Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 14. Уравнение Ху-Паза-Занга. Модель спин-бозона без приближения вращающейся волны. Модель с зависящим от времени гамильтонианом как открытая система

Теретёнков Александр Евгеньевич

6 мая 2024 г.

В прошлой серии...

Гильбертово пространство

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$$

Коммутационные соотношения

$$[x,p] = i, \qquad [b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Гамилтониан

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + V(x), \qquad H_B = \int dk \omega_k b_k^\dagger b_k,$$

$$H_I = -xB, \qquad B = \int dk g_k (b_k + b_k^\dagger), \qquad g_k \in \mathbb{R}$$

Уравнение Ху-Паза-Занга

В случае факторизованных начальных состояний можно получить точные уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_S(t) = &- i\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}(m\omega_0^2 + \Delta(t))x^2, \rho_S(t)\right] - \\
&- i\gamma(t)[x, \{p, \rho_S(t)\}] - D_{pp}(t)[x, [x, \rho_S(t)]] + \\
&+ 2D_{xp}(t)[x, [p, \rho_S(t)]]
\end{aligned}
$$

Уравнение Ху-Паза-Занга

Уравнения второго порядка

$$\Delta^{(2)}(t) = -\int_0^t D(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \frac{1}{2m\omega_0}\int_0^t D(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

$$D_{pp}^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t D_{\text{th}}(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$D_{xp}^{(2)}(t) = \frac{1}{4\omega_0}\int_0^t D_{\text{th}}(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

(Лэмбовский сдвиг и коэффициент затухания не зависят от температуры).

Модель спин-бозона (без RWA)

Гильбертово пространство

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$$

Коммутационные соотношения

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Гамилтониан

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z, \qquad H_B = \int dk \omega_k b_k^\dagger b_k,$$

$$H_I = -\frac{1}{2}\sigma_x B, \qquad B = \int dk g_k (b_k + b_k^\dagger), \qquad g_k \in \mathbb{R}$$

Модель спин-бозона (без RWA)

Уравнение Блоха в представлении Шредингера

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G(t)\vec{v} + \vec{b}$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 + g_{yx}(t) & g(t) & 0 \\ 0 & 0 & g(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_z(t) \end{pmatrix}$$

$$g_{yx}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$b_z(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t D(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

Зависящий от времени гамильтониан

$$H = H_S + H_B + \lambda H_I, \qquad H_I = \sum_j S_j \otimes B_j, \qquad B_j = B_j^\dagger, \qquad S_j = S_j^\dagger$$

Положим

$$\langle B_j(t) \rangle = 0, \qquad \langle \cdot \rangle \equiv \mathrm{Tr}_B(\cdot \rho_B)$$

В случае, если изначально переопределим

$$B_j' = B_j - \langle B_j(t) \rangle, \qquad H_S'(t) = H_S + \lambda \sum_j S_j \langle B_j(t) \rangle$$

В случае $\langle B_j(t) \rangle = \mathrm{const}$ это сведёт задачу к $\langle B_j(t) \rangle = 0$, а в общем случае, это как раз приводит к появлению зависимости от времени в гамильтониане.

Зависящий от времени гамильтониан

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\gamma_{ij}(\omega, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_i(t) B_j(t-s) \rangle$$

и

$$\eta_{ij}(\omega, t) \equiv \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{ij}(\omega', t)}{\omega' - \omega} \frac{d\omega'}{2\pi}.$$

Кроме того, разложим

$$S_j = \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_S, \,\cdot\,]} \tilde{S}_{j,m}(\omega), \qquad [H_S, \tilde{S}_j(\omega)] = \omega \tilde{S}_j(\omega).$$

Зависящий от времени гамильтониан

Утверждение 1

При $\lambda \to 0$ *и* $t = O(\lambda^{-2})$,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S + \lambda^2 H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \lambda^2 \mathcal{D}_t(\rho_S(t)) + o(\lambda^2),$$

где

$$H_{LS}(t) = \sum_{ij} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \,\cdot\,]} \eta_{ij}(\omega, t) \tilde{S}_i^\dagger(\omega) \tilde{S}_j(\omega)$$

— гамильтониан лэмбовского сдвига, а

$$\mathcal{D}_t(\rho_S) = \sum_{ij} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_S, \,\cdot\,]} \gamma_{ij}(\omega, t) \left(\tilde{S}_j(\omega) \rho_S \tilde{S}_i^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \tilde{S}_i^\dagger(\omega) \tilde{S}_j(\omega), \rho_S \right\} \right)$$

— дисспатор.

