где** $I$ **имеет** $\infty$ **своей предельной точкой и** $J_k = \det U_k > 0$ **и пусть** $\rho_k$ **- положительная функция параметра** $k \in I$. **Для того чтобы** $f(\xi) \in S'(\Gamma)$ **удовлетворяла соотношению**

$$\frac{1}{\rho_k} f(U_k \xi) \to g(\xi) \not\equiv 0, \quad k \to \infty, \quad k \in I, \quad \text{в } S'(\Gamma), \tag{4}$$

**необходимо выполнение условий:**

**Условия:**
**(a)**

$$\frac{1}{J_k \rho_k} \widetilde{f}(V_k z) \overset{z \in K}{\rightrightarrows} h(z), \quad k \to \infty, \quad k \in I,$$

**где** $V_k = \left(U_k^T\right)^{-1}$ **и** $K$ **- любой компакт из** $T^C$**;**
**(b) существуют постоянные** $M, \alpha, \beta$ **и** $k_1$ **такие, что**

$$\frac{1}{J_k \rho_k} \left| \widetilde{f}(V_k z) \right| \leqslant M \frac{(1 + |z|)^{\alpha}}{\Delta^{\beta}(y)}, \quad k > k_1, \quad k \in I, \quad z \in T^C,$$

**где** $\Delta(y)$ **- расстояние от** $y$ **до границы конуса** $C$**, и достаточно выполнения условий:**

**(A) найдется открытое множество** $\Omega \subset C$ **такое, что существует предел**

$$\frac{1}{J_k\rho_k}\widetilde{f}(iV_k y) \to h(iy), \quad k \to \infty, \quad k \in I, \quad y \in \Omega;$$

**(B) существуют постоянные** $M', \alpha', \beta'$, **вектор** $e \in C$ **и число** $k_2$ **такие, что**

$$\frac{1}{J_k\rho_k}\left|\widetilde{f}(V_k(x+i\delta e))\right| \leqslant M'\frac{(1+|x|)^{\alpha'}}{\delta^{\beta'}}, \tag{5}$$
$$k > k_2, \quad k \in I, \quad 0 < \delta \leqslant 1.$$

**При этом**

$$\widetilde{g}(z) = h(z), \quad z \in T^C,$$

**и для любого** $m > \alpha' + n$ **первообразная** $f^{(-m)}(\xi)$ **относительно конуса** $\Gamma$ **непрерывна и существует предел**

$$\frac{1}{J_k^m \rho_k} f^{(-m)}(U_k \xi) \overset{\xi \in K}{\rightrightarrows} g^{(-m)}(\xi), \quad k \to \infty, \quad k \in I, \tag{6}$$

**где** $K$ **- любой компакт в** $\mathbb{R}^n$**.**

**Здесь** $\widetilde{g}$ **и** $\widetilde{f}$ **преобразования Лапласа соответствующих обобщенных функций,** $S'(\Gamma)$ **обобщенные функции с носителями в конусе** $\Gamma$ **и** $T^C$ **трубчатая область в** $\mathbb{C}^n$**.Через** $\mathcal{A}(\Gamma)$ **обозначена совокупность собственных линейных автоморфизмов конуса** $\Gamma$**.**

# Краевые задачи уравнений математической физики А.К. Гущин, В.П. Михайлов

# Краевые задачи уравнений математической физики
# А.К. Гущин, В.П. Михайлов

- Рассмотрим сначала работы, посвященные задаче Дирихле. За почти два века, которые прошли с постановки К. Гауссом задачи Дирихле для уравнения Лапласа, этой тематике и различным её обобщениям посвящены исследования многих известных математиков.
- Получено много интересных и важных, ставших уже классическими результатов. Рамки обзора не позволяют дать достаточно полное описание работ по этому направлению и вынуждают ограничиться только теми из них, которые получены в Математическом институте.

# Краевые задачи уравнений математической физики

- **Для линейного уравнения второго порядка наряду с классическими решениями задачи Дирихле** $(u \in C^2(Q), u \in C(\bar{Q}))$ **в области (будем считать её ограниченной)** $Q \subset \mathbf{R}_n$ **рассматривается и обобщённое решение задачи Дирихле** $(u \in W_2^1(Q))$.
- **Удобное и простое в использовании понятие обобщенного решения не требует дополнительных условий на заданные функции для справедливости теорем о разрешимости.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

- Истоки понятия обобщенного решения лежат в предложенном еще П. Дирихле вариационном подходе к рассматриваемой задаче и в использовании метода гильбертова пространства (Д. Гильберт и А. Лебег).
- Введенные в 1936 – 1938 годах С.Л. Соболевым в опубликованных в Математическом сборнике статьях пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций оказались мощным аппаратом исследования краевых задач для дифференциальных уравнений.

# Краевые задачи уравнений математической физики

- **Пространства Соболева идеально приспособлены к исследованию смешанных задач и задачи Коши для гиперболических уравнений, для которых в классической постановке требования на гладкость начальных функций и правой части растут с увеличением числа независимых переменных.**
- **Они оказались весьма удобным аппаратом и в теории уравнений эллиптического типа.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

- Расширение класса дифференцируемых функций и ослабление требований на гладкость решения позволило, в частности, с новых позиций взглянуть на задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка и получить совсем простое, прозрачное доказательство ее однозначной разрешимости.
- Именно в таких пространствах удобно рассматривать функционал энергии, на отыскании экстремума которого базируется принцип Дирихле.

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Ограничимся задачей для линейного уравнения в дивергентном виде, к которому применим вариационный метод:**

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = -f(x), x \in Q, \tag{1}$$

$$u\,|_{\partial Q} = u_0, \tag{2}$$

**здесь** $(a_{ij}(x))$ **- равномерно по** $x \in Q$ **положительно определенная матрица с измеримыми и ограниченными элементами,** $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q)$**,**
$f = g - (\nabla, G), g \in L_2(Q),$
$G \in (L_2(Q))^n (\Leftrightarrow f \in W_2^{-1}(Q))$**.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

- Отметим, что однозначной разрешимости задачи Дирихле этих, необходимых для постановки задачи условий достаточно. При этом след решения на границе следует понимать следующим образом: существует такая функция $\varphi \in W_2^1$, что $u - \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1$.
- Для случая $u_0 = 0$, к которому сводится общая ситуация, справедлива теорема об изоморфизме: $\mathcal{L}$ изоморфно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ на сопряженное к нему пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$

# Краевые задачи уравнений математической физики

В случае общего эллиптического уравнения второго порядка задача немедленно сводится к операторному уравнению в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. В силу компактности оператора вложения этого пространства в $L_2(Q)$ оператор в этом уравнении вполне непрерывен, и по теореме Фредгольма существование решения следует из утверждения о его единственности.

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Если потребовать более жесткие условия на гладкость коэффициентов $a_{ij}$, правую часть уравнения $f$, границу рассматриваемой области $\partial Q$ и граничную функцию $u_0$, то и обобщенное решение будет более гладким. А с помощью теорем вложения Соболева можно добиться, чтобы оно стало классическим. Мы не будем останавливаться на многочисленных результатах, относящихся к исследованию свойств обобщенных решений эллиптических уравнений. Отметим только известные работы Э. Де Джорджи и Дж. Нэша, в которых без дополнительных условий на коэффициенты был получен неожиданный результат о непрерывности по Гёльдеру внутри рассматриваемой области обобщенного решения однородного (с $f = 0$) уравнения (1).**

# Краевые задачи уравнений математической физики

В работе 2005 года А.К. Гущина "интегральное"свойство принадлежности решений пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ (пространству $W^1_2$ на любом лежащем в области $Q$ компакте) и "точечное"свойство его внутренней непрерывности по Гёльдеру были объединены принадлежностью специальному функциональному пространству, определяемому в терминах конечности интегралов от квадрата разности значений функции в различных точках по специальному классу мер. Причем это объединение не является чисто интерполяционной теоремой: среди полученных таким образом промежуточных свойств имеются и свойства, которые не следуют из крайних.

