# Отдел математических методов квантовых технологий

Александр Николаевич Печень
(совм. с: Д.С. Агеев, И.В. Ермаков, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, О.В. Лычковский, А.Е. Теретенков)

МИАН-90

Москва, 2024

## История отдела

декабрь 2016 — создание в составе МИАН лаборатории математических методов квантовых технологий (А.Н. Печень, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, О.В. Лычковский)

## История отдела

декабрь 2016 — создание в составе МИАН лаборатории математических методов квантовых технологий (А.Н. Печень, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, О.В. Лычковский)

декабрь 2018 — преобразование лаборатории в одноименный отдел (А.Н. Печень, Д.С. Агеев, И.В. Ермаков, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, О.В. Лычковский, К.А. Ляхов, О.В. Моржин, А.Е. Теретенков, М.Д. Тихановская, С.Н. Филиппов, М.А. Храмцов)

## Близкие направления

Отдел математической физики: Открытые квантовые системы.
Отдел теории вероятностей и мат. стат.: Квантовая теория информации.
Отдел теоретической физики: Интегрируемые системы, КТП.

## Близкие направления

Отдел математической физики: Открытые квантовые системы.
Отдел теории вероятностей и мат. стат.: Квантовая теория информации.
Отдел теоретической физики: Интегрируемые системы, КТП.

1943 И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала]. Для любой $C^*$-алгебры $A$ существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и изометрический *-гомоморфизм $A \to B(\mathcal{H})$, где $B(\mathcal{H})$ — алгебра непрерывных операторов на $\mathcal{H}$. [И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Математический сборник. — 1943. — Т. 12. — С. 197–213].

# Близкие направления

Отдел математической физики: Открытые квантовые системы.
Отдел теории вероятностей и мат. стат.: Квантовая теория информации.
Отдел теоретической физики: Интегрируемые системы, КТП.

1943 И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала]. Для любой $C^*$-алгебры $A$ существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и изометрический *-гомоморфизм $A \to B(\mathcal{H})$, где $B(\mathcal{H})$ — алгебра непрерывных операторов на $\mathcal{H}$. [И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Математический сборник. — 1943. — Т. 12. — С. 197–213].

1946 Н.Н. Боголюбов, предел Боголюбова-ван Хова [Н.Н. Боголюбов «Проблемы динамической теории в статистической физике» — М.-Л.: Гостехиздат, 1946].

## Близкие направления

Отдел математической физики: Открытые квантовые системы.
Отдел теории вероятностей и мат. стат.: Квантовая теория информации.
Отдел теоретической физики: Интегрируемые системы, КТП.

1943 И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала]. Для любой $C^*$-алгебры $A$ существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и изометрический *-гомоморфизм $A \to B(\mathcal{H})$, где $B(\mathcal{H})$ — алгебра непрерывных операторов на $\mathcal{H}$. [И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Математический сборник. — 1943. — Т. 12. — С. 197–213].

1946 Н.Н. Боголюбов, предел Боголюбова-ван Хова [Н.Н. Боголюбов «Проблемы динамической теории в статистической физике» — М.-Л.: Гостехиздат, 1946].

1956–1961 Принцип максимума Понтрягина [Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко Математическая теория оптимальных процессов, 1961; В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Л.С. Понтрягин К теории оптимальных процессов // ДАН СССР. 1956. Т. 110, № 1. С. 7–10].

## Близкие направления

Отдел математической физики: Открытые квантовые системы.
Отдел теории вероятностей и мат. стат.: Квантовая теория информации.
Отдел теоретической физики: Интегрируемые системы, КТП.

1943 И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [конструкция Гельфанда — Наймарка — Сигала]. Для любой $C^*$-алгебры $A$ существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и изометрический *-гомоморфизм $A \to B(\mathcal{H})$, где $B(\mathcal{H})$ — алгебра непрерывных операторов на $\mathcal{H}$. [И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве // Математический сборник. — 1943. — Т. 12. — С. 197–213].

1946 Н.Н. Боголюбов, предел Боголюбова-ван Хова [Н.Н. Боголюбов «Проблемы динамической теории в статистической физике» — М.-Л.: Гостехиздат, 1946].

1956–1961 Принцип максимума Понтрягина [Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко Математическая теория оптимальных процессов, 1961; В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Л.С. Понтрягин К теории оптимальных процессов // ДАН СССР. 1956. Т. 110, № 1. С. 7–10].

1962 В.Ф. Кротов, диссертация к.ф.-м.н. в МИАН «Новый метод вариационного исчисления и некоторые его приложения».

# Близкие направления

1980 Ю.И. Манин, Вычислимое и невычислимое. — М. Сов. радио. 1980.

Возможно, для прогресса в понимании таких явлений нам недостает математической теории квантовых автоматов Такие объекты могли бы показать нам математические модели детерминированных процессов с совершенно непривычными свойствами. Одна из причин этого в том, что квантовое пространство состояний обладает гораздо большей емкостью, чем классическое: там, где в классике имеется $N$ дискретных состояний, в квантовой теории, допускающей их суперпозицию, имеется $c^N$ планковских ячеек. При объединении классических систем их числа состояний $N_1$ и $N_2$ перемножаются, а в квантовом варианте получается $c^{N_1 \times N_2}$. Эти грубые подсчеты показывают гораздо большую потенциальную сложность квантового поведения системы по сравнению с его классической имитацией. В частности, из-за отсутствия однозначного разделения системы на элементы состояние квантового автомата может рассматриваться многими способами как состояние совершенно разных виртуальных классических автоматов.

...

Первая трудность при проведении этой программы состоит в выборе правильного баланса между математическими и физическими принципами. Квантовый автомат должен быть абстрактным: его математическая модель должна использовать лишь самые общие квантовые принципы, не предрешая физических реализаций. Тогда модель эволюции есть унитарное вращение в конечномерном гильбертовом пространстве, а модель виртуального разделения на подсистемы отвечает разложению пространства в тензорное произведение. Где-то в этой картине должно найти место взаимодействие, описываемое по традиции эрмитовыми операторами и вероятностями.

# Коллектив

## Направления научной работы

Проведение научных исследований по следующим направлениям:

- Открытые квантовые системы;
- Управление квантовыми системами;
- Квантовая криптография;
- Квантовый хаос;
- Квантовая томография;
- Многочастичные квантовые системы;
- Неравновесная квантовая динамика;
- Голография и квантовая информация.

## Образовательная деятельность: НОЦ МИАН

- Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, Ю.В. Курочкин, О.В. Лычковский, А.С. Трушечкин. «Квантовая криптография», 16 сентября 2016 – 19 мая 2017 г.
- А.Н. Печень, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг. «Математика квантовых технологий», 2 октября – 18 декабря 2017 г.
- А.Е. Теретёнков. «Основы теории открытых квантовых систем», 13 сентября – 29 ноября 2019 г.
- А.Е. Теретёнков. «Основы теории открытых квантовых систем», 14 февраля – 18 мая 2020 г.
- Д.А. Кронберг, А.С. Трушечкин. «Математические основы квантовой криптографии», 8 сентября – 22 декабря 2020 г.
- И.В. Ермаков. «Неравновесная динамика квантовых и классических многочастичных систем», 14 февраля – 16 мая 2023 г.
- И.В. Ермаков. «Актуальные вычислительные подходы в многочастичных задачах квантовой механики», 13 февраля – 28 мая 2024 г.