Зависящий от времени гамильтониан

- Чтобы зависимость от времени "выжила" необходимо вводить малый параметр в корреляционные функции вида $\gamma_{ij}(\omega, t) = \tilde{\gamma}_{ij}\left(\omega, \lambda^2 t\right)$, $\eta_{ij}(\omega, t) = \tilde{\eta}_{ij}\left(\omega, \lambda^2 t\right)$.
- Переопределение

$$H'_S(t) = H_S + \lambda \sum_j S_j \langle B_j(t) \rangle$$

можно сделать и в ситуации когда $\lambda \langle B_j(t) \rangle$ не мало (можно считать, что $\langle B_j(t) \rangle \sim \lambda^{-1}$), но $\lambda^2 \langle B'_i(t) B'_j(t-s) \rangle$ — мало. Это и приводит к зависящим от времени гамильтонианам общего вида.

Зависящий от времени гамильтониан

Поэтому рассмотрим постановку:

$$H(t) = H_S(t) + H_B + \lambda H_I(t), \qquad H_I = \sum_j S_j(t) \otimes B_j$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)], \qquad \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)$$

Причём гамильтониан периодичен с периодом T

$$H_S(t) = H_S(t+T)$$

Кроме того,

$$S_j(t) = S_j(t+T)$$

Зависящий от времени гамильтониан

Пусть

$$\frac{d}{dt}U_S(t,t_0) = -iH_S(t)U_S(t,t_0), \qquad U_S(t_0,t_0) = I$$

то есть

$$U_S(t,t_0) = \mathcal{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} H_S(s)ds\right)$$

Теорема 1 (Флоке)

$$U_S(t,t_0) = e^{-iK(t)}e^{-iH_F(t-t_0)}e^{iK(t_0)},$$

где $K(t+T) = K(t)$ — ударный (kick) оператор, H_F — гамильтониан Флоке

Зависящий от времени гамильтониан

Можно выбрать и H_F и $K(t)$ их так, что $e^{iK(t_0)} = I$, тогда H_F может быть определён из уравнения

$$U_S(T + t_0,t_0) = e^{-iH_F T}$$

Собственные числа H_F называют квази-энергиями. Они определены с точностью до $\frac{2\pi}{T}$, однако их принято выбирать в "первой зоне Бриллюэна" так что $\operatorname{spec} H_F \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$.

Зависящий от времени гамильтониан

Разложим T-периодическую функцию в ряд Фурье

$$e^{iK(t)} S_j(t) e^{-iK(t)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{j,m} e^{i\nu m t}, \qquad \nu = \frac{2\pi}{T}$$

Кроме того, разложим

$$\tilde{S}_{j,m} = \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \cdot\,]} \tilde{S}_{j,m}(\omega), \qquad [H_F, \tilde{S}_{j,m}(\omega)] = \omega \tilde{S}_{j,m}(\omega)$$

Тогда

$$U_S^\dagger(t,0) S_j(t) U_S(t,0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \cdot\,]} e^{i(\omega + \nu m)t} \tilde{S}_{j,m}(\omega).$$

Зависящий от времени гамильтониан

Разложим T-периодическую функцию в ряд Фурье

$$e^{iK(t)} S_j(t) e^{-iK(t)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_{j,m} e^{i\nu m t}, \qquad \nu = \frac{2\pi}{T}$$