В работах В.П. Михайлова 1963 – 1967 годов теоремы о разрешимости задачи Дирихле были распространены на широкие классы квазиэллиптических и квазипараболических уравнений высокого порядка.

Описание квазиэллиптических уравнений дается в терминах многогранника Ньютона, подробнее см. Труды МИАН, 1986, том 175 и Труды МИАН, 1967, том 91. Для обобщений параболических уравнений условия разрешимости задачи Дирихле (значения решения задаются на всей границе) выражаются в терминах порядка касания границы с касательной плоскостью в верхних (область расположена ниже) характеристических точках границы.

# Краевые задачи уравнений математической физики

Естественное и удобное для исследования понятие обобщенного решения имеет один недостаток. Оно не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе функция является следом функции из $W_2^1(Q)$. Это вызвано жестким требованием на выполнение граничного условия.

Естественно возникает потребность так расширить определение принятия обобщенным решением своего граничного условия, чтобы ему удовлетворяла и любая непрерывная функция. При этом необходимо расширить пространство граничных функций. Самым простым обобщением пространств $C(\partial Q)$ и $W_2^{1/2}(\partial Q)$ является пространство $L_2(\partial Q)$ (или $L_p(\partial Q)$).

**Возможность такого расширения была показана в 1960 году И. Нечасом: оператор, ставящий в соответствие граничной функции $u_0$ решение $u$ задачи Дирихле для однородного уравнения, рассматриваемый как оператор из $L_2(\partial Q)$ в $L_2(Q)$, допускает ограниченное расширение на все $L_2(\partial Q)$. Но явное описание получаемой при таком расширении постановки задачи Дирихле и вариационный метод её решения требуют более детального описания области значений этого оператора, в частности, существование у решения обобщенных производных первого порядка.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Основная трудность этой задачи - это правильное понимание выполнения граничного условия. Для такого обобщения условия (2) естественно обратиться к классическим работам по граничному поведению аналитических и гармонических функций. Как и в аналоге теоремы Ф. Рисса для гармонических функций граничное значение на $\partial Q$ можно понимать как предел в $L_2$ (или в $L_p$) по "параллельным границе"поверхностям. Если граница дважды гладкая, то "параллельные границе"поверхности естественно строить с помощью фиксированного сдвига по внутренней нормали: для достаточно малых сдвигов отображение будет взаимно однозначным.**

**Такое расширение понятия обобщенного решения было предложено в 1976 году В.П. Михайловым. Функция** $u$ **называется** *решением из* $W^1_{2,loc}(Q)$ *задачи Дирихле* $(1),(2)$ **с** $u_0 \in L_2$ **(или** $u_0 \in L_p, p > 1,$ **) если** $u \in W^1_{2,loc}(Q)$**, она удовлетворяет уравнению (1) как равенству обобщенных функций и её следы на параллельных поверхностях сходятся в** $L_2$ **(или, соответственно, принадлежат** $L_p$ **и сходятся в этом пространстве) к граничной функции** $u_0$**.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

В случае общего эллиптического уравнения второго порядка (с младшими членами) в работе Валентина Петровича при дополнительных условиях на гладкость коэффициентов было доказано фредгольмовость задачи и совпадение собственных значений и собственных функций с соответствующими собственными значениями и собственными функциями оператора, возникающего в случае обобщенного решения. В случае задачи Дирихле для уравнения (1) имеет место однозначная разрешимость для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (или $u_0 \in L_p(\partial Q), p > 1$) и всех правых частей из некоторого пространства.

# Краевые задачи уравнений математической физики

- Многочисленные работ этого направления были посвящены ослаблению условий на коэффициенты, правую часть уравнения и рассматриваемую область.
- Остановимся только на совместной работе А.К. Гущина и В.П. Михайлова (опубликованной в 1991 году в Математическом сборнике) в которой получены наиболее точные результаты. В ней требовалось, чтобы граница области имела непрерывную по Дини нормаль, а коэффициенты уравнения (1) были непрерывны по Дини на границе (после их изменения на множестве меры нуль).

# Краевые задачи уравнений математической физики

**От правой части требуется выполнение следующего условия:**

$$\int\limits_Q r^3(x)\frac{|g(x)|^2}{\omega(r(x))}dx < \infty, \int\limits_Q r(x)\frac{|G(x)|^2}{\omega(r(x))}dx < \infty; \qquad (3)$$

**где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы $\partial Q$, а функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию Дини.**

**Теорема 1. Пусть граница области имеет непрерывную по Дини нормаль, коэффициенты уравнения (1) непрерывны по Дини на границе, а правая часть $f = g - (\nabla, G)$ удовлетворяет условию (3).**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Тогда задача Дирихле (1), (2) имеет решение для любых $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Это решение единственно и для него справедлива оценка**

$$\int\limits_Q r(x)|u(x)|^2 dx + \|u\|^2_{L_2(Q)} \leq C[\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int\limits_Q \frac{r^3(x)|g(x)|^2 + r(x)|G(x)|^2}{\omega(r(x))} dx \tag{7}$$

**с независящей от $u_0$ и $f$ постоянной $C$.**

Замечание.

- Условие гладкости коэффициентов на границе не является точным. Но совсем отказаться от него нельзя: нарушается утверждение о единственности решения.
- Для однозначной разрешимости в пространстве $W_2^1(Q)$ такое дополнительное условие не требуется.
- Но в этом случае в определении принятия граничного значения вместо предела в $L_2$ следов решения к $u_0$ предполагается существенно более сильное условие: норма их разности стремится к нулю быстрее, чем квадратный корень из расстояния между поверхностями.

- Таким образом, отказ от требования принятия граничного значения с порядком требует дополнительное условие на коэффициенты. Требование на правую часть уравнения, по-видимому, также не точны. Но взять в (3) функцию $\omega \equiv 1$ нельзя.
- Основную проблему рассмотренный подход решает. Но от условий гладкости границы в предложенном принятии граничного значения освободиться невозможно. Это обстоятельство и стремление отказаться от выделенного направления явились причиной дальнейшего исследования.

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Следующим этапом в изучении этого вопроса явилось введение пространства $(n-1)$-мерно непрерывных функций, являющихся естественным обобщением непрерывных функций. Эти функции имеют следы на любом замкнутом множестве положительной $(n-1)$-меры Хаусдорфа. Граничное условие (2) понимается как равенство $u_0$ следа решения на границе.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Пространство $s$-мерно непрерывных функций $C_{s,p}(\bar{Q})$ было введено в работе А.К. Гущина в 1988 году. Обозначим символом $\mathcal{M}_s$, где $0 \leq s \leq n$, множество борелевских неотрицательных мер $\mu$ с носителями в $\bar{Q}$, удовлетворяющих оценке**

$$\exists C > 0 \quad \forall r > 0 \, \forall x^0 \in \bar{Q} \;\; \mu(B_{x^0}(r)) \leq C r^s; \tag{4}$$

$B_{x^0}(r) = \{x \in : |x - x^0| < r\}$.