# Образовательная деятельность: Базовая кафедра в МФТИ[1]

- Управление квантовыми системами (А.Н. Печень, О.В. Моржин, Б.О. Волков)
- Основы теории открытых квантовых систем (А.Е. Теретёнков)
- Геометрические методы в квантовой информации (Д.С. Агеев)
- Квантовая криптография (Д.А. Кронберг)
- Квантовые тензорные сети (С.Н. Филиппов)

[1] mi-ras.ru/mipt

# Популяризация

- Е.О. Киктенко, Квантовые алгоритмы: маленькие частицы для больших задач, Лекции Яндекс. Data & Science, 18 марта 2017 г.
- А.Н. Печень, Квантовые технологии, Научно-просветительский проект НаукаPRO, 4 октября 2020 г.
- Д.А. Кронберг, Квантовая криптография, Научно-просветительский проект НаукаPRO, 29 ноября 2020 г.
- А.Н. Печень, В.Н. Петруханов, А. Араб, О квантовых компьютерах, криптографии и управлении квантовыми системами в передаче «Черные дыры. Белые пятна» на телеканале «Культура», 28 и 30 мая 2022 г.
- Е.О. Киктенко, Лекция для школьников «Квантовые информационные технологии», ГБОУ МО Одинцовский десятый лицей, 24 марта 2023 г.
- Д.А. Кронберг, О квантовой криптографии, Мослекторий, 21 июля 2023 г.

# Общеинститутские семинары МИАН

Общеинститутский семинар «Математика и ее приложения»

- А.Н. Печень, Ландшафты задач управления квантовыми системами, 16 сентября 2021 г.
- А.Е. Теретёнков, Квантовая теория открытых систем как наука о выделении системы из окружения, 16 марта 2023 г.
- Д.С. Агеев, Квантовая информация в конформной теории поля, 15 июня 2023 г.
- Е.О. Киктенко, Описание квантовых состояний в экспериментах с постселекцией, 21 марта 2024 г.

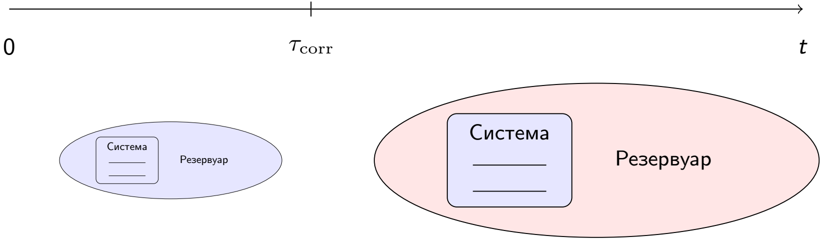
Общеинститутский семинар «Коллоквиум МИАН»

- Д.А. Кронберг, Стойкость квантового распределения ключей и сопутствующие проблемы, 10 мая 2018 г.

# Основные объекты квантовой механики

- Гильбертово пространство $\mathcal{H}$: $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^N, L^2(\mathbb{R}^d), \mathcal{F}_{s,a} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_{a,s}}$
- Состояние чистое: $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$;
  Состояние смешанное: $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \rho \geq 0, \mathrm{Tr}\rho = 1$
- Уравнение фон Неймана: $\dot{\rho}_t = -i[H, \rho_t]$, $H = H^+$ — гамильтониан ($\hbar = 1$).
- Наблюдаемая $O = O^+$
- Среднее значение $\langle O \rangle = \mathrm{Tr}(\rho O)$

# Теория открытых квантовых систем




Ключевая идея принадлежит Н.Н. Боголюбову:

$$t \to \lambda^{-2} t$$

- Н.Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, М.-Л.: Гостехиздат (1946).

В ведущем порядке:

- L. Accardi, Y.G. Lu, I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer, Berlin (2002).

Поправки:

- I.Y. Aref'eva, I.V. Volovich, On the large time behavior of quantum systems, Quant. Prob. and Rel. Top., **3**, 453–482 (2000).
- A.N. Pechen, I.V. Volovich, Quantum multipole noise and generalized quantum stochastic equations, Quant. Prob. and Rel. Top., **5**, 441–464 (2002).
- A.N. Pechen, On an asymptotic expansion in quantum theory, Math. Notes, **75**, 426–429 (2004).

Недавние результаты:

- A.E. Teretenkov, Non-perturbative effects in corrections to quantum master equations arising in Bogolubov–van Hove limit, J. Phys. A, **54**, 265302 (2021).

Гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}))$.
Спин-бозон в приближении вращающейся волны ($\lambda > 0$)

$$H(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega(k) b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- + \lambda \int \left( g^*(k) \sigma_- b_k^\dagger + g(k) \sigma_+ b_k \right) dk.$$

Уравнение Лиувилля-фон Неймана

$$\frac{d}{dt} \rho_{SB}(t;\lambda) = -i[H(\lambda), \rho_{SB}(t;\lambda)], \qquad \rho_{SB}(0;\lambda) = \sigma \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|,$$

где $\sigma$ — произвольная матрица плотности в $\mathbb{C}^2$.
Матрица плотности в представлении взаимодействия:

$$\rho_S(t;\lambda) \equiv e^{i\Omega\sigma_+\sigma_- t} \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}))} \rho_{SB}(t;\lambda) e^{-i\Omega\sigma_+\sigma_- t}$$

Перерастяжка Боголюбова-ван Хова:

$$\rho(t;\lambda) \equiv \rho_S(\lambda^{-2} t; \lambda)$$

**Теорема**. Пусть интеграл $G(t) \equiv \int |g_k|^2 e^{-i(\omega(k)-\Omega)t} dk$ сходится и определяет непрерывную функцию $G(t)$ с конечными моментами вплоть до $(m+1)$-го для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существуют $\Delta\Omega^{(m)} \in \mathbb{R}$ и $\Gamma^{(m)} \geqslant 0$, что для некоторого решения $\rho^{(m)}(t;\lambda)$ уравнения

$$\frac{d}{dt}\rho^{(m)}(t;\lambda) = \mathcal{L}^{(m)}(\rho^{(m)}(t;\lambda)),$$

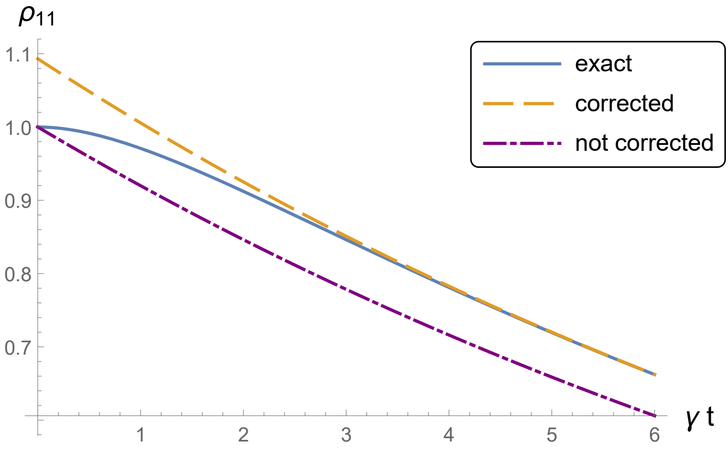
$$\mathcal{L}^{(m)}(\rho) = -i[\Delta\Omega^{(m)}\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma^{(m)}\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right),$$

выполнено $\rho(t;\lambda) = \rho^{(m)}(t;\lambda) + O(\lambda^{2m+2})$ при $\lambda \to 0$ и фиксированном $t > 0$.

