СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Турова Гузель Дамировна

«Семинар отдела механики»,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва,
06.05.2024

Работа поддержана грантом РНФ 19-71-30012

Одномерный случай

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial p(\rho_1, e_1)}{\partial x} + \rho_2 \frac{v_1 - v_2}{\tau} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{v_1 - v_2}{\tau} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{p(\rho_1, e_1)}{\rho_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{(v_2 - v_1)^2}{\tau} + q_0 \frac{\rho_2}{\rho_1} (e_1 - \delta e_2) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial e_2}{\partial x} - q_0 (e_1 - \delta e_2) = 0, \tag{6}$$

где $\rho_1, \rho_2, v_1, v_2, e_1, e_2$ — неизвестные функции, давление $p(\rho_1, e_1) = a \rho_1 e_1$.
Обозначим выражения в левых частях как $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$, соответственно.

Инфинитезимальный оператор

В пространстве независимых переменных $J^1 = (t, x, \rho_1, \rho_2, v_1, v_2, e_1, e_2, \rho_{1t}, \rho_{2t}, v_{1t}, v_{2t}, e_{1t}, e_{2t}, \rho_{1x}, \rho_{2x}, v_{1x}, v_{2x}, e_{1x}, e_{2x})$ систему (1)–(6) будем рассматривать как некоторое многообразие $\mathbf{G}$, задаваемое с помощью вектор-функции $\mathbf{G} = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)$ уравнением $\mathbf{G} = 0$.

Поиск симметрий сводится к поиску генератора однопараметрической группы преобразований пространства $(t, x, \rho_1, \rho_2, v_1, v_2, e_1, e_2)$, который задается в виде

$$X = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \eta_{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \eta_{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} + \eta_{v_1} \frac{\partial}{\partial v_1} + \eta_{v_2} \frac{\partial}{\partial v_2} + \eta_{e_1} \frac{\partial}{\partial e_1} + \eta_{e_2} \frac{\partial}{\partial e_2}.$$

В результате поиска должны быть найдены коэффициенты данного генератора, т.е. $\xi_t, \xi_x, \eta_{\rho_1}, \eta_{\rho_2}, \eta_{v_1}, \eta_{v_2}, \eta_{e_1}, \eta_{e_2}$ как функции переменных $t, x, \rho_1, \rho_2, v_1, v_2, e_1, e_2$.

$$\underset{1}{X} = X + \zeta^t_{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_{1t}} + \zeta^t_{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_{2t}} + \zeta^t_{v_1} \frac{\partial}{\partial v_{1t}} + \zeta^t_{v_2} \frac{\partial}{\partial v_{2t}} + \zeta^t_{e_1} \frac{\partial}{\partial e_{1t}} + \zeta^t_{e_2} \frac{\partial}{\partial e_{2t}} +$$
$$+ \zeta^x_{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_{1x}} + \zeta^x_{\rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_{2x}} + \zeta^x_{v_1} \frac{\partial}{\partial v_{1x}} + \zeta^x_{v_2} \frac{\partial}{\partial v_{2x}} + \zeta^x_{e_1} \frac{\partial}{\partial e_{1x}} + \zeta^x_{e_2} \frac{\partial}{\partial e_{2x}}.$$

Условие касания векторным полем $\underset{1}{X}$ многообразия $\mathbf{G}=0$: $\underset{1}{X}\mathbf{G}\big|_{\mathbf{G}=0}=0$.

$$\underset{1}{X}F_1=\frac{\partial v_1}{\partial x}\eta_{\rho_1}+\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\eta_{v_1}+\zeta^t_{\rho_1}+v_1\zeta^x_{\rho_1}+\rho_1\zeta^x_{v_1},$$

$$\underset{1}{X}F_2=\frac{\partial v_2}{\partial x}\eta_{\rho_2}+\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\eta_{v_2}+\zeta^t_{\rho_2}+v_2\zeta^x_{\rho_2}+\rho_2\zeta^x_{v_2},$$

$$\underset{1}{X}F_3=\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+a\frac{\partial e_1}{\partial x}\right)\eta_{\rho_1}+\left(\frac{v_1-v_2}{\tau}\right)\eta_{\rho_2}+$$
$$+\left(\rho_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\rho_2}{\tau}\right)\eta_{v_1}-\frac{\rho_2}{\tau}\eta_{v_2}+\left(a\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)\eta_{e_1}+\rho_1\zeta^3_t+ae_1\zeta^x_{\rho_1}+\rho_1v_1\zeta^x_{v_1}+a\rho_1\zeta^x_{e_1},$$

$$\underset{1}{X}F_4=-\frac{1}{\tau}\eta_{v_1}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{1}{\tau}\right)\eta_{v_2}+\zeta^t_{v_2}+v_2\zeta^x_{v_2},$$
$$\dots$$