# Краевые задачи уравнений математической физики

Точную нижнюю грань постоянных $C$, с которыми выполнено неравенство (4), будем называть нормой меры $\mu$ в $\mathcal{M}_s$ и обозначать $\|\mu\|_s = \|\mu\|$. Заметим, что если отказаться от требования неотрицательности мер и в (4) заменить ее полной вариацией, то полученное пространство зарядов (являющееся линейной оболочкой $\mathcal{M}_s$), будет банаховым с этой нормой. В пространстве непрерывных в $\bar{Q}$ функций рассмотрим норму

$$\|v\|^p_{C_s(\bar{Q})} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_s} \frac{1}{\|\mu\|} \int\limits_{\bar{Q}} |v|^p d\mu(x). \tag{5}$$

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Пополнение пространства непрерывных функций с этой нормой является $C_{s,p}(\bar{Q})$. В работе Гущина 2020 года приведено другое, эквивалентное определение этого пространства в терминах "$\varepsilon - \delta$ которое позволяет рассматривать функцию из $C_{s,p}(\bar{Q})$ как отображение, ставящее в соответствие каждой мере $\mu$ из класса $\mathcal{M}_s$ элемент пространства $L_p(\mu)$ – след этой функции на $\mu$. Близость мер и их значений на этих мерах определяется с помощью "соединяющей"их меры в $2n$-мерном пространстве.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Шкала пространств $C_{s,p}(\bar{Q})$ обладает свойством монотонного возрастания по параметру $s$ с соответствующей оценкой норм. Множества всех следов функции из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ на замкнутой гладкой (n-1)-мерной поверхности $\Gamma$ (на мере, определяемой интегралом по этой поверхности) совпадает с пространством $L_p(\Gamma)$. Но существование предела функции на границе по параллельным поверхностям в $L_p$ и её гладкость внутри области не гарантирует принадлежность её пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q})$.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Отметим еще, что для любого** $q \geq 1$ $C_{n,q}(\bar{Q}) = L_q(Q)$ **и** $C_{0,q}(\bar{Q}) = C(\bar{Q})$**. Определение. Функция** $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q) \cap C_{n-1,p}(\bar{Q})$ **называется** *решением задачи Дирихле* (1), **(2)** *из* $C_{n-1,p}(\bar{Q})$**, если она удовлетворяет уравнению в смысле равенства обобщенных функций и ее след на границе равен заданной функции** $u_0 \in L_p(\partial Q)$**.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

Для решения из введенного пространства справедлив аналог теоремы 1. При этом следует потребовать от правой части выполнения неравенства (3) с $\omega(t) = \frac{1}{\ln^{3/2}(t)}$. При этом имеет место оценка этой теоремы, в которой норма решения в $L_2(Q)$ заменена нормой в $C_{n-1,p}(\bar{Q})$. Для общего эллиптического уравнения аналогичное утверждение было получено В.Ж. Думаняном в серии работ 2011 – 2015 годов.

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Для однородного уравнения справедливо более сильное утверждение.**
**Теорема 2, А.К. Гущин, 2018 г..** **Для любого показателя суммируемости $p > 1$ и всех $u_0 \in L_p(\partial Q)$ существует решение из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ задачи Дирихле для однородного уравнения (1). Это решение единственно и для него справедлива оценка**

$$\int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS \leq \|u\|^p_{C^0_{n-1,p}(\bar{Q})} \leq \int\limits_{\partial Q} M^p(x) dS \leq$$

$$\int\limits_{\partial Q} \mathcal{S}^2(x) dS + \int\limits_{Q} |u|^p dx \leq \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS,$$

# Краевые задачи уравнений математической физики

**где** $M(x^0) = \sup\{|u(x)| : x \in \Gamma(x^0)\}$, $x^0 \in \partial Q$, **— некасательная максимальная функция для решения** $u$**,** $\Gamma(x^0)$ **– лежащий в** $Q$ **конус с вершиной в точке** $x^0 \in \partial Q$ **и с осью по нормали в** $x^0$**,** $\mathcal{S}(x^0)$ **– интеграл площадей Лузина функции** $v(x) = |u(x)|^{p/2}$**:**

$$\mathcal{S}(x^0) = \left[\int\limits_{\Gamma(x^0)} y_n^{2-n} |\nabla v(y)|^2 dy\right]^{1/2},$$

**а постоянные (вообще говоря, разные) не зависят от** $u_0$**.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Обсудим следующий вопрос. Насколько соответствует рассматриваемой задаче выбор класса мер? Можно ли его расширить и получить новые свойства решений? Это действительно можно сделать. Все построения, в том числе и теорема 2 остается справедливой, если потребовать, чтобы рассматриваемые меры были мерами Карлесона, то есть удовлетворяли аналогичной (4) оценке, в которой точка $x^0$ берется не из замыкания области $Q$, а только на её границе $\partial Q$:**

$$\exists C > 0 \quad \forall r > 0 \, \forall x^0 \in \partial Q \quad \mu(B_{x^0}(r)) \leq Cr^s, \, \inf\{C\} = \|\mu\|'.$$

**Определенное с помощью такого расширения класса мер решение совпадает с решением из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ и непрерывно внутри области $Q$.**

**Однако, как показывает следующая теорема, дальше по этому пути двигаться нельзя; получить дальнейшие свойства решений с помощью расширения класса конечных мер невозможно.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Теорема 3. А.К.Гущин, 13 год. Оценка решения**

$$\int\limits_{\bar{Q}} |u(x)|^p d\mu(x) \leq \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS$$

**справедлива для всех граничных функций $u_0 \in L_p(\partial Q)$ тогда и только тогда, когда мера $\mu$ является мерой Карлесона. При этом $C = C(Q,p)\|\mu\|'_s$.**
**Для аналитической в круге функции с граничным значением $u_0 \in L_p(|z| = 1)$ эта теорема была доказана в работах Л. Карлесона. Для гармонических функций в ограниченной области пространства $\mathrm{R}_n$ этот результат был установлен в работе Л. Хёрмандера.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Обсуждаемая выше тематика о разрешимости задачи Дирихле, как легко видеть, тесно связана с исследованием поведения решений эллиптического уравнения на границе. Доказательству критериев существования предела обобщенного решения уравнения (1), аналогичных теоремам Ф. Рисса и Литтлвуда – Пэли для аналитических функций, были посвящены работы В.П. Михайлова 76 года и совместная работа А.К. Гущин и В.П. Михайлова 1979 года. Необходимое и достаточное условие на решение уравнения (1), при котором оно является решением задачи Дирихле из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ с некоторой $u_0 \in L_p(\partial Q)$, было установлено работах А.К. Гущина 2018 - 2019 г.г.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**Отметим еще цикл работ 1993 – 1996, 2000 и 2002 г.г. В.П. Михайлова и А.К. Гущина, посвященный применению результатов о разрешимости задачи Дирихле в пространстве $n-1$-мерно непрерывных функций, к разрешимости широкого класса нелокальных задач для уравнения (1). Рассматриваемые нелокальные задачи сводятся к уравнению в пространстве $L_2(\partial Q)$.**

**Основой этого метода является то свойство, что оператор проектирования на измеримое подмножество, в отличии от непрерывных функций (для классического решения) и от пространства $W_2^{1/2}(\partial\, Q)$ (в случае обобщенного решения), является ортогональным проектором.**

