

Современные проблемы теории функциональных пространств и геометрического анализа

Грант РФФИ № 24-11-00170, 2024-2026

Руководитель О.В.Бесов

Предыдущие проекты:

Актуальные проблемы теории пространств дифференцируемых функций и приложения

Грант РФФИ № 14-11-00443, 2014-2016; продление 2017-2018

Современные проблемы теории функциональных пространств и приложения

Грант РФФИ № 19-11-00087, 2019-2021; продление 2022-2023

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Состав научного коллектива

Бесов Олег Владимирович, чл.-корр. РАН, руководитель проекта;

Буренков Виктор Иванович, д.ф.-м.н., основной исполнитель;

Степанов Владимир Дмитриевич, чл.-корр. РАН, основной исполнитель;

Тюленев Александр Иванович, д.ф.-м.н., основной исполнитель;

Бахтигареева Эльза Гизаровна, к.ф.-м.н.;

Головко Андрей Юрьевич, к.ф.-м.н.;

Гольдман Михаил Львович, д.ф.-м.н.;

Олейник Роман Дмитриевич; студент;

Сенуси Марьям Абделькадеровна; преп.

Ушакова Елена Павловна, д.ф.-м.н.;

Определения. Задачи. Результаты.

Ожидаемые результаты.

Пространства Соболева и Бесова.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathfrak{M}(\Omega)$ класс всех функций на Ω , измеримых по Лебегу. Для $0 < p \leq \infty$ зададим пространства Лебега:

$$L_p(\Omega) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \|f\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Для $1 \leq p \leq \infty, m \in \mathbb{N}$ пространства Соболева $W_p^m(\Omega)$ имеют вид

$$W_p^m(\Omega) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\Omega) : \|f\|_{W_p^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} < \infty \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ — мультииндекс, $|\alpha| := \sum_1^n |\alpha_i|$.

Пространство Бесова имеет несколько эквивалентных определений. Пусть $h \in \mathbb{R}^n, \|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega)},$

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), \Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h(\Delta_h^k f(x), k = 1, 2, \dots,$$

L_p —модуль непрерывности функции $f \in L_p, :$

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f\|_p, \quad t > 0.$$

Для $s > 0, 1 \leq p, q \leq \infty$ норма в пространстве Бесова B_{pq}^s :

$$\|f\|_{B_{pq}^s} := \|f\|_p + \left(\int_0^\infty [t^{-s} \omega_k(f, t)_p]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где $k > s$. Альтернативное определение

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|f\|_{L_p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p}}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q}.$$

При $q = \infty$ эта норма совпадает с нормой пространств Никольского H_p^s

$$\|f\|_{H_p^s} := \|f\|_p + \sup_{0 < t < \infty} t^{-s} \omega_k(f, t)_p,$$

$$\|f\|_{H_p^s} = \|f\|_p + \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|\Delta_h^k f\|_{L_p}}{|h|^s}.$$

Отметим известные соотношения между классами W, B, H

$$B_{p1}^s \hookrightarrow B_{pq}^s \hookrightarrow B_{pq'}^s \hookrightarrow B_{p\infty}^s \hookrightarrow H_p^s, 1 \leq q < q' \leq \infty,$$

$$W_p^k \hookrightarrow H_p^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$H_p^{s+\varepsilon} \hookrightarrow B_{pq}^s \hookrightarrow H_p^s, \quad \varepsilon > 0,$$

$$H_p^{s+\varepsilon} \hookrightarrow W_p^{[s]}, B_{pq}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow B_{pq}^s, \quad \varepsilon > 0,$$

$$W_2^k = B_{22}^k; W_p^k \neq B_{pq}^k, \quad p \neq 2$$

Возникают следующие задачи:

- (а) вложения разных метрик между классами $L_r, W_p^m(\Omega), B_{pq}^s(\Omega)$,
- (б) вложения разных измерений (размерностей) между $W_p^m(\mathbb{R}^n), B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $W_p^m(\mathbb{R}^m), B_{pq}^s(\mathbb{R}^m)$, где $1 \leq m < n$ (Теоремы о следах).

Характерными примерами являются следующие теоремы.