Определяющие уравнения

В результате расщепления получим уравнения на неизвестные коэффициенты оператора X. Некоторые из этих уравнений легко интегрируются и приводят к следующим равенствам $\xi_t = \xi_t(t, x)$, $\xi_x = \xi_x(t, x)$. После расщепления уравнения $\underset{1}{X} F_1\big|_{\mathbf{G}=0} = 0$, получим

$$(\eta_{\rho_1})_t + v_1(\eta_{\rho_1})_x + \rho_1(\eta_{v_1})_x + (\eta_{\rho_1})_{e_2} q_0 e_1 - \frac{(\xi_t)_x \rho_2 v_2}{\tau} -$$

$$-\frac{(\eta_{\rho_1})_{v_1}\rho_2 v_1}{\rho_1\tau} + \frac{(\eta_{\rho_1})_{v_1}\rho_2 v_2}{\rho_1\tau} + \frac{(\eta_{\rho_1})_{v_2} v_1}{\tau} - \frac{(\eta_{\rho_1})_{v_2} v_2}{\tau} -$$

$$-\frac{(\eta_{\rho_1})_{e_1} q_0 \rho_2 e_1}{\rho_1} + \frac{(\eta_{\rho_1})_{e_1} q_0 \rho_2 \delta e_2}{\rho_1} + \frac{(\eta\rho_1)_{e_1}\rho_2 v_1^2}{\rho_1\tau} - (\eta\rho_1)_{e_2} q_0 \delta e_2 +$$

$$+\frac{(\xi_t)_x \rho_2 v_1}{\tau} + \frac{(\eta_{\rho_1})_{e_1}\rho_2 v_2^2}{\rho_1\tau} - \frac{2(\eta_{\rho_1})_{e_1}\rho_2 v_2 v_1}{\rho_1\tau} = 0,$$

$$\rho_1(\eta_{v_1})_{v_1} - \rho_1(\xi_x)_x - (\eta_{\rho_1})_{e_1} a e_1 + (\eta_{\rho_1}) + (\xi_t)_t \rho_1 + 2\rho_1(\xi_t)_x v_1 - (\eta_{\rho_1})_{\rho_1}\rho_1 = 0,$$

$$(\eta_{\rho_1})_{v_2} v_1 - (\eta_{\rho_1})_{v_2} v_2 + \rho_1(\eta_{v_1})_{v_2} - (\eta_{\rho_1})_{\rho_2}\rho_2 = 0.$$

Алгебра Ли группы симметрий системы

$$\eta_{\rho_1} = A\rho_1,\ \eta_{\rho_2} = A\rho_2,$$

$$\eta_{v_1} = \eta_{v_2} = Q,\ \eta_{e_1} = \eta_{e_2} = 0,$$

$$\xi_t = M,\ \xi_x = Qt + P,$$

где A, Q, M, P – постоянные.

Алгебра Ли группы симметрий системы уравнений (1)–(6) *разреженной газовзвеси в случае* $p = a\rho_1 e_1$ *имеет базис операторов*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2},\ X_4 = \rho_1\frac{\partial}{\partial \rho_1} + \rho_2\frac{\partial}{\partial \rho_2}.$$

Трехмерный случай

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0, \tag{7}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 \right) + \nabla p(\rho_1, e_1) = -\frac{\rho_2}{\tau}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \tag{8}$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla \mathbf{u}_2 \right) = -\frac{\rho_2}{\tau}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \tag{9}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{div} e_1 + \frac{p(\rho_1, e_1)}{\rho_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \frac{\rho_2}{\tau \rho_1} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} q_0 (e_1 - \delta e_2), \tag{10}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla e_2 = q_0 (e_1 - \delta e_2), \tag{11}$$

здесь $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ – векторы скоростей первой и второй фаз, ρ_1, ρ_2 – плотности, e_1, e_2 – внутренние энергии, $p(\rho_1, e_1)$ – давление в первой фазе (функциональный параметр), δ, q_0, τ – постоянные параметры.