НО: Если $\int_0^\infty tG(t)dt \neq 0$ и $m \geqslant 1$, то

$$\rho(0;\lambda) - \rho^{(m)}(0;\lambda) = O(\lambda^2)$$

Таким образом, для "хороших" марковских уравнений с "хорошими" начальными условиями эти начальные условия ***нужно*** испортить (иногда, сделав вероятности больше 1), чтобы получить правильную точность:

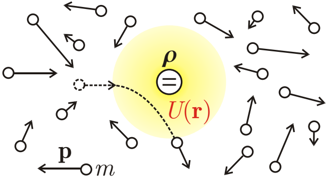


Получены точные решения различных уравнений ГКСЛ:

- A.E. Teretenkov, Irreversible quantum evolution with quadratic generator: Review, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **22**, 19300019 (2019).
- T. Linowski, A. Teretenkov, L. Rudnicki, Dissipative evolution of quantum Gaussian states, Phys. Rev. A, **106**, 52206 (2022).
- Iu.A. Nosal, A.E. Teretenkov, Higher Order Moments Dynamics for Some Multimode Quantum Master Equations, Lobachevskii J. Math., **43**, 1726–1739 (2022).
- A. Teretenkov, O. Lychkovskiy, Exact dynamics of quantum dissipative XX models: Wannier-Stark localization in the fragmented operator space, Physical Review B, **109**, L140302 (2024).

Построены обобщения проекционных методов вывода и кинетических уравнений:

- A.E. Teretenkov, Superoperator master equations and effective dynamics, Entropy, **26**, 14 (2024).
- A.E. Teretenkov, Effective Heisenberg equations for quadratic Hamiltonians, Int. J. Mod. Phys. A, **37**, 243020 (2022).




$$dU_t = dN_t(S - \mathbb{I})U_t$$

С использованием ГНС конструкции.[2]
Без использования ГНС конструкции.[3]

Сравнение предела низкой плотности и столкновительной декогеренции.[4]

[2] L. Accardi, A. Pechen, I.V. Volovich, A stochastic golden rule and quantum Langevin equation for the low density limit, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **6**, 431–453 (2003).

[3] A.N. Pechen, Quantum stochastic equation for a test particle interacting with a dilute Bose gas, J. Math. Phys., **45**, 400–417 (2004).

[4] S.N. Filippov, G.N. Semin, A.N. Pechen, Quantum master equations for a system interacting with a quantum gas in the low-density limit and for the semiclassical collision model, Phys. Rev. A, **101**, 12114 (2020).

# Многочастичные квантовые системы

Основная трудность теории многочастичных квантовых систем – экспоненциальный рост размерности (эффективного) гильбертова пространства с размером системы, что практически исключает возможность прямого решения уравнения Шредингера.

Некоторые вехи теории:

- Микроскопические теории сверхтекучести и сверхпроводимости (Боголюбов, 1947 - 1957; Бардин, Купер, Шриффер, 1957);
- Диаграммные техники (Фейнман, Швингер, Константинов, Перель, Каданофф, Бейм, Келдыш, 1948-1964);
- Теория Ферми-жидкости и концепция квазичастиц (Ландау, 1956);
- Теория линейного отклика (Кубо, 1957);
- Многочастичная локализация (Андерсон, 1958);
- Катастрофа ортогональности (Андерсон, 1967);
- Теория ренормгруппы (Фишер, Вильсон, Каданофф 1971-1975)

## Многочастичные квантовые системы: направления, развиваемые в Отделе

- Фундаментальные ограничения на скорость квантовой эволюции;
- Адиабатические теоремы и адиабатическое приближение;
- Сильно неравновесная динамика, индуцированная внезапным изменением параметров системы (квантовый квенч);
- Динамика наблюдаемых в представлении Гейзенберга и локализация в пространстве Крылова.

## Фундаментальное ограничение на скорость квантовой эволюции теплового состояния

Соотношение неопределенности Гейзенберга: $\Delta x\, \Delta p \geq 1/2$, где

$$\Delta x^2 \equiv \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2, \qquad \Delta p^2 \equiv \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2, \qquad \langle A\rangle := \mathrm{Tr}\big(A\rho\big).$$

Соотношение неопределенности энергия-время: $\Delta E\, \Delta t \geq 1/2$

$$\Delta E^2 := \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2, \qquad \Delta t = ?$$

В квантовой механике нет оператора времени, отсюда трудности с определением $\Delta t$.

Математически строгое решение этого вопроса дано Мандельштамом и Таммом в 1945 г.[5] Они показали, что соотношение неопределенности энергия-время следует понимать как частный случай ограничений на скорость квантовой эволюции.

---

[5] Л.И. Мандельштам, И.Е.Тамм, Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике, Изв. Акад. Наук СССР (сер. физ.), **9**, 122–128 (1945).

## Фундаментальное ограничение на скорость квантовой эволюции теплового состояния

Уравнение фон Неймана: $i\partial_t \rho_t = [H, \rho_t]$.

Метрика на пространстве квантовых состояний:

$$D_{\mathrm{tr}}(\rho_1, \rho_2) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)^2}.$$

Неравенство Мандельштамма-Тамма (МТ): $D_{\mathrm{tr}}(\rho_0, \rho_t) \leq \Delta E\, t$.

Для многочастичных систем — слишком слабая оценка, поскольку $\Delta E \sim \sqrt{N}$.

Для состояний с высокой энтропией — тоже слабая оценка.

Тривиальная иллюстрация: если $\rho_0 = \frac{1}{k} \mathbb{I}_k$, то $\rho_t = \rho_0$ и $D_{\mathrm{tr}}(\rho_0, \rho_t) = 0$, но правая часть неравенства не равна нулю.

## Фундаментальное ограничение на скорость квантовой эволюции теплового состояния

Можно доказать неравенство, оказывающееся во многих случаях существенно более сильным[6]:

$$D_{\mathrm{tr}}(\rho_0, \rho_t) \leq \sqrt{\beta t}\,\sqrt[4]{-2\left\langle [H_0, V]^2 \right\rangle_\beta},$$

$$\rho_0 = e^{-\beta H_0}/\mathrm{tr} e^{-\beta H_0}, \qquad H \equiv H_0 + V, \qquad \langle A \rangle_\beta \equiv \mathrm{tr}\,\rho_0 A.$$

Если $V$ — одночастичный оператор, то правая часть в многочастичной системе не зависит от $N$.
В большинстве случаев правая часть неравенства зануляется в пределе бесконечной температуры.