# Краевые задачи уравнений математической физики

**В заключение отметим опубликованные в 67 – 84 г.г. работы В.П. Михайлова и работы А.К. Гущина по поведению решений при больших значений времени $t$ для нестационарных уравнений. Не будем подробно останавливаться на их содержании; достаточно полный обзор имеется в сборнике обзорных статей, посвященных 50-летию института; Тр. МИАН СССР, 175, 1986. Отметим только одно утверждение из работы А.К. Гущина, имеющее довольно простую формулировку. Рассматривается вторая смешанная задачи для линейного параболического уравнение второго порядка в цилиндрической области $\Omega \times (0, \infty)$, где $\Omega \subset R_n$ – неограниченная область ( пусть начало координат принадлежит ей).**

**При некотором условии на "регулярность"$\Omega$ устанавливается оценки нормы в $L_\infty(\Omega)$ решения с начальным значением из $L_1(\Omega)$ функцией $\frac{\mathrm{const}}{(\{x\in\Omega:|x|<\sqrt{t}\})}$. Для неотрицательной финитной начальной функции справедлива аналогичная (с другой постоянной) оценка снизу. Исследована зависимость порядка убывания решения от поведения начальной функции на бесконечности, в частности, доказан критерий равномерной (по пространственным переменным) стабилизации. Эти результаты получили развитие в работах 1979 - 1989 г.г. аспирантов отдела Математичекой физики МИАН В.И. Ушакова, Ф.Х. Мукминова и А.В. Лежнева.**

# Краевые задачи уравнений математической физики. Список публикаций

А. К. Гущин, “О задаче Дирихле”, ТМФ, 218:1 (2024), 60–79 А. К. Гущин, “Обобщения пространства непрерывных функций; теоремы вложения”, Матем. сб., 211:11 (2020), 54–71
А. К. Гущин, “О граничных значениях решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., 210:12 (2019), 67–97 А. К. Гущин, “Интеграл площадей Лузина и некасательная максимальная функция для решений эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 209:6 (2018), 47–64
А. К. Гущин, “Lp-оценки некасательной максимальной функции для решения эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 207:10 (2016), 28–55
А. К. Гущин, “О разрешимости задачи Дирихле для неоднородного эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 206:10 (2015), 71–102 А. К. Гущин, “Lp-оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ТМФ, 174:2 (2013), 243–255
А. К. Гущин, “О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка”, Сиб. матем. журн., 46:5 (2005), 1036–1052
А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения”, Докл. РАН, 351:1 (1996), 7–8
А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., 182:6 (1991), 787–810 А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 137(179):1(9) (1988), 19–64

# Краевые задачи уравнений математической физики


А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “Теоремы сравнения для решений гиперболических уравнений”, Матем. сб., 134(176):3(11) (1987), 353–374

А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О равномерной квазиасимптотике решений второй смешанной задачи для гиперболического уравнения”, Матем. сб., 131(173):4(12) (1986), 419–437

А. К. Гущин, В. П. Михайлов, Ю. А. Михайлов, “О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 128(170):2(10) (1985), 147–168

А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О равномерной стабилизации решения задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка”, Современные проблемы математики. Дифференциальные уравнения, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Льву Семеновичу Понтрягину к его семидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, 166, 1984, 76–90

А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях в Lp, p>1>1, решений эллиптических уравнений”, Матем. сб., 108(150):1 (1979), 3–21

А. К. Гущин, “Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка”, Матем. сб., 101(143):4(12) (1976), 459–499

# Краевые задачи уравнений математической физики

А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с одной пространственной переменной”, Тр. МИАН СССР, 112, 1971, 181–202
А. К. Гущин, “О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения”, Сиб. матем. журн., 10:1 (1969), 43–57
В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей”, Матем. сб., 101(143):2(10) (1976), 163–188 В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Дифференц. уравнения, 12:10 (1976), 1877–1891 В. П. Михайлов, “Первая краевая задача для квазиэллиптических и квазипараболических уравнений”, Граничные задачи для дифференциальных уравнений, Тр. МИАН СССР, 91, 1967, 81–99
x В. П. Михайлов, “О поведении на бесконечности одного класса многочленов”, Граничные задачи для дифференциальных уравнений, Тр. МИАН СССР, 91, 1967, 59–80
В. П. Михайлов, “Первая краевая задача для некоторых полуограниченных гипоэллиптических уравнений”, Матем. сб., 64(106):1 (1964), 10–51
В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для параболического уравнения. II”, Матем. сб., 62(104):2 (1963), 140–159 В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для параболического уравнения. I”, Матем. сб., 61(103):1 (1963), 40–64
О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гущин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, Тр. МИАН СССР, 175, 1986, 63–102

**Премии и награды:**

**В.П. Михайлов: премия П.Л. Чебышова, 1978 г**

**Премия И.Г. Петровского, 2001 г.- А.К. Гущин, В.П. Михайлов**

**А.К. Гущин: орден "Знак Почета 1986 г.**

**Геометрическая теория дефектов**

**И.В. Волович, М.О. Катанаев**

# Геометрическая теория дефектов
# И.В. Волович, М.О. Катанаев

**Предложена теория дефектов в твердых телах, основанная на трехмерной геометрии Римана-Картана с использованием метрики и кручения. Свободная энергия включает скалярную кривизну и квадратичные по кривизне и кручению тензоры**

$$F = R + \beta R^2 + \dots$$

# Геометрическая теория дефектов
# И.В. Волович, М.О. Катанаев

- Многие твердые тела обладают кристаллической структурой. Однако в природе идеальных кристаллов не существует, и большинство их физических свойств, таких как пластичность, плавление, рост и др., определяется дефектами кристаллической структуры. Поэтому изучение дефектов является актуальной научной проблемой, важной, в первую очередь, для приложений.
- Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования дефектов в кристаллах начались в 30-е годы прошлого века и продолжаются по сей день. Несмотря на десятки монографий и тысячи статей, фундаментальная теория дефектов в настоящее время отсутствует.

# Геометрическая теория дефектов

- **Один из перспективных подходов к созданию теории дефектов основан на геометрии Римана–Картана, которая задается нетривиальной метрикой и кручением. В этом подходе упругая среда рассматривается, как топологически тривиальное многообразие $(x^i) \in \mathbb{M} \approx \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$.**

- **Упругие деформации соответствуют диффеоморфизмам**

$$y^i \mapsto x^i + u^i(x),$$

**где $u^i(x)$ – гладкое векторное поле смещений. Если векторное поле смещений имеет разрывы, то в среде существуют дефекты, которые называются дислокациями.**

# Геометрическая теория дефектов

- **Отдельные дефекты можно описать векторным полем смещений с соответствующими граничными условиями на поверхностях разрыва.**
- **Однако такой подход при наличии многих дислокаций приводит к очень сложным граничным условиям, что делает задачу неразрешимой.**
- **Более того, в континуальном приближении векторное поле смещений просто не существует, так как имеются разрывы в каждой точке. Геометрический подход предложен, в частности, для решения таких задач.**

# Геометрическая теория дефектов

**Идея связать кручение с дислокациями возникла в пятидесятые годы прошлого века в статьях:**

**K. Kondo, On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. (1952)**

**J. F. Nye, Some geometrical relations in dislocated media. (1953)**

**E. Kröner, Kontinums Theories der Versetzungen und Eigenspanungen. (1958)**

**L. I. Sedov and V. L. Berditchevski, A dynamical theory of dislocations. (1967).**

**и успешно развивается до сих пор.**

# Геометрическая теория дефектов

- **Основная идея заключается в следующем.**
- **Предполагается, что на поверхностях разрыва частные производные векторного поля смещений являются достаточно гладкими функциями и заменяются новыми переменными (репером):**

$$e_\mu{}^i(x) := \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu},$$

  **где $x^\mu$, $\mu = 1, 2, 3$, – произвольная криволинейная система координат.**
- **Уравнения равновесия пишутся для репера, и они могут иметь решения даже в случае непрерывного распределения переменных, когда векторное поле смещений не существует.**