Базис ядра основных алгебр Ли трехмерной системы уравнений

Базис ядра основных алгебр Ли системы (7)–(11) *с произвольным* p *имеет вид*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2},\ X_5 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2},$$

$$X_6 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2},\ X_7 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial v_2},$$

$$X_8 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + w_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial w_1} + w_2\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$X_9 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + w_1\frac{\partial}{\partial v_1} - v_1\frac{\partial}{\partial w_1} + w_2\frac{\partial}{\partial v_2} - v_2\frac{\partial}{\partial w_2},\ X_{10} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Инвариантные решения

Относительно подалгебры $< t\frac{\partial}{\partial x} + v_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial v_2} >$ для одномерной системы инвариантные решения будем искать в виде

$$v_1 = \frac{x}{t} + \varphi_1(t), v_2 = \frac{x}{t} + \varphi_2(t), \rho_1 = \rho_1(t), \rho_2 = \rho_2(t), e_1 = e_1(t), e_2 = e_2(t). \quad (12)$$

Система (1)–(6) примет вид

$$\begin{aligned} &\rho_{1t} + \tfrac{\rho_1}{t} = 0, && \rho_{2t} + \tfrac{\rho_2}{t} = 0, \\ &\varphi_{1t} + \tfrac{\varphi_1}{t} + \tfrac{\rho_2}{\rho_1}\tfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{\tau} = 0, && \varphi_{2t} + \tfrac{\varphi_2}{t} = \tfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{\tau}, \\ &e_{1t} + \left(\tfrac{a}{t} + \delta q_0\tfrac{\rho_2}{\rho_1}\right) e_1 - \delta q_0\tfrac{\rho_2}{\rho_1} e_2 = \tfrac{\rho_2}{\rho_1}\tfrac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{\tau}, && e_{2t} = q_0(e_1 - \delta e_2). \end{aligned}$$

Изотермический случай

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial (c_1^2 \rho_1)}{\partial x} + \rho_2 \frac{v_1 - v_2}{\tau} = \mu v_{1xx},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{v_1 - v_2}{\tau} = 0,$$

где $P = c_1^2 \rho_1$, c_1 и μ – скорость звука и вязкость первой фазы.

Система уравнений для ударной волны

Частное решение системы уравнений ищется в виде бегущей волны

$$v_i(t,x) = \tilde{v}_i(z) + D, \rho_i(t,x) = \tilde{\rho}_i(z), z = x - Dt,\ i = 1, 2,$$

где D – скорость бегущей волны, $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ – скорости компонентов в системе отсчёта, сопутствующей волне. Отсюда

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{v}_1 = -\rho_1^0 D, \tag{13}$$

$$\tilde{\rho}_2 \tilde{v}_2 = -\rho_2^0 D, \tag{14}$$

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{v}_1 \tilde{v}_{1z} + c_1^2 \tilde{\rho}_{1z} + \tilde{\rho}_2 \frac{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2}{\tau} = \mu \tilde{v}_{1zz}, \tag{15}$$

$$\tilde{v}_2 \tilde{v}_{2z} = \frac{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2}{\tau}. \tag{16}$$

Случай без вязкости. Первый интеграл

Обозначим $k = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}$ и перейдем к переменным v_1, v_2

$$v_{1z} = -k\frac{v_1 - v_2}{\tau}\frac{v_1^2}{v_1^2 - c_1^2}, \tag{17}$$

$$v_{2z} = \frac{v_1 - v_2}{\tau v_2}. \tag{18}$$

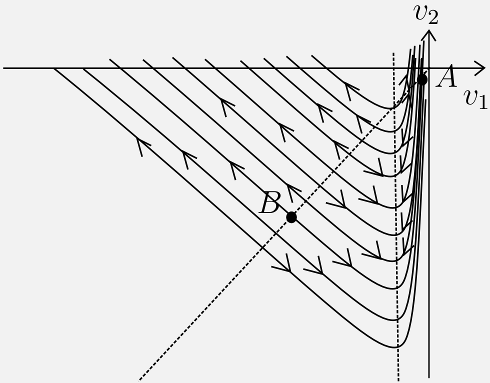
Первый интеграл имеет вид

$$v_1 + \frac{c_1^2}{v_1} + kv_2 = -D(k+1) - \frac{c_1^2}{D}. \tag{19}$$

Уравнение (19) определяет равновесные состояния системы перед и за фронтом ударной волны. Если скорости компонентов равны, а течение однородно, (19) имеет два решения:

$$v_1 = v_2 = -D,$$

$$v_1 = v_2 = \frac{-c_1^2}{D(1+k)}.$$



Фазовый портрет

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ПРЕПРИНТ №8-86

Ю.В.Казаков, А.В.Фёдоров, В.М.Фомин

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУР ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ
УДАРНЫХ ВОЛН И РАСЧЁТ РАЗЛЁТА
ОБЛАКА ГАЗОВЗВЕСИ

1986г.