[6] N. Il'in, O. Lychkovskiy, Quantum speed limit for thermal states, Phys. Rev. A, **103**, 062204 (2021)

# Фундаментальное ограничение на скорость квантовой эволюции теплового состояния

Пример: спин-бозонная модель,

$$H_0 = \Omega\,\sigma^z + \tfrac{1}{\sqrt{N}}\,\sigma^x \textstyle\sum_{k=1}^{N} g_k(a_k^\dagger + a_k) + \sum_{k=1}^{N} \omega_k\, a_k^\dagger a_k$$

$$V = \varepsilon\sigma^x$$

Наше неравенство: $D_{\mathrm{tr}}(\rho_0, \rho_t) \le \sqrt{2\sqrt{2}\,\varepsilon\,\Omega\,\beta\,t}$

Неравенство МТ: $D_{\mathrm{tr}}(\rho_0, \rho_t) \le \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\sum_k \frac{\omega_k^2}{\left(\sinh\frac{\beta\omega_k}{2}\right)^2}}}_{O(\sqrt{N})} + O(1)$

## Практически полные возрождения локальных наблюдаемых в квантовых многочастичных системах

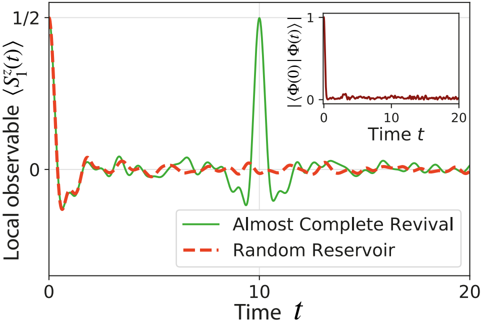
Одной из важнейших задач исследований в области динамической термализации является определение границ применимости постулата о том, что всякая неинтегрируемая многочастичная квантовая система достигает состояния термодинамического равновесия (термализуется). Практическим способом определения данных границ является исследование ситуаций, в которых термализация подавлена или отсутствует вовсе.

Предложен алгоритм построения квантовых состояний $|\Psi_{\mathrm{rev}}\rangle$ таких, что заданная, изначально неравновесная, локальная наблюдаемая $\langle O\rangle(0) = O_0$ испытывает возрождение к начальному значению в заданный момент времени $\tau$, таким образом что $\langle O\rangle(\tau) = O_0 - \delta$, где $\delta$ некоторая ошибка экспоненциально убывающая с размером системы $\delta \to 0$[7,8].

[7] I. Ermakov, B.V. Fine, Almost complete revivals in quantum many-body systems, Phys. Rev. A, **104**, L050202 (2021).

[8] I. Ermakov, Generalized almost complete revivals in quantum spin chains, Lobachevskii J.Math., **43**, 1619-1625 (2022).

# Практически полные возрождения локальных наблюдаемых в квантовых многочастичных системах




Пример практически полного возрождения локальной наблюдаемой $\langle S_1^z \rangle$ в заданный момент времени $\tau = 10$. Рассматривается неинтегрируемая эволюция некоторой системы состоящей из $L = 12$ кубитов. Типичное неравновесное состояние, выбранное случайно (пунктирная линия), после уравновешивания такого возрождения не испытывает.

## Практически полные возрождения локальных наблюдаемых в квантовых многочастичных системах

- Получена система линейных уравнений, с помощью решения которой может быть построено возрождающееся состояние $|\Psi_{\text{rev}}\rangle$.
- Решение системы существует всегда, однако построенное состояние будет возрождаться при условии, что матрица эволюции системы $e^{-iH\tau}$ в момент возрождения $\tau$ близка с случайной матрице из гауссова ортогонального ансамбля.
- Условие выше является типичным для широкого класса физических взаимодействующих систем, например для сверхпроводящих квантовых процессоров.
- Данное условие накладывает ограничение снизу на время возрождения $\tau > 1$. Других ограничений на время возрождения нет.
- Возрождение возможно один раз, после этого система окончательно приходит в равновесие.
- Показано, что ошибка возрождения $\delta$ экспоненциально убывает с размером системы.

- Тестирование квантовых симуляторов. Если возрождение наблюдается экспериментально, значит состояние $|\Psi_{\text{res}}\rangle$ и эволюция $e^{-iH\tau}$ реализованы правильно. При наличии ошибок будет расти ошибка в возрождении.
- Отложенное рассекречивание (квантовая капсула времени): возможно закодировать бит классической информации в начальное состояние наблюдаемой системы $\langle S_i^z\rangle(0) = \pm 1/2$ таким образом, что он будет рассекречен только в заранее заданный момент времени $\tau$ и не ранее. Попытка извлечь значение $\langle S_i^z\rangle(0)$ до наступления $\tau$ не даёт никакой полезной информации и приводит к разрушению состояния и, следовательно, уничтожению информации.

# Стабильность периодических траекторий в многочастичных системах

Исследование стабильности периодических траекторий является одним из ключевых практических методов для исследования термализации многочастичных систем.

В системе описываемой гамильтонианом:

$$H = -\sum_{i=1}^{L} \left( J S_i^x S_{i+1}^x + 2 J S_i^y S_{i+1}^y \right) + \sum_{i=1}^{L} \left( h S_i^x + h S_i^y \right),$$

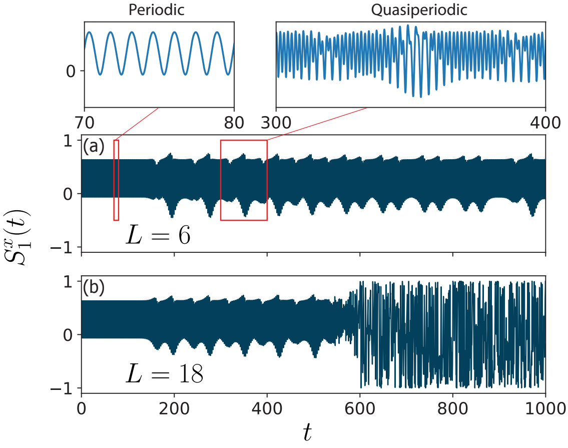
исследованы периодические траектории, соответствующие полностью поляризованному начальному состоянию:

$$\mathrm{S}_i(0) = (0, 0, 1) \qquad |\Psi(0)\rangle = |\Psi^{\mathrm{up}}\rangle \equiv \bigotimes_{i=1}^{L} |m_i = S\rangle,$$

в классическом и в квантовом случаях.

# Стабильность периодических траекторий в многочастичных системах

Классическая периодическая траектория (соответствует $t < 100$) может остаться стабильной. Также она может перейти в долгоживущий квазипериодический режим (a) $t > 200$. Или из квазипериодического режима она может перейти в хаотический (b) $t > 600$.

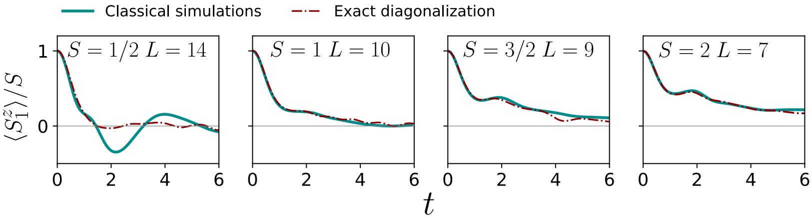


# Стабильность периодических траекторий в многочастичных системах

- Для описанной выше системы вычислены экспоненты Ляпунова $\lambda_p$ для периодических траекторий, описывающие их стабильность.
- Выявлена и объяснена нетривиальная зависимость стабильности периодических траекторий от размера системы. Так например, для систем весьма больших размеров $L = 23$ периодические траектории стабильны $\lambda_p = 0$, в то время как для систем меньших размеров $L = 6$ периодические траектории разрушаются $\lambda_p > 0$.
- Особенный интерес представляет обнаруженный в данной системе квазипериодический режим и механизмы его разрушения.
- Квазипериодический режим имеет дискретный временной спектр, но не является периодическим. Таким образом данный режим является временным аналогом квазикристалла.
- Одним из механизмов разрушения квазипериодического режима предположительно является диффузия Арнольда.

# Стабильность периодических траекторий в многочастичных системах

С помощью классических симуляций ансамблей траекторий близких к периодическим оказывается возможным эффективно приближённо симулировать динамику уравновешивания квантовых состояний для значений квантового спина $S > 1/2$. В квантовом случае сложность симуляции такой динамики экспоненциальна.