# Геометрическая теория дефектов

- **Предлагаемый геометрический подход позволяет включить в рассмотрение также другие дефекты, не относящиеся непосредственно к дефектам упругой среды.**
- **А именно, многие тела обладают не только упругими свойствами, но и спиновой структурой. Например, распределение спинов в ферромагнетике описывается единичным векторным полем.**

# Геометрическая теория дефектов

- **В этом случае существуют дефекты в спиновой структуре, которые называются дисклинациями.**
- **Они возникают тогда, когда поле угла поворота $\omega^{ij}(x)$ имеет разрывы на каких-либо поверхностях. Как и в случае поля смещений, мы вводим вместо поля угла поворота новые переменные**

$$\omega_\mu{}^{ij}(x) := \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial x^\mu},$$

**предполагая, что частные производные являются достаточно гладкими функциями на поверхностях разрыва.**

# Геометрическая теория дефектов

- **По-построению, новые переменные являются компонентами $\mathbb{SO}(3)$-связности на многообразии $\mathbb{M}$.**
- **Напомним, что тензоры кривизны и кручения в переменных Картана имеют вид**

$$T_{\mu\nu}{}^i = \partial_\mu e_\nu{}^i - \partial_\nu e_\mu{}^i - e_\mu{}^j \omega_{\nu j}{}^i + e_\nu{}^j \omega_{\mu j}{}^i,$$
$$R_{\mu\nu}{}^{ij} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ij} - \omega_\mu{}^{ik} \omega_{\nu k}{}^j + \omega_\nu{}^{ik} \omega_{\mu k}{}^j.$$

# Геометрическая теория дефектов

- Сравнение обычного и геометрического подходов для линейных дислокаций придает физический смысл тензорам кручения и кривизны.
- А именно, они являются поверхностными плотностями векторов Бюргерса и Франка, которые характеризуют линейные дислокации и дисклинации, соответственно.
- Такой подход был предложен в статьях

M. O. Katanaev and I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity, Ann.Phys. 1992.
М. О. Катанаев. Геометрическая теория дефектов, УФН, 2005.

# Геометрическая теория дефектов

- Эта модель с единой точки зрения описывает дислокации и дисклинации, причем она применима для описания как отдельных дефектов, так и их непрерывного распределения.
- В тех областях пространства, где кручение и кривизна равны нулю, можно восстановить векторные поля смещений и поворотов, и мы возвращаемся к обычной теории упругости.

# Геометрическая теория дефектов

- **В настоящее время исследуются различные варианты выбора выражения для свободной энергии в геометрической теории дефектов, приводящего к уравнениям равновесия. Доказано, что трехмерное евклидово действие Гильберта–Эйнштейна в линейном приближении воспроизводит результаты классической теории упругости. В качестве свободной энергии рассмотрено также действие Черна–Саймонса для $\mathbb{SO}(3)$-связности.**
- **Показано, что оно описывает, в частности, произвольное распределение параллельных линейных дисклинаций. Кроме того, хорошо известное в квантовой теории поля решение ’т Хоофта–Полякова имеет прямую физическую интерпретацию в геометрической теории дефектов: оно описывает непрерывное распределение дисклинаций.**

# Струна с динамическим кручением
# И.В. Волович, М.О. Катанаев

**Katanayev, M. O., Volovich, I. V. (1986). String model with dynamical geometry and torsion. Physics Letters B, 175(4), 413-416.**

**Katanaev, M. O., Volovich, I. V. (1990). Two-dimensional gravity with dynamical torsion and strings. Annals of Physics, 197(1), 1-32.**

# О работах В.В. Жаринова

# О работах В.В. Жаринова

**В.В. Жаринов, Дистрибутивные структуры и и приложения в комплексном анализе. Труды МИАН, Наука, Москва, 1983.**

**Монография (докторская диссертация) посвящена приложениям дистрибутивных структур (решеток) к задачам многомерного комплексного анализа. Расширена в духе Мартино теорема “об острие клина” Боголюбова, которая формулируется как точность определенной гомологической последовательности в различных классах аналитических функций.**

# О работах В.В. Жаринова

- **Систематически изучены два класса аналитических функционалов (фурье-гиперфункции и фурье-ультрагиперфункции) на основе дистрибутивных решеток линейных пространств.**
- **С этой целью получены гомологические характеристики дистрибутивных решеток подмодулей и формулы двойственности для двойственных решеток локально выпуклых пространств.**

# О работах В.В. Жаринова

**Zharinov V. V., Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations, World Scientific, Singapore, 1992**

- **Геометрический подход – естественный мощный язык для изучения симметрий, законов сохранения, отображений Ли-Беклунда, отношений Беклунда и других подобных свойств уравнений в частных производных.**
- **В монографии доступно излагается язык и техника для работы в данной области. В рамках внутренней геометрии изложены инфинитезимальные симметрии и законы сохранения уравнений в частных производных.**

# О работах В.В. Жаринова

- Особое внимание уделено спектральным последовательностям А.М. Виноградова, ассоциированным с дифференциальными уравнениями. формальному вариационному исчислению и эволюционным уравнениям.
- В рамках внешней геометрии изучены характеристики законов сохранения, низко размерные (относительно числа независимых переменных) законы сохранения и отношения (преобразования) Беклунда. В последней главе рассмотрены лагранжев и гамильтонов формализмы.

# О работах В.В. Жаринова

**В. В. Жаринов, “Бинарные отношения, преобразования Беклунда и распространение волновых пакетов”, ТМФ, 205:1 (2020), 3–22.**
**V. V. Zharinov, “Dynamics of wave packets in the functional mechanics”, Int. J. Mod. Phys. A, 37:20-21 (2022).**
**V. V. Zharinov, “Symmetries and conservation laws of the Liouville equation”, Изв. РАН. Сер. матем., 87:5 (2023), 92–98.**

**Развиты математические основы функциональной механики на базе уравнения Лиувилля. Изучены симметрии и законы сохранения уравнения Лиувилля на примере различных моделей. Изучена связь гамильтоновой и лагражевой моделей классической механики с функциональной механикой.**

# О работах В.В. Жаринова

В рамках алгебро-геометрического подхода к уравнениям в частных производных изучены следующие вопросы.

В. В. Жаринов, “Уравнения Навье–Стокса, алгебраический подход”, ТМФ, 209:3 (2021), 397–413.

Установлена возможность эффективного описания уравнения Навье-Стокса в терминах алгебраического подхода. Дано описание симметрий и когомологий бикомплекса, ассоциироанного с уравнением Навье-Стокса. Найдено описание уравнения Навье-Стокса, как эволюция в пространстве с нулевой дивергенцией.