Понижение порядка

$$
\begin{aligned}
&v_{1z} = P,\\
&\mu P' = D\rho_1^0 \left(-k\tfrac{v_1 - v_2}{\tau v_2} + \tfrac{c_1^2 - v_1^2}{v_1^2} P\right),\\
&v_{2z} = \tfrac{v_1 - v_2}{\tau v_2}.
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Первый интеграл такой системы имеет вид

$$
v_1 + \frac{c_1^2}{v_1} + kv_2 + \frac{\mu}{D\rho_1^0} P = C_2,
$$

$$
C_2 = -D(k+1) - \frac{c_1^2}{D}.
$$

Быстро-медленные системы

Е. Ф. МИЩЕНКО, Н. Х. РОЗОВ

Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания

1975г.

Быстро-медленные системы. Уравнение Ван дер Поля

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon). \end{cases} \tag{21}$$

Введем замену

$$t = \varepsilon\tau, \varepsilon\dot{x} = x'.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \varepsilon), \\ y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{cases} \tag{22}$$

τ – «быстрое» время, t – «медленное» время.

Быстро-медленные системы. Уравнение Ван дер Поля

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{cases} 0 = f(x, y, 0), \\ \dot{y} = g(x, y, 0). \end{cases}$$

Медленная

$$\begin{cases} x' = f(x, y, 0), \\ y' = 0. \end{cases}$$

Быстрая

Пример. Уравнение Ван дер Поля

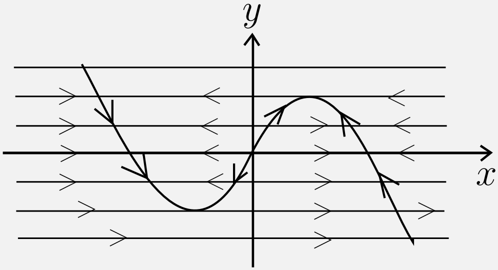
$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

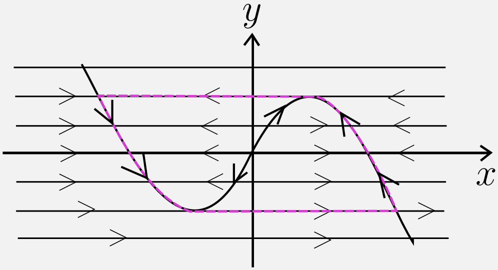
$$\begin{cases} 0 = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Медленная

$$\begin{cases} x' = x - x^3 - y, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Быстрая





$$\begin{cases} 0 = x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Медленная

$$\begin{cases} x' = x - x^3 - y, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Быстрая

Понижение порядка

$$
\begin{aligned}
&v_{1z} = P,\\
&\mu P' = D\rho_1^0 \left(-k\tfrac{v_1 - v_2}{\tau v_2} + \tfrac{c_1^2 - v_1^2}{v_1^2} P\right),\\
&v_{2z} = \tfrac{v_1 - v_2}{\tau v_2}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Первый интеграл такой системы имеет вид

$$
v_1 + \frac{c_1^2}{v_1} + k v_2 + \frac{\mu}{D\rho_1^0} P = C_2,
$$

$$
C_2 = -D(k+1) - \frac{c_1^2}{D}.
$$

Сузим систему уравнений на первый интеграл

$$\begin{cases} \mu v_{1z} = D\rho_1^0 \left(C_2 - v_1 - kv_2 - \frac{c_1^2}{v_1} \right), \\ v_{2z} = \frac{v_1 - v_2}{\tau v_2}. \end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим систему с другим временем t, где $z = t\mu$.