- I. Ermakov, B.V. Fine. Dynamics of exceptional states in many-body systems. (2022). PhD Thesis: https://www.skoltech.ru/app/data/uploads/2022/09/thesis11.pdf

Квантовый хаос — загадочное явление, возникающее в квантовомеханических системах, рассматривается как попытка перенести понятие “хаоса”, исследовавшееся математиками и физиками ранее, в квантовый мир. В квантовой механике каждому наблюдаемому объекту сопоставляется самосопряженный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве, следовательно определение хаоса должно учитывать этот аспект. Универсального определения квантового хаоса нет до сих пор, однако важный шаг в определении понятия квантового хаоса был сделан Юджином Вигнером (Нобелевская премия по физике 1963). Его предложение состояло в том, что спектральные свойства (т.е. спектр операторов, соответствующих наблюдаемой) хаотической квантовой системы должны соответствовать случайным матрицам из какого-либо гауссова ансамбля (унитарного, ортогонального итд).

Рассмотрим свободную гауссовскую релятивистскую квантовую теорию поля $\phi(x,\tau)$ (массивная теория Клейна-Гордона) в конечном объеме на цилиндре

$$S = \frac{1}{8\pi}\int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} dx \left((\partial_\tau\phi)^2 + (\partial_x\phi)^2 + m^2\phi^2\right),$$

Рассмотрим в такой квантовой системе локализованное возмущение специального вида. Возмущение характеризуется возмущающим оператором $O$; например $O=\phi$.

В квантовых системах (в частности тех, которые описываются некоторой квантовой теорией поля) возможно задать универсальным образом состояние, локализованное в некоторой точке. По некоторому оператору $O$ можно задать состояние в виде (здесь $\varepsilon$ соответствует регуляризации)

$$|\Psi_O\rangle = \mathcal{N}_O \cdot e^{-iHt} \cdot e^{-\varepsilon H} O\,(0,0)\,|0\rangle$$

Тогда среднее от оператора $\mathcal{O}$ в таком состоянии будет выражаться через вакуумное состояние как

$$\langle \mathcal{O}(t,x)\rangle_{\Psi_O} = \frac{\langle \Psi_O|\mathcal{O}(t,x)|\Psi_O\rangle}{\langle \Psi_O \mid \Psi_O\rangle} = \frac{\langle 0|O(i\varepsilon,0)\mathcal{O}(x,t)O(-i\varepsilon,0)|0\rangle}{\langle 0|O(i\varepsilon,0)O(-i\varepsilon,0)|0\rangle}$$

# Квантовый хаос

Для возбуждения в теории на прямой ($L \to \infty$) динамика вычисляется в замкнутом виде через модифицированные функции Бесселя.

Утверждение: для возмущающего оператора $O = \phi$, регуляризации $\varepsilon$ и массы $m$ зависимость энергии $\mathcal{E}(t,x)$ от времени $t$ и пространственной координаты $x$ имеет вид

$$\langle \mathcal{E}(t,x) \rangle_{\Psi_\phi} = \frac{\langle \phi(i\varepsilon,0)|\mathcal{E}(t,x)|\phi(-i\varepsilon,0)\rangle}{\langle \phi(i\varepsilon,0)\phi(-i\varepsilon,0)\rangle} =$$

$$\frac{m^2}{K_0(2\varepsilon m)}\left[(\varepsilon^2+t^2+x^2)\left|\frac{K_1\left(m\sqrt{(\varepsilon-it)^2+x^2}\right)}{\sqrt{(\varepsilon-it)^2+x^2}}\right|^2 + \left|K_0\left(m\sqrt{(\varepsilon-it)^2+x^2}\right)\right|^2\right]$$

# Квантовый хаос

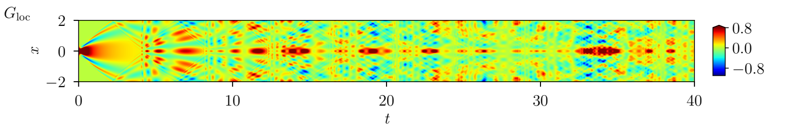
В случае периодических граничных условий (т.е. когда теория эволюционирует на окружности длины $L$) вакуумная двухточечная корреляционная функция $\langle\phi(\tau,x)\phi(0,0)\rangle$ имеет вид

$$K(\tau,x) = \langle 0|\phi(\tau,x)\phi(0,0)|0\rangle = \frac{1}{AL}\sum_n \int \frac{dq}{2\pi}\frac{e^{i\omega_n x + iq\tau}}{q^2+\omega_n^2+m^2}\Big|_{\omega_n=\frac{2\pi n}{l}}$$

Двухточечная корреляционная функция для возбуждающего оператора $\phi$

$$G_{\text{loc}}(t,x) \equiv \langle 0|\phi(t,x)\phi(t,0)|0\rangle_{\Psi_\phi} - \langle 0|\phi(t,x)\phi(t,0)|0\rangle$$

имеет весьма иррегулярное поведение:



# Квантовый хаос

В квантовомеханической хаотической системе с гамильтонианом $H$ распределение отношений расстояния $\delta_n$ между последовательными энергетическими уровнями (с.з. гамильтониана)

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle; \quad \delta_n = E_{n+1} - E_n; \quad r_n \equiv \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}};$$

совпадает с распределением собственных значений ансамбля гауссовых случайных матриц. Когда такие матрицы являются унитарными распределения плотности вероятности для $\delta_n$ и $r_n$ имеют вид

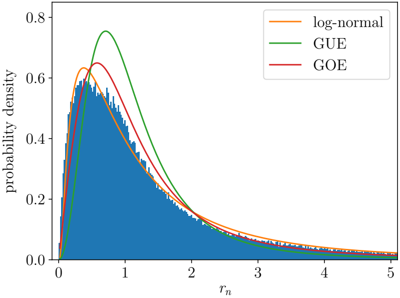
$$P_{\mathrm{GUE}}(\delta_n) = \frac{32}{\pi^2}\delta_n^2 \exp\left(-\frac{4\delta_n^2}{\pi}\right), \quad f_{\mathrm{GUE}}(r_n) = \frac{16}{\pi}\frac{r_n^2}{(1+r_n^2)^3}$$

Вместо исследования статистики собственных значений (которое возможно при наличии оператора) можно исследовать можно рассматривать $\delta_n$ и $r_n$ как случайную величину и исследовать её распределение плотности вероятности. Соответствующая статистика оказывается очень близка $f_{\mathrm{GUE}}(r_n)$. Похожее случается, например, для распределения нулей дзета функции Римана.

# Квантовый хаос

Утверждение: Рассмотрим эволюцию энергии системы и рассмотрим величины $\delta_n = x_{n+1} - x_n$ и $r_n = \delta_{n+1}/\delta_n$ (где $x_n$ — положения максимумов в зависимости энергии от времени). Рассматривая $r_n$ как случайную величину, численно вычислим её плотность вероятности — она оказывается очень близка к распределению одного из спектральных распределений ансамбля гауссовых унитарных случайных матриц (где $r_n \equiv \frac{E_{n+1}-E_n}{E_n-E_{n-1}}$ определяется через $n-$е собственное значение такой матрицы) [9,10].

$$f_{\mathrm{GUE}}(r_n) = \frac{16}{\pi} \frac{r_n^2}{(1+r_n^2)^3}$$




[9] D. Ageev, V. Pushkarev, Quantum quenches in fractonic field theories, arXiv:2306.14951.
[10] D. Ageev, A. Belokon, V. Pushkarev, From locality to irregularity: introducing local quenches in massive scalar field theory. JHEP, **2023**, 188 (2023).