# О работах В.В. Жаринова

**В. В. Жаринов, “Алгебра калибровочных теорий”, ТМФ, 203:2 (2020), 179–191.**

**Показано, что калибровочные теории имеют прочную алгебраическую базу, допускают описание и изучение в рамках алгебраического подхода к уравнениям в частных производных. В частности, когда базовая алгебра унитальная коммутативная и ассоциативная, алгебраический подход полностью совпадает с классическим.**

# О работах В.В. Жаринова

**В. В. Жаринов, “О гамильтоновых операторах в дифференциальных алгебрах”, ТМФ, 193:3 (2017), 369–380 .**

**В. В. Жаринов, “Гамильтоновы операторы при наличии связей в виде условий нулевой дивергенции”, ТМФ, 200:1 (2019), 3–18**

**Предложен общий метод нахождения системы уравнений, определяющих гамильтоновы операторы, ассоциированные с данной дифференциальной алгеброй. В явном виде построена определяющая система уравнений для нахождения гамильтоновых операторов, ассоциированных с дифференциальной алгеброй при наличии дифференциальных связей в виде нулевой дивергенции. Построенная система изучена и найден простой класс ее решений. Это показывает, что предложенная система совместная и может быть явно решена в простых случаях. В более сложных ситуациях вычисления становятся весьма громоздкими и требуются компьютерные методы.**

# О работах В.В. Жаринова

**В. В. Жаринов, "О спектральных последовательностях эволюционных систем со связями", Матем. сб., 184:5 (1993), 39–54 .**
**V. V. Zharinov, "Low-dimensional conservation laws of PDE", Тр. МИАН, 203, Наука, М., 1994, 478–493.**
**В. В. Жаринов, "Законы сохранения, дифференциальные тождества и связи уравнений в частных производных", ТМФ, 185:2 (2015), 227–251.**
**В. В. Жаринов, "Эволюционные системы со связями в виде условий нулевой дивергенции", ТМФ, 163:1 (2010), 3–16.**
**В. В. Жаринов, "Симметрии и законы сохранения разностных уравнений", ТМФ, 168:2 (2011), 195–211.**
**В. В. Жаринов, "Эволюционные системы на решетке", ТМФ, 157:3 (2008), 391–405.**

**Разработан аппарат нахождения и изучения симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных и разностных уравнений. В ряде простых случаев решения получены в явном виде. Опять в сложных ситуациях требуются компьютерные методы.**

# О работах В.В. Жаринова

**В. В. Жаринов, "О когомологиях алгебры Гейзенберга", Проблемы современной математической физики, Тр. МИАН, 228, Наука, М., 2000, 61–75**
**В. В. Жаринов, "Когомологии алгебры Ли векторных полей на прямой", ТМФ, 128:2 (2001), 147–160.**
**В. В. Жаринов, "О когомологиях алгебры Пуассона", ТМФ, 136:2 (2003), 179–196.**
**В. В. Жаринов, "Когомологии Хохшильда алгебры гладких функций", ТМФ, 140:3 (2004), 355–366.**
**В. В. Жаринов, "Когомологии пространств основных функций Шварца", ТМФ, 170:3 (2012), 323–334.**
**В. В. Жаринов, "Когомологии пространств обобщенных функций Шварца", ТМФ, 172:1 (2012), 3–8.**

**Для популярных моделей математической физики изучались когомологии ассоциированных дифференциальных алгебр. В ряде частных случаев получены явные результаты, включая полные описания.**

# О работах А.Н. Печеня

# О работах А.Н. Печеня

1) Разработан метод вывода поправок к пределу слабой связи в теории открытых квантовых систем на основе квантового мультипольного шума с коммутационными соотношениями

$$[b(t), b(t')] = i^n \delta^{(n)}(t - t')$$

A. Pechen, I. V. Volovich, "Quantum multipole noise and generalized quantum stochastic equations Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 5:4 (2002), 441–464

Явно построено представление квантового мультипольного шума в бесконечном тензорном произведении гильбертовых и псевдогильбертовых пространств А. Н. Печень, "Об одном асимптотическом разложении в квантовой теории Матем. заметки, 75:3 (2004), 459–461

**2) Выведено квантовое стохастическое уравнение Ланжевена для открытых квантовых систем в пределе малой плотности:**

**L. Accardi, A. Pechen, I. V. Volovich, "Quantum stochastic equation for the low density limit J. Phys. A, 35:23 (2002), 4889–4902**

**L. Accardi, A. Pechen, I. V. Volovich, "A stochastic golden rule and quantum Langevin equation for the low density limit Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 6:3 (2003), 431–453**

# О работах А.Н. Печеня

**3) Обнаружено возникновение свободной вероятности (free probability) и квантового шума с коммутационными соотношениями $B(t)B^{+}(t') = \delta(t - t')$ при описании предела малой плотности:**

**A. N. Pechen, "The multi-time correlation functions, free white noise, and the generalized Poisson statistics in the low density limit J. Math. Phys., 47 (2006), 033507**

# О работах А.Н. Печеня

4) Разработаны методы управления открытыми квантовыми системами с помощью резервуара:

A. Pechen, H. Rabitz, "Teaching the environment to control quantum systems Phys. Rev. A, 73 (2006), 062102
A. Pechen, "Engineering arbitrary pure and mixed quantum states Phys. Rev. A, 84:4 (2011), 042106

и с помощью неселективных квантовых измерений:
A. Pechen, N. Il'in, F. Shuang, H. Rabitz, "Quantum control by von Neumann measurements Phys. Rev. A, 74 (2006), 052102
A. N. Pechen, A. S. Trushechkin, "Measurement-assisted Landau-Zener transitions Phys. Rev. A, 91:5 (2015), 052316

# О работах А.Н. Печеня

A. Pechen, I. V. Volovich, “Quantum multipole noise and generalized quantum stochastic equations”, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 5:4 (2002)

A. Pechen, H. Rabitz, “Teaching the environment to control quantum systems”, Phys. Rev. A, 73 (2006), 062102

L. Accardi, A. Pechen, I. V. Volovich, “A stochastic golden rule and quantum Langevin equation for the low density limit”, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 6:3 (2003), 431–453

# О работах А.Г. Сергеева

**А.Г.Сергеевым получены следующие результаты в области многомерного комплексного анализа и математической физики.**

**1. Докторская диссертация А.Г.Сергеева, защищенная в Математическом институте им В.А.Стеклова РАН в 1989 г. посвящена решению с оценками неоднородных уравнений Коши-Римана и описанию комплексной геометрии трубчатых областей. Дальнейшее развитие этой тематики привело к доказательству известной гипотезы о расширенной трубе будущего. Эта гипотеза, возникшая в школах Н.Н.Боголюбова и А.С.Уайтмана, относится к аксиоматической квантовой теории поля, в основе которой лежит понятие N-точечных функций Уайтмана.**

# О работах А.Г. Сергеева

**Функции Уайтмана голоморфны в произведении N экземпляров трубы будущего и инвариантны относительно диагонального действия группы Лоренца. Гипотеза утверждает, что эти функции на самом деле голоморфно продолжаются в более широкую область, называемую расширенной трубой будущнго. Она была доказана в работах А.Г.Сергеева и немецкого математика П.Хайнцнера в компактной версии и учеником А.Г.Сергеева китайским математиком Чжоу Щаньюем в общем случае.**

**2. Исследование кэлеровой геометрии бесконечномерных комплексных многообразий позволило построить квантование универсального пространства Тейхмюллера, играющего ключевую роль в теории струн. Этим результатам посвящены три монографии, изданные в России и за рубежом, и статья «В поисках бесконечномерной кэлелеровой геометрии в «Успехах матем. наук».**