Кроме того, разложим

$$\tilde{S}_{j,m} = \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F,\,\cdot\,]} \tilde{S}_{j,m}(\omega), \qquad [H_F, \tilde{S}_{j,m}(\omega)] = \omega \tilde{S}_{j,m}(\omega)$$

Тогда

$$U_S^\dagger(t,0) S_j(t) U_S(t,0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F,\,\cdot\,]} e^{i(\omega+\nu m)t} \tilde{S}_{j,m}(\omega).$$

Чтобы перейти обратно в представление Шрёдингера определим

$$\tilde{S}_{j,m}(\omega; t) = e^{-iK(t)} \tilde{S}_{j,m}(\omega) e^{iK(t)}$$

Зависящий от времени гамильтониан

$$B_j(t) \equiv e^{iH_B t} B_j e^{-iH_B t}$$

Пусть

$$[H_B, \rho_B(0)] = 0$$

$$\langle B_j(t) \rangle = 0, \qquad \langle \, \cdot \, \rangle \equiv \mathrm{Tr}_B(\, \cdot \, \rho_B)$$

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\gamma_{ij}(\omega, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_i(t) B_j(t-s) \rangle$$

и разложим

$$\eta_{ij}(\omega, t) \equiv \mathrm{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{ij}(\omega', t)}{\omega' - \omega} \frac{d\omega'}{2\pi}.$$

Зависящий от времени гамильтониан

Теорема 2

При $\lambda \to +0$ *и* $t = O(\lambda^{-2})$,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S(t) + \lambda^2 H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \lambda^2 \mathcal{D}_t(\rho_S(t)),$$

где

$$H_{LS}(t) = \sum_{ij} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \, \cdot \,]} \eta_{ij}\left(\omega + \nu m, t\right) \tilde{S}_{i,m}^{\dagger}(\omega; t) \tilde{S}_{j,m}(\omega; t)$$

$$\mathcal{D}_t(\rho_S) = \sum_{ij} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \, \cdot \,]} \gamma_{ij}\left(\omega + \nu m, t\right) \Bigg(\tilde{S}_{j,m}(\omega; t) \rho_S \tilde{S}_{i,m}^{\dagger}(\omega; t)$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \tilde{S}_{i,m}^{\dagger}(\omega; t) \tilde{S}_{j,m}(\omega; t), \rho_S \right\}$$

Случай двухуровневой системы

$$H(t) = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \frac{\Omega}{2}\left(\sigma_- e^{i\nu t} + \sigma_+ e^{-i\nu t}\right)$$

$$H_I = \sigma_x \otimes B$$

$$H_F = \frac{1}{2}\left(\omega_0 - \nu\right)\sigma_z + \frac{\Omega}{2}\sigma_x$$

$$\Delta = \omega_0 - \nu$$

Случай двухуровневой системы

$$\tilde{S}\left(\nu-\sqrt{\Delta^2+\Omega^2};t\right)=\frac{1}{4\left(\Delta^2+\Omega^2\right)}\begin{pmatrix}\Omega\left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}-\Delta\right) & -\Omega^2e^{-i\nu t}\\ \left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}-\Delta\right)^2e^{i\nu t} & -\Omega\left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}-\Delta\right)\end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}\left(\nu+\sqrt{\Delta^2+4\Omega^2};t\right)=\frac{1}{4\left(\Delta^2+\Omega^2\right)}\begin{pmatrix}-\Omega\left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}+\Delta\right) & -\Omega^2e^{-i\nu t}\\ \left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}+\Delta\right)^2e^{i\nu t} & \Omega\left(\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}+\Delta\right)\end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}\left(\nu;t\right)=\frac{\Omega}{2\left(\Delta^2+\Omega^2\right)}\begin{pmatrix}\Delta & \Omega e^{-i\nu t}\\ \Omega e^{i\nu t} & -\Delta\end{pmatrix}$$

- Szczygielski, Krzysztof, David Gelbwaser-Klimovsky, and Robert Alicki. "Markovian master equation and thermodynamics of a two-level system in a strong laser field."Physical Review E 87.1 (2013): 012120.