# Квантовая теория информации, вычисления, томография

- Развитие алгоритмов классической постобработки в системах квантового распеределения ключей (КРК) и алгоритмов в сетях КРК
  [E.O. Kiktenko et al. Phys. Rev. A, **105**, 12408 (2022)]
  [E.O. Kiktenko et al. IEEE Commun. Lett., **25**, 79–83 (2021)]
  [E.O. Kiktenko et al. IEEE Trans. Inf. Theory, **66**, 6354–6368 (2020)]
  [E.O. Kiktenko et al. J. Russian Laser Research, **39**, 558–567 (2018)],
  [E.O. Kiktenko et al. Quantum Sci. Technol., **3** (2018), 35004]
- Развитие квазистохастического представления конечномерных квантовых систем
  [D.A. Kulikov et al. Phys. Rev. A **109**, 012219 (2024)]
  [V.I. Yashin, et al. New J. Phys., **22**, 103026 (2020)]
  [E.O. Kiktenko et al. Phys. Rev. A, **101**, 52320 (2020)]
- Развитие квантовых вычислением с использованием кудитов
  [E.O. Kiktenko et al. Phys. Rev. A **101**, 22304 (2020)]
- Развитие оценок точности в алгоритмах квантовой томографии
  [E.O. Kiktenko et al. New J. Phys. **23**, 123022 (2021)]
  [E.O. Kiktenko et al. Opt. Eng. **59** , 61614 (2020)]

## Развитие двувектороного формализма:

### Мотивация

Для описания квантовых состояний в условиях постселекции было предложено рассматривать математические объекты, объединяющие в себе информацию о приготовлении (преселекции) и фиксированном исходе измерения (постселекции).

1. Вектор два-состояния $(|\psi\rangle, \langle\phi|)$ [Y. Aharonov, P.G. Bergmann, J.L. Lebowitz, Phys. Rev. **134**, B1410 (1964)].
2. Обобщенный вектор два-состояния $\sum_i c_i(|\psi_i\rangle, \langle\phi_i|)$ [Y. Aharonov, L. Vaidman, J. Phys. A Math. **24**, 2315 (1991)].
3. Вектор плотности два-состояния $\sum_r p_r \underline{\Psi}^r \otimes \underline{\Psi}^{r\dagger}$ [R. Silva, et al. Phys. Rev. A **89**, 012121 (2014)].
4. Смешанный вектор два-состояния $(\rho_{\mathrm{pre}}, \rho_{\mathrm{post}})$ [L. Vaidman et al. Phys. Rev. A **96**, 032114 (2017)].

Области применения постселекции

- **Квантовая метрология** [Dixon et al. PRL **102**, 173601 (2009)], [Lyons et al. PRL **114**, 170801 (2015)], [Arvidsson-Shukur et al., Nat. Com. **11**, 1–7 (2020)]
- **Теория квантовой сложности и контекстуальность** [Aaronson, Proc. R. Soc. A: Math. **461**, 3473–3482 (2005)], [Leifer, Spekkens, PRL **95**, 200405 (2005)], [Kunjwal et al., Phys. Rev. A **100**, 042116 (2019)], . . .
- **Квантовые вычисления** [Harrow et al. PRL **103**, 150502 (2009)], [E. Knill, Phys. Rev. A **66** (2022)], . . .
- **Квантовые коммуникации** [Arvidsson-Shukur, Barnes, Phys. Rev. A **94**, 062303 (2016)], [Wander et al. Phys. Rev. A **104**, 012610 (2021)], [Kronberg, ТМФ, **214** (1), 140 (2023)], . . .

## Развитие двувекторного формализма:

### Основные результаты

- Получено обобщение двувекторного формализма на случай произвольных вариантов преселекции и произвольных вариантов постселекции, описываемых положительными операторнозначными мерами. Полученный формализм включает в себя ситуации отсутствия постслекции (стандартный формализм) и рассмотренные ранее ситуации с постселекцией как частные случаи, и в едином ключе обобщает стандартный формализ матриц плотности и двувекторный формализм.
- Предожены практические методы томографии двунаправленных во времени состояний, работоспособность которых продемонстрирована на существующих зашумленных квантовых процессорах.

Детали: Kiktenko E.O. Phys. Rev. A **107**, 032419 (2023) (arXiv:2210.01583).

# Постселективные измерения и квантовая криптография

В таких измерениях мы объявляем некоторые исходы «неудачными» и работаем только с оставшимися. Постселекция играет существенную роль в квантовой криптографии, так как возможность отбросить часть исходов —- важнейшее преимущество легитимных пользователей перед перехватчиком.

Для ансамбля состояний $\mathcal{E} = \{p_i, \rho_i\}_{i=1}^N$ можно определить взаимную информацию с учётом постселекции при равных вероятностях успеха на всех входных состояниях

$$I_{ps}(\{p_i, \rho_i\}) = \max_{\Pi} \sum_{i,k} p_i p_{ps}(k|i) \log \frac{p_{ps}(k|i)}{\sum_j p_{ps}(k|j) p_j}.$$

Тривиальные оценки:

$$I_{\mathrm{acc}}(\mathcal{E}) \leq I_{ps}(\mathcal{E}) \leq H(\{p_i\}).$$

**Теорема 1** (Граница Холево и постселективные измерения)
Если все $\rho_i$ могут быть записаны как выпуклая комбинация набора $\{\sigma_k\}_{k=1}^K$, т.е. $\rho_i = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ik}\sigma_k, \quad i = 1, \ldots, N$, и $\{\hat{\sigma}_k\}_{k=1}^K$ безошибочно различимы, то

$$I_{ps}(\{p_i, \rho_i\}) \geq \chi(\{p_i, \rho_i\}).$$

**Теорема 2** (Верхняя оценка информации с постселекцией)
При равных вероятностях успеха взаимная информация с учётом постселекции оценивается сверху:

$$I_{ps}(\{p_i, \hat{\rho}_i\}) \leq \sum_{i=1}^{N} p_i D_{\max}(\hat{\rho}_i || \hat{\rho}).$$

- N.R. Kenbaev, D.A. Kronberg, Quantum postselective measurements: Sufficient condition for overcoming the Holevo bound and the role of max-relative entropy, Phys. Rev. A, **105**, 012609 (2022).

## Постселективные преобразования и квантовая криптография

Для двух ансамблей чистых квантовых состояний $\mathcal{E}_A = \{p_i, |\varphi_i\rangle\}_{i=1}^N$ и $\mathcal{E}_B = \{q_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^N$ возникает вопрос, с какой вероятностью успеха можно отобразить $\mathcal{E}_A$ на $\mathcal{E}_B$.

**Теорема 1** Нижняя граница вероятности успеха:

$$p_{\mathrm{succ}} \geq 2^{-D_{\max}(QG_BQ\|PG_AP)}, \text{ где } G_A, G_B \text{ — матрицы Грама.}$$

Следствие: вероятность успеха безошибочного различения равна минимальному собственному значению матрицы Грама.

**Теорема 2** Верхняя граница вероятности успеха

$$p_{\mathrm{succ}} \leq \max_{G_E \geq 0} 2^{-D_{\max}(QG_B \circ G_E Q\|PG_AP)}.$$


- D.A. Kronberg, Success probability for postselective transformations of pure quantum states, Phys. Rev. A, **106**, 042447 (2022).