**3. Исследование адиабатического предела в уравнениях Зайберга–Виттена и Гинзбурга–Ландау. В работах, посвященных этой теме, дана математическая интерпретация указанного предела и показано, что адиабатический предел в уравнениях Зайберга-Виттена можно рассматривать как комплексную версию аналогичного предела в уравнениях Гинзбурга-Ландау. Этой теме посвящена монография, изданная в Японии, и статья в "Трудах Математического института им. В.А.Стеклова".**

# О работах А.Г. Сергеева

**4. Твисторный подход применен А.Г.Сергеевым к исследованию гармонических отображений компактных римановых поверхностей в пространства петель компактных групп Ли. Им сформулирована гипотеза о гармонических сферах, связывающая такие отображения с полями Янга-Миллса на $\mathbb{R}^4$, и получен ряд результатов в направлении ее решения. Этой теме посвящена монография, изданная в России.**

**5. Математические методы в теории твердого тела. В работах, посвященных этой теме, строится математическая теория топологических диэлектриков. Задача об описании топологических инвариантов этих твердых тел сводится к описанию топологии пространства непрерывных отображений тора в грассмановы многообразия. Особое внимание уделяется диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени. Для них определяются аналитический и топологический $\mathbb{Z}_2$-индексы, которые совпадают благодаря варианту теоремы Атьи-Зингера об индексе.**

# О работах А.Г. Сергеева

1) А.Г.Сергеев, П.Хайнцнер. Расширенный матричный диск является областью голоморфности, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 (1991), 647–657.
2) А.Г.Сергеев, Щаньюй Чжоу. Гипотеза о расширенной трубе будущего, Труды МИАН, 228 (2000), 32–51.
3) А.Г.Сергеев. В поисках бесконечномерной кэлеровой геометрии, Успехи матем. наук, 75:2 (2020), 133–184.
4) A.G.Sergeev, Lectures on universal Teichmüller space, EMS Series of Lectures in Mathematics, EMS Publshing House, Zürich, 2014.
5) А.Г.Сергеев, Квантование соболевского пространства полудифференцируемых функций, Матем. сборник, 207:10 (2016), 96–104. 6) А.Г.Сергеев, Адиабатический предел в уравнениях Гинзбурга-Ландау и Зайберга-Виттена, Труды МИАН, 189 (2025), 242-303
7) A.G.Sergeev, Vortices and Seiberg–Witten equations, Nagoya Math. Lect., Nagoya Univ., Nagoya, 2002 ,
8) А.Г.Сергеев, Гармонические отображения, Лекц. курсы НОЦ, 10, МИАН, М., 2008
9) А.Г.Сергеев, О математических задачах в теории топологических диэлектриков, Теор. матем. Физика, 208:2 (2021), 342–354

# О работах А.С. Трушечкина

# О работах А.С. Трушечкина

- **В области математических оснований статистической механики и необратимости:**
  - **Доказано существование микроскопических (сингулярных) решений нелинейного интегро-дифференциального кинетического уравнения Больцмана–Энскога (совместно с М. Пульвиренти и С. Симонеллой).**
  - **Эти решения были открыты Н. Н. Боголюбовым на «физическом» уровне строгости и важны в установлении соответствия между обратимой микроскопической динамикой и необратимой макроскопической динамикой.**

# О работах А.С. Трушечкина

- В области квантовой криптографии:

- Доказана стойкость наиболее широко использующегося протокола BB84 при детекторах с несовпадающими эффективностями — в практическом и гораздо более математически сложном случае (по сравнению с идеальным оборудованием). Математическая трудность заключалась в получении оценок квантовых энтропийных характеристик в бесконечномерном пространстве.
- Этот результат включен в список важнейших достижений российских ученых в области математики за 2020 год.
- присуждена премия Правительства Москвы молодым ученым за 2022 год в номинации «Математика, механика и информатика»

# О работах А.С. Трушечкина

- **В области математических оснований теории открытых квантовых систем:**

- **На основе теории возмущений получено строгое обоснование локального подхода к построению квантовых кинетических уравнений (совместно с И. В. Воловичем). Этот результат важен, поскольку локальный подход к построению квантовых кинетических уравнений, будучи более простым, широко используется в теоретической физике, но не имел должного строгого обоснования.**
- **Строго выведено универсальное квантовое кинетическое уравнение для режима слабой связи с резервуаром без секулярного приближения, что являлось известной фундаментальной проблемой в этой области.**

# О работах А.С. Трушечкина

**Краткое описание первого результата. Уравнение Больцмана–Энскога (кинетическое уравнение для газа из твёрдых шаров):**

$$(\partial_t + v\cdot\nabla_x) f(x,v,t) = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{S^2_+} d\omega\, (v - v_1)\cdot\omega$$

$$\Big\{ f(x - a\omega, v_1', t) f(x, v', t) - f(x + a\omega, v_1, t) f(x,v,t) \Big\},$$

**где** $f = f(x,v,t) \geq 0$ **— функция плотности частиц, зависящая от точки в физическом (конфигурационном) пространстве** $x \in \mathbb{R}^3$**, скорости** $v \in \mathbb{R}^3$ **и времени** $t \in \mathbb{R}$**. Далее,** $a > 0$ **— диаметр твердого шара.**

# О работах А.С. Трушечкина

**Если функция $f$ нормирована на единицу, т.е. $\int_{\mathbb{R}^6} f(x,v,t)\,dxdv = 1$, то её можно понимать как функцию плотности вероятности нахождения шара в точке фазового пространства $(x,v)$ в момент $t$.**

**Далее, $S^2_+ = \{\omega \in S^2 |\ (v - v_1)\cdot\omega \geq 0\}$, где $S^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (с поверхностной мерой $d\omega$).**

**Далее, $(v, v_1)$ — скорости пары шаров перед столкновением, $(v', v_1')$ — после (упругого) столкновения, $\omega$ — единичный вектор, направленный из центра первого шара (без нижнего индекса) в центр второго шара (с нижним индексом 1).**

# О работах А.С. Трушечкина

**Скорости до и после столкновения связаны соотношениями**

$$v' = v - \omega[\omega \cdot (v - v_1)],$$
$$v_1' = v_1 + \omega[\omega \cdot (v - v_1)].$$

**Наконец, $\lambda > 0$ — параметр, управляющий частотой столкновений.**

**Уравнение Больцмана–Энскога представляет собой уточнение уравнение Больцмана для случая газа из твёрдых шаров. Как и уравнение Больцмана, оно описывает, вообще говоря, необратимую динамику: для него также справедлива $H$-теорема (с соответствующим образом определённой $H$-функцией).**

# О работах А.С. Трушечкина

- **Наблюдение Н. Н. Боголюбова (1975) заключается в том, что это уравнение обладает также и решениями, которые соответствуют точной (обратимой) динамике конечного числа $N$ шаров. А именно, если $\lambda = Na^2$, то**

$$f(z,t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(z - z_i(t))$$

**есть решение уравнения Больцмана–Энскога.**

- **Здесь $z = (x, v) \in \mathbb{R}^6$ — точка в фазовом пространстве, $z_i(t) = (x_i(t), v_i(t))$ — положение $i$-го шара в фазовом пространстве в момент $t$.**

# О работах А.С. Трушечкина

Динамика конечного числа твердых шаров корректно определена для почти всех начальных фазовых точек. Будем предполагать, что динамика корректно определена.

Н. Н. Боголюбов назвал эти решения микроскопическими, поскольку они соответствуют микроскопической динамике.

Однако Н. Н. Боголюбов получил этот результат на «физическом» уровне строгости, оставив математически строгую проработку на будущее. В частности, математически строгая формулировка результата должна включать определение решения уравнения Больцмана–Энскога в смысле обобщённых функций или в смысле мер.