Система с быстрым временем

$$\begin{cases} v_t = D\rho_1^0 \left(C_2 - v_1 - kv_2 - \frac{c_1^2}{v_1} \right), \\ v_{2t} = 0. \end{cases}$$

Система с медленным временем

$$\begin{cases} 0 = D\rho_1^0 \left(C_2 - v_1 - kv_2 - \frac{c_1^2}{v1} \right), \\ v_{2z} = \frac{v_1 - v_2}{\tau v_2}. \end{cases}$$

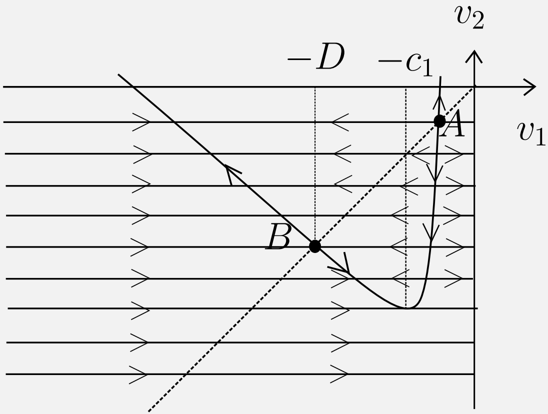
Фазовый портрет

Система с быстрым временем

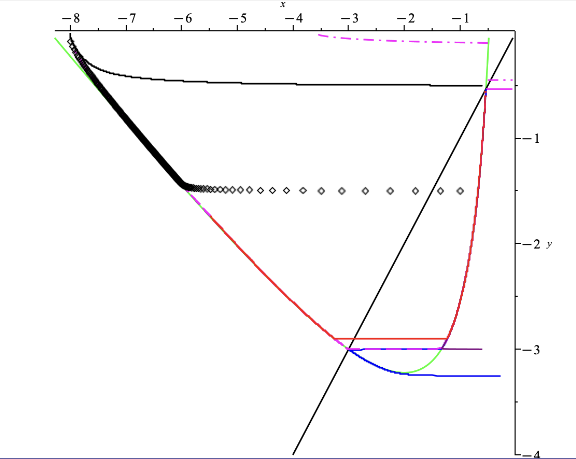
$$\begin{cases} v_t = D\rho_1^0\left(C_2 - v_1 - kv_2 - \frac{c_1^2}{v_1}\right), \\ v_{2t} = 0. \end{cases}$$

Система с медленным временем

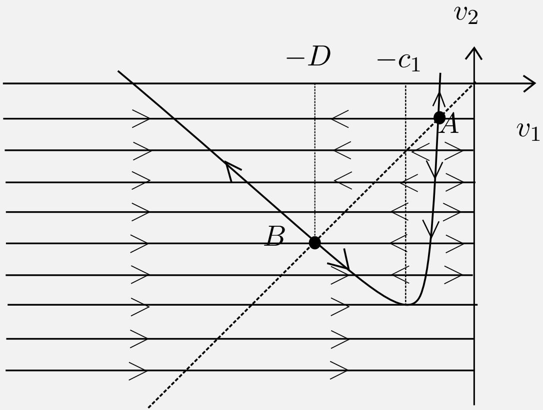
$$\begin{cases} 0 = D\rho_1^0\left(C_2 - v_1 - kv_2 - \frac{c_1^2}{v1}\right), \\ v_{2z} = \frac{v_1 - v_2}{\tau v_2}. \end{cases}$$



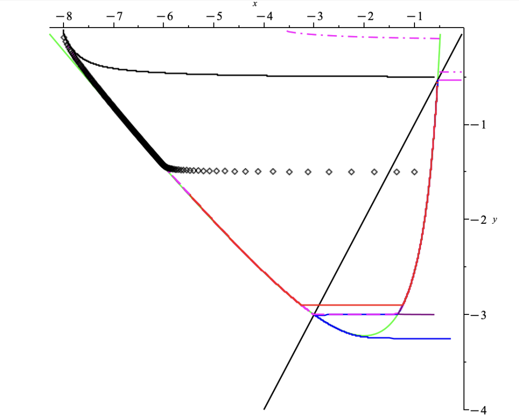
Рассмотрим следующие значения параметров численного эксперимента: $\tau = 1,\ k = 1,5,\ c_1 = 2,\ D = 3, \mu = 0,01,\ \rho_1^0 = 1.$



Сравнение



Траектории быстрой системы
и медленной системы



Численный эксперимент

- **Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М.** Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
- **Рахматулин Х.А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
- **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных ур-й. М.: Наука, 1978.
- **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным ур-ям. М.:Мир, 1989.
- **Ибрагимов, Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- **Казаков, Ю.В., Федоров, А.В., Фомин, В.М.** Исследование структур изотермических ударных волн и расчет разлета облака газовзвеси: препринт. Новосибирск, 1986. (Препринт / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теорет. и прикл. механики; № 8).
- **Мищенко, Е.Ф., Розов Н.Х.** Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М: Наука, 1975.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!