Разработаны более эффективные стратегии подслушивания, которые не сводятся к получению всей информации о передаваемом состоянии, а только информации о ключе при условии получения информации о базисе в дальнейшем.

- Д.А. Кронберг, Об уязвимостях квантовой криптографии на геометрически однородных когерентных состояниях, Квантовая электроника, **51**, 928–937 (2021).

# Атаки в квантовой криптографии

Разработана атака на практически используемый протокол КРК, при которой достаточно блокировать лишь четверть посылок. В этом случае пост-селективное преобразование является лишь частью общей атаки, но играет ключевую роль.
Построено преобразование, которое различает базисы протокола с вероятностью верного исхода $2/3$, вместо заложенной в доказательстве стойкости вероятности $1/2$ простого угадывания.

Показано, что протокол демонстрирует критическую уязвимость начиная с любой ненулевой длины линии связи: противник может знать весь ключ, а легитимные пользователи, пользующиеся формулой скорости генерации ключа, будут уверены в его полной секретности.


- Д.А. Кронберг, Уязвимость квантовой криптографии с фазово-временны́м кодированием в условиях затухания, ТМФ, **214**, 140–152 (2023).

Дано: $H_0, V \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dU^f_t}{dt} &= -i(H_0 + f(t)V)U^f_t \\ F(f) &= |(\psi_{\rm f}, U^f_T\psi_{\rm i})|^2 \in [0,1], \quad T>0, \quad \psi_{\rm i,f}\in\mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Найти: все экстремумы $F(f)$.

[11] A.N. Pechen, N.B. Il'in, Phys. Rev. A, **86**, 052117 (2012)
[12] B.O. Volkov, O.V. Morzhin, A.N. Pechen, J. Phys. A: Math. Theor., **54**, 215303 (2021)
[13] Б.О. Волков, А.Н. Печень, Ловушки высших порядков в задачах квантового управления для некоторых сильно вырожденных систем, УМН, **78**, 191–192 (2023); B. Volkov, A. Myachkova, A. Pechen, Phenomenon of a stronger trapping behaviour in Λ-type quantum systems with symmetry, arXiv:2404.06937

Дано: $H_0, V \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dU_t^f}{dt} &= -i(H_0 + f(t)V)U_t^f \\ F(f) &= |(\psi_{\rm f}, U_T^f \psi_{\rm i})|^2 \in [0,1], \quad T>0, \quad \psi_{\rm i,f} \in \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Найти: все экстремумы $F(f)$.

**Теорема 1.** Для $N = 2$ при $T \geq T_0$ все максимумы и минимумы $F(f)$ являются глобальными.[11]
**Теорема 2.** Если $(\varphi_W, T) \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, то гессиан целевого функционала $F_W$ в $f_0 = 0$ — инъективный компактный оператор на $L_2([0,T],\mathbb{R})$. Более того, если $(\varphi, T) \in \mathcal{D}_1$, то гессиан в $f_0$ строго отрицательный.[12]
**Теорема 3.** При $N \geq 3$ существуют ловушки сколь угодно высокого порядка.[13]

[11] A.N. Pechen, N.B. Il'in, Phys. Rev. A, **86**, 052117 (2012)
[12] B.O. Volkov, O.V. Morzhin, A.N. Pechen, J. Phys. A: Math. Theor., **54**, 215303 (2021)
[13] Б.О. Волков, А.Н. Печень, Ловушки высших порядков в задачах квантового управления для некоторых сильно вырожденных систем, УМН, **78**, 191–192 (2023); B. Volkov, A. Myachkova, A. Pechen, Phenomenon of a stronger trapping behaviour in Λ-type quantum systems with symmetry, arXiv:2404.06937

Мастер-уравнение:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H_0 + f(t)V, \rho] + \mathcal{L}_{n(t)}(\rho),$$

Целевой функционал типа Майера:

$$\mathcal{F}[u, n] = \mathcal{J}(\rho^{u,n}(T)).$$


- V.N. Petruhanov, A.N. Pechen, GRAPE optimization for open quantum systems with time-dependent decoherence rates driven by coherent and incoherent controls, J. Phys. A, **56**, 305303 (2023).
- V.N. Petruhanov, A.N. Pechen, Quantum gate generation in two-level open quantum systems by coherent and incoherent photons found with gradient search, Photonics, **10**, 220 (2023).
- A.N. Pechen, V.N. Petruhanov, O.V. Morzhin, B.O. Volkov, Control landscapes for high-fidelity generation of C-NOT and C-PHASE gates with coherent and environmental driving. Eur. Phys. J. Plus, **139**, 411 (2024).
- O. Morzhin, A. Pechen, Control of the von Neumann entropy for an open two-qubit system using coherent and incoherent drives, Entropy, **26**, 36 (2024).

## Управление квантовыми системами

### Метод скоростного градиента для управления диссипативным осциллятором[14]

Скорость изменения целевой функции $W_t$ вдоль траектории:

$$\omega(u,n) = \frac{\partial W_t}{\partial E}\frac{dE}{dt} = (E - E_*)(-uP + 2\gamma(\omega_0 n - E))$$

**SGA-D:** *Дифференциальный вид SGA для теплопереноса в квантовом осцил-ляторе*

$$\frac{du}{dt} = \Gamma_1 P(E - E_*), \qquad \frac{dn}{dt} = -2\Gamma_2(E - E_*).$$

**SGA-F:** *Конечный (линейный) вид SGA для теплопереноса в квантовом ос-цилляторе*

$$u = \Gamma_1 P(E - E_*), \qquad n = -\Gamma_2(E - E_*).$$

Теорема. Все траектории с SGA-D управлениями ограничены и их средняя энергия асимптотически сходится к $E_*$, $\lim_{t\to+\infty} E(t) = E_*$. Для нагревания $(E_* > E(0))$ при $n(t) \geq 0$ достаточно выбрать $\Gamma_2 \leq \gamma/\omega_0$. Для охлаждения $(E_* < E(0))$ при $n(t) \geq 0$ достаточно выбрать $\Gamma_2 \leq \gamma/\left(\omega_0\left(\frac{E(0)}{E_*} - 1\right)^2\right)$.

[14] A.N. Pechen, S. Borisenok, A.L. Fradkov, Energy control in a quantum oscillator using coherent control and engineered environment, Chaos Solitons Fractals, **164**, 112687 (2022).

A. Pechen, H. Rabitz, Teaching the environment to control quantum systems, Phys. Rev. A, **73**, 062102 (2006).
O.V. Morzhin, A.N. Pechen, Krotov type optimization of coherent and incoherent controls for open two-qubit systems, Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, **45**, 3–23 (2023).

D.-Y. Dong, C.-L. Chen, T.-J. Tarn, A. Pechen, H. Rabitz, Incoherent control of quantum systems with wavefunction controllable subspaces via quantum reinforcement learning, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics — Part B: Cybernetics, **38**, 957–962 (2008).

Управления: вполне положительные сохраняющие след отображения $\Phi_{f,n,T}$.
Пусть $\Phi_1 \dots \Phi_K$ есть некоторый конечный набор элементарных управлений.
Можно применять их в произвольном порядке с повторами.
Вопрос: существует ли для данных $\rho_{\rm i}$ и $\rho_{\rm f}$ последовательность $i_1, \dots i_M$, такая что

$$\Phi_{i_M} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho_{\rm i}) = \rho_{\rm f}$$

Нет алгоритма, отвечающего на данный вопрос для всех задач такого вида (доказательство с помощью связи с диафантовыми уравнениями и десятой проблемой Гильберта)[15].