# О работах А.С. Трушечкина

- **Математически строгое обоснование существование микроскопических решений уравнения Больцмана–Энскога получено в серии работ А. С. Трушечкина,**

**M. Pulvirenti, S. Simonella, A. Trushechkin, “Microscopic solutions of the Boltzmann-Enskog equation in the series representation”, *Kinet. Relat. Models* 11(4) (2018), 911–931.**

# О работах А.С. Трушечкина

- Сформулируем теорему сначала неформально:
- Теорема. Мера

$$\mu_t(dz) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(z - z_i(t))dz$$

  есть мерозначное решение уравнения Больцмана–Энскога.
- Для неформального определения нужно придать смысл мерозначным решениям уравнения Больцмана–Энскога.

# О работах А.С. Трушечкина

**Для этого перепишем уравнение Больцмана–Энскога в интегральном виде:**

$$f(x,v,t) = f_0(x-vt,v) + \int_0^t ds\,\mathcal{S}_{t-s}\Big\{\int_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int_{S^2_+} d\omega\,(v-v_1)\cdot\omega\times$$

$$\times\ \Big[f(x-a\omega,v_1',t)f(x,v',s) - f(x+a\omega,v_1,s)f(x,v,s)\Big]\Big\},$$

**где** $f_0(x,v) = f(x,v,0)$ **— функция плотности в начальный момент времени,**
$\mathcal{S}_t$ **— оператор сдвига вдоль динамического потока свободной частицы, т.е.**

$$\mathcal{S}_t g(x,v) = g(x-vt,v).$$

**Пусть $\varphi(x, v)$ — произвольная ограниченная непрерывная (пробная) функция. Тогда**

$$\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(x_1, v_1) f(x_1, v_1, t)\, dx_1 dv_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{a^2}\right)^n \sum_{\mathbf{k}_n} \sum_{\boldsymbol{\sigma}_n \in \{\pm 1\}^n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \int_{A_{\mathbf{k}_n \boldsymbol{\sigma}_n}(t)} \varphi(\zeta_1(t)) f_0^{\otimes(n+1)}(\boldsymbol{z}_{n+1})\, d\boldsymbol{z}_{n+1}\ , \tag{8}$$

**где $n$ — число столкновений, $\mathbf{k}_n$ — предписание того, какие частицы в какой последовательности сталкиваются, $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — знаки, которые зависят от того, рассматриваем ли мы для соответствующего столкновения скорости после этого столкновения (знак «$+$») или до (знак «$-$»).**

**Где $A_{\mathbf{k}_n\boldsymbol{\sigma}_n}(t)$ — совокупность всех начальных состояний в фазовом пространстве $n+1$ шаров $\boldsymbol{z}_{n+1}$, которые не противоречат предписанной последовательности столкновений $\mathbf{k}_n$ и знакам $\boldsymbol{\sigma}_n$, $\zeta_1(t)$ — координата и скорость первой частицы при начальном состоянии $n+1$ частицы $A_{\mathbf{k}_n\boldsymbol{\sigma}_n}(t)$.**

**Можно доказать, что ряд (8) сходится для всех**

**$t > 0$ при $f^0 \in L^1(\mathbb{R}^6)$ и $\lambda < a^2/8\|f_0\|$.**

**Теперь можно обобщить выражение (8) на случай не обязательно абсолютно непрерывных мер $f(x_1, v_1, t)dx_1dv_1$, но произвольных борелевских мер $\mu_t(dx_1, dv_1)$:**

$$\int_{\mathbb{R}^6} \varphi(x_1, v_1)\mu_t(dx_1 dv_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{a^2}\right)^n \sum_{\mathbf{k}_n} \sum_{\boldsymbol{\sigma}_n \in \{\pm 1\}^n} \tag{9}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \sigma_i \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{A^{\varepsilon}_{\mathbf{k}_n \boldsymbol{\sigma}_n}(t)} \varphi\left(\zeta_1(t)\right) \mu_0^{n+1}(d\mathbf{z}_{n+1}).$$

**Здесь для случая сингулярных мер потребовалась регуляризация. А именно, для каждой частицы промежуток между столкновениями с другими частицами должен составлять по меньшей мере $\varepsilon$. $A^{\varepsilon}_{\mathbf{k}_n \boldsymbol{\sigma}_n}(t)$ — множество начальных состояний $n+1$ твёрдых шаров, которые приводят к динамике твёрдых шаров, обладающей этим свойством.**

# О работах А.С. Трушечкина

- **Определение.**

  **Будем говорить, что борелевская мера $\mu_t(x, v)$ есть мерозначное решение уравнение Больцмана–Энскога, если для произвольной ограниченной непрерывной функции $\varphi$ уравнение (9) выполнено для почти всех $t$.**

- **Отметим, что требование почти всех $t$ связано с моментами столкновений, при которых скорости шаров претерпевают разрыв.**
  **Именно в смысле данного определения мерозначного решения верна теорема ??.**

# О работах Н.Г. Марчука по Клиффордым алгебрам и теории поля

- **N. Marchuk, Field theory equations, Amazon, CreateSpace, 2012**
- **Н. Г. Марчук, Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда, РХД, Ижевск, 2009**
- **Н. Г. Марчук, Д. С. Широков, Введение в теорию алгебр Клиффорда, Фазис, Москва, 2012**

# О некоторых работах И.В. Воловича

**О работах И.В. Воловича по стохастическому пределу в квантовой теории**
**L. Accardi, Lu Yun Gang, I. Volovich, Quantum theory and its stochastic limit, Springer-Verlag, Berlin, 2002**

**О работах И.В. Воловича по квантовым компьютерам и неравенствам Белла**

- **Атомный квантовый компьютер**
- **NP-полная задача**
- **Неравенства Белла и пространственно-временные корреляции**

**M. Ohya, I. Volovich, Mathematical foundations of quantum information and computation and its applications to nano- and bio-systems, Springer, Dordrecht, 2011**

# О проблеме потери информации в черных дырах

[1] Aref'eva, I. Y., Volovich, I. V. E., Rusalev, T. A.. Entanglement entropy of a near-extremal black hole. TMP 212 (2022) 1284-1302.
[2] Ageev, D. S., Aref'eva, I. Y., Belokon, A. I., Ermakov, A. V., Pushkarev, V. V., Rusalev, T. A. Infrared regularization and finite size dynamics of entanglement entropy in Schwarzschild black hole. Phys. Rev. D, 108 (2023) 046005.
[3] Aref'eva, I., Volovich, I. Violation of the third law of thermodynamics by black holes, Riemann zeta function and Bose gas in negative dimensions. EPJ Plus, 139 (2024) 300.
[4] Stepanenko, D., Volovich, I. Schwarzschild black holes, Islands and Virasoro algebra. EPJ Plus, 138 (2023) 1-7.

# Геометрия пространства-времени и операторные алгебры

- <u>Геометрия</u> пространства-времени

**vs.**

- операторная <u>алгебра</u>

**Черные дыры. Космология. Квантовая гравитация**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = -\lambda\phi^3, \qquad \phi = \phi(t, \mathbf{x})$$

$$Z = \sum_{topologies M} \int Dg D\phi e^{iS_M(g,\phi)}$$

**Квантовая гравитация $\sim$ Геометрическая алгебра ?**

**Выражаю благодарность сотрудникам отдела и аспиранту Т. Русалеву за большую работу, проделанную при подготовке этого доклада**

# Спасибо за внимание!