Теорема 1 (С.Л.Соболев, 1938). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - область с условием конуса. Тогда, если $1 \leq k < n, 1 \leq p < q < \infty, k \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$, то

$$W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega).$$

Теорема 2 (О.В.Бесов, 1961). Пусть $1 \leq m < n, 1 \leq p, q \leq \infty, \rho = s - \frac{n-m}{p}$. Тогда

$$B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{pq}^\rho(\mathbb{R}^m).$$

В частности,

$$\text{tr}_{\mathbb{R}^m} W_p^k(\mathbb{R}^n) = B_{pp}^{k - \frac{n-m}{p}}(\mathbb{R}^m).$$

Задача (а) рассматривалась в серии работ О.В.Бесова для областей с усложнением условия конуса. В частности, в последней работе "Вложения пространств функций положительной гладкости на гёльдеровой области в пространства Лебега Математические заметки, 2023, получен следующий результат

Теорема 3 Пусть G — σ -гёльдерова область, $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty$ и выполняется условие

$$s - [\sigma(n-1) + 1](1/p - 1/q) \geq 0.$$

Тогда

$$W_p^s(G) \hookrightarrow L_q(G). \tag{1}$$

Напомним, что важной характеристикой компактности (либо меры некомпактности) линейного ограниченного оператора $T : E \rightarrow F$, действующего из (квази) банахового пространства E в (квази) банахово пространство F , являются его аппроксимативные и энтропийные числа, $a_n(T)$ и $e_n(T)$, соответственно, определяемые следующим образом:

$$a_n(T) := \inf\{\|T - S\|_{E \rightarrow F} : S : E \rightarrow F, \text{ rank } S \leq n - 1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$e_n(T) := \inf\left\{\varepsilon > 0 : T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} B_F(Tx_j; \varepsilon), \quad x_1, \dots, x_{2^{n-1}} \in B_E\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\} \text{ — единичный шар в } E,$$

$$B_F(y, \varepsilon) := \{x \in F : \|x - y\|_F < \varepsilon\}.$$

Новой задачей в заявленном гранте является оценка энтропийных чисел оператора вложения (1). Ранее для операторов вложения исследовались задачи об асимптотическом поведении аппроксимативных чисел и поперечников Колмогорова.

Важным направлением исследований является обобщение Теорем 1 и 3 на анизотропный случай, т.е. когда показатели суммируемости и гладкости являются векторами. Такие исследования велись А.Ю.Головко, “Аддитивные и мультипликативные анизотропные оценки интегральных норм дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, Тр. МИАН, 290, 2015, 293–303; подготовлена и защищена кандидатская диссертация. Исследования будут продолжены для пространств Соболева для новых случаев нерегулярных областей.

Задача (b) рассматривалась в серии работ А.И.Тюленева. В частности, о следах пространства $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$, $l \in \mathbb{N}$, где $\gamma \in A_{loc}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ вес из класса Мукенхоупта.

(T) Tyulenev, A. I. Traces of weighted Sobolev spaces with Muckenhoupt weight. The case $p=1$. Nonlinear Anal. 128 (2015), 248–272.

История началась с работы

E. Gagliardo, Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 27 (1957) 284–305,

где был рассмотрен безвесовой случай и показано, что $tr_{\mathbb{R}^n} W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}) = L_1(\mathbb{R}^n)$. Однако, обратного линейного оператора продолжения не существует. В работе

J. Peetre, A counterexample connected with Gagliardo's trace theorem, Comment. Math. (1979) 277–282 (special issue)

уточняется пространство следов, где такой обратный существует. Если вес γ зависит только от x_{n+1} , задача рассматривалась в работе

А. С. Гинзбург, О следах функций из весовых классов, Изв. вузов. Матем., 1984, номер 4, 61–64

В предстоящем исследовании предлагается упростить оператор продолжения из работы (T) и найти критерии его линейности или нелинейности.

Участниками проекта из РУДН планируется исследование по широкому спектру функциональных пространств и операторов. Будут изучены свойства квазинормированных обобщенных идеальных пространств, установлены критерии их полноты и взаимных вложений, описаны способы построения таких пространств с квазинормами, согласованными с интегральными оценками входящих в них функций. Будут получены критерии вложений и накрываний (поточечных и интегральных) для конусов неотрицательных измеримых функций со свойствами монотонности. Будут установлены новые оценки поточечных и интегральных мажорант для таких конусов, а также получены условия их вложений в обобщенные идеальные пространства. Будут установлены условия на ядра для обобщенных потенциалов Бесселя-Рисса, при выполнении которых имеет место равномерная сходимость спектральных разложений потенциалов по системе собственных функций оператора Лапласа. Эти задачи носят теоретический характер. Они являются новыми и актуальными, их решение даст развитие и обобщение ряда конкретных задач теории функциональных пространств, конусов монотонных функций и спектральной теории.

Пространства Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$. Пусть $0 < p \leq \infty, 0 \leq \lambda \leq n/p$. Тогда $f \in M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

Отметим, что

$$\|f\|_{M_p^0(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = v_n^{\frac{n}{p}}.$$

При $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$ пространство $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

В развитие полученных ранее результатов для пространств Морри будут исследованы новые интерполяционные теоремы для нелинейных операторов, теоремы о компактности потенциалов Рисса, неравенства Бернштейна и Никольского для тригонометрических многочленов для общих локальных и глобальных пространства типа Морри.

В серии работ

Е. П. Ушакова, Неравенства для норм с дробными интегралами, Алгебра и анализ, 35:3 (2023), 185–219.

Е. Р. Ushakova, Boundedness of the Hilbert transform in Besov spaces, Anal. Math., 49:4 (2023), 1137–1174.

Е. П. Ушакова, Разложение по всплескам типа сплайнов в весовых функциональных пространствах, Труды МИАН, 312, МИАН, М., 2021, 313–337.

Е. Р. Ushakova, Spline wavelet bases in function spaces with Muckenhoupt weights, Rev. Mat. Complut., 33 (2020), 125-160.

был произведен анализ в терминах сплайновых всплесков весовых функциональных пространств, включая пространства Бесова. В связи с этим планируется получение новых характеристик ограниченности для операторов интегрирования и дифференцирования типа Римана-Лиувилля, действующих в весовых пространствах Бесова. При этом предполагается, что класс весовых функций Мукенхоупта будет упрощен до подклассов абсолютно непрерывных, однородных и т.д. функций. Такой подход позволит усовершенствовать ранее полученные в этой области результаты с целью их дальнейшего применения к решению смежных задач.

В заключение остановимся на результатах об ассоциированной двойственности и рефлексивности, полученных в рамках предыдущих проектов. В первую очередь это относится к весовым пространствам Соболева первого порядка на действительной оси.

1. Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси, *Успехи матем. наук*, 74, № 6, (2019) 119-158.

2. Степанов В.Д., Об ассоциированных пространствах к весовым пространствам Чезаро и Копсона, *Математические заметки*, т. 111, No 3, 2022, 443-450.

3. Stepanov V.D., On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity. *J. Math. Anal. Appl.*, 507:1, 2022, 18 pp.

4. В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, О сильной и слабой ассоциированности весовых пространств Соболева первого порядка, *Успехи матем. наук*, 78, № 1, (2023) 167–204.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ нормированное пространство измеримых функций на I , X^* — двойственное (сопряженное) к X пространство всех линейных непрерывных функционалов. Классической задачей функционального анализа является задача о представлении элементов X^* в конкретной форме, этому посвящены теоремы Ф. Рисса. Если X^{**} — второе сопряженное, то $X \subset X^{**}$. Если $X = X^{**}$ (изометрический изоморфизм), то X называется рефлексивным. Для пространств Банаха критерием рефлексивности является слабая секвенциальная компактность замкнутого шара в X .

X называется идеальным, если из условия $|f| \leq |g|$ п.в. на I и $g \in X$ следует $f \in X$ и $\|f\| \leq \|g\|$.
Пусть

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M}(I) : \int_I |fg| < \infty \text{ для всех } f \in X \right\}. \quad (2)$$

$\forall g \in \mathfrak{D}_X$ определим функционалы

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} \text{ и } J_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X}$$

и ассоциированные пространства

$$X'_s := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_s} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\},$$

$$X'_w := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_w} := J_X(g) < \infty\},$$

которые мы называем “сильными” и “слабыми” ассоциированными пространствами, соответственно.

Для идеальных пространств со свойством Фату: $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ доказывается, что X и X'_s полные пространства и имеет место ассоциированная рефлексивность

$$(X'_s)'_s = X, \quad (3)$$

а также $X'_s = X^*$, если норма в X абсолютно непрерывна (АС-норма). Таким образом, $X^{**} = X$ только если X и X'_s имеют абсолютно непрерывные нормы. Стандартной задачей для идеального пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ является характеристика его “сильного” ассоциированного пространства (= двойственного по Кётэ).

Отметим, что $J_X(g) = \mathbf{J}_X(g)$ для идеального X , в этом случае $X'_s = X'_w$. Для неидеального пространства X функционалы $J_X(g)$ и $\mathbf{J}_X(g)$, а, следовательно, X'_s и X'_w и их характеристики могут быть различными. Примеры приведены в [1].

В результате возникает задача описания "дважды ассоциированных" пространств:

$$[X'_s]'_s, [X'_s]'_w, [X'_w]'_s, [X'_w]'_w$$

и их совпадения с исходным пространством X , т.е. наличия "ассоциированной рефлексивности". Поскольку X'_s идеально, то $[X'_s]'_s = [X'_s]'_w$, т.е. в характеристизации нуждается только три пространства. Если X идеальное пространство со свойством Фату, то все дважды ассоциированные с ними совпадают. Поэтому особый интерес задача представляет для неидеальных пространств.

Эту задачу мы рассмотрим на примере весовых пространств Соболева первого порядка на полуоси, пространств Чезаро и Копсона.

Пусть $v_0, v_1 \in \mathfrak{M}^+(I)$, $v_1 < \infty$ п.в. на I , $\frac{1}{v_1} \in L^{p'}_{\text{loc}}(I)$, $v_0, v_1 