[15] D.I. Bondar, A.N. Pechen, Uncomputability and complexity of quantum control, Scientific Reports, **10**, 1195 (2020).

Оптимизация на основе градиента на многообразиях Штифеля для квантового управления открытыми квантовыми системами

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{N^2} K_i \rho K_i^\dagger, \qquad \sum_{i=1}^{N^2} K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}_N$$

Обозначим $N^3 \times N$ матрицу $S = (K_1, K_2, \dots, K_{N^2})^T$. Имеем $S^\dagger S = \mathbb{I}_N$.
Теорема: $\mathrm{grad}\, J = (2\mathbb{I}_{N^3} - SS^\dagger)(\mathbb{I}_{N^2} \otimes \Theta)S\rho - S\rho S^\dagger(\mathbb{I}_{N^2} \otimes \Theta)S$, etc.

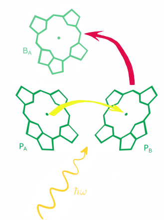

- A. Pechen, D. Prokhorenko, R. Wu, H. Rabitz, Control landscapes for two-level open quantum systems, J. Phys. A: Math. Theor., **41**, 045205 (2008).
- A. Oza, A. Pechen, J. Dominy, V. Beltrani, K. Moore, H. Rabitz, Optimization search effort over the control landscapes for open quantum systems with Kraus-map evolution, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 205305 (2009).

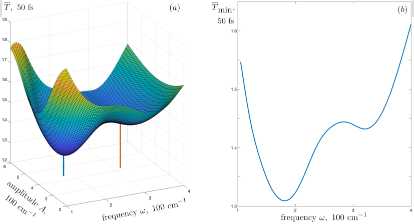
# Сотрудничество с другими отделами

## Нелинейная квантовая динамика типа обратной связи и квантовый фотосинтез

S.V. Kozyrev, A.N. Pechen, Quantum feedback control in quantum photosynthesis, Phys. Rev. A, **106** (2022).

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H(\rho, t), \rho(t)] + \mathcal{L}(\rho(t)) + \mathcal{S}(\rho(t)),$$




S.V. Kozyrev, A.N. Pechen, Amplification of quantum transfer and quantum ratchet, Physica Scripta, **98**, 125122 (2023).

Теория квантовых измерений

G.G. Amosov, A.D. Baranov, D.A. Kronberg, On positive operator-valued measures generated by a family of one-dimensional projectors, Annals of Functional Analysis, **15**, 48 (2024).

Квантовая криптография

А.С. Трушечкин, Е.О. Киктенко, Д.А. Кронберг, А.К. Федоров, Стойкость метода обманных состояний в квантовой криптографии, УФН, **191**, 93-–109 (2021).

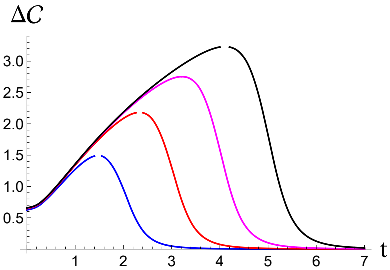
# Сотрудничество с другими отделами

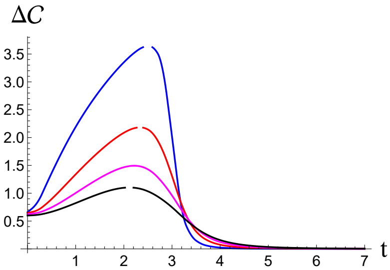
## Рост квантовой сложности после локального квенча[16]

$$\Delta\mathcal{C}(\ell,t) \approx \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 t^2 \quad t \to 0,$$

$$\mathcal{C}_0 = M\frac{\pi\ell^2}{\varepsilon^2+\ell^2},$$

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} \frac{2\pi M\ell^2\left(\ell^2-\varepsilon^2\right)}{(\varepsilon^2+\ell^2)^3}, & \varepsilon > \ell \\ \frac{\pi M\left(\varepsilon^6-5\varepsilon^4\ell^2+3\varepsilon^2\ell^4+\ell^6\right)}{2\varepsilon^2(\varepsilon^2+\ell^2)^3}, & \varepsilon < \ell \end{cases}$$



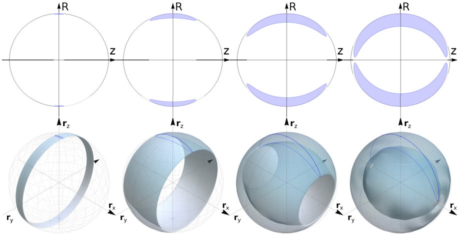




[16] D.S Ageev, I.Ya. Aref'eva, A.V. Bagrov, M.I. Katsnelson, Holographic local quench and effective complexity, Journal of High Energy Physics, **2018**, 1-30 (2018)

# Сотрудничество с другими отделами

## Множества достижимости для кубита[17]

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\Big[\omega\sigma_z + \kappa u(t)\sigma_x, \rho(t)\Big] + \gamma(n(t)+1)\Big(\sigma^-\rho(t)\sigma^+ - \frac{1}{2}\Big\{\sigma^+\sigma^-, \rho(t)\Big\}\Big) + \gamma n(t)\Big(\sigma^+\rho(t)\sigma^- - \frac{1}{2}\Big\{\sigma^-\sigma^+, \rho(t)\Big\}\Big).$$




**Теорема:** Для данной системы,

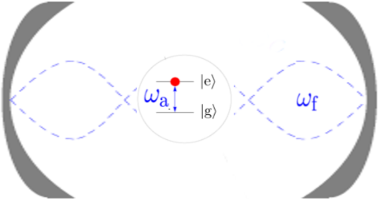
1. Некогерентное управление не влияет на множество достижимости;
2. Любая матрица плотности может быть получена с ошибкой $\delta \approx \gamma/\omega$;
3. Большинство состояний может быть получено точно, кроме состояний в двух областях размера $\delta$.

[17] L. Lokutsievskiy, A. Pechen, Reachable sets for two-level open quantum systems driven by coherent and incoherent controls, J. Phys. A: Math. Theor., **54**, 395304 (2021).

# Сотрудничество с другими отделами

## Некоммутативные операторные графы и коррекция ошибок[18,19]

$$H = \omega_f a^+ a^- + \frac{\omega_s}{2}\sigma_z + \frac{\kappa}{2}(\sigma^- a^+ + \sigma^+ a^-),$$




$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= span\{|n,+\rangle\,,\ n \in \mathbb{N}\},\\
\mathcal{H}_2 &= span\{|n,-\rangle\,,\ n \geq K_0\},\\
\mathcal{H}_3 &= span\{|g,0\rangle\} \cup \{|n,-\rangle\,,\ 1 \leq n < K_0\},
\end{aligned}$$

[18] G.G. Amosov, A.S. Mokeev, A.N. Pechen, Non-commutative graphs and quantum error correction for a two-mode quantum oscillator, Quantum Information Processing, **19**, 95 (2020).

[19] G.G. Amosov, A.S. Mokeev, A.N. Pechen, Noncommutative graphs based on finite-infinite system couplings: Quantum error correction for a qubit coupled to a coherent field, Phys. Rev. A **103**, 042407 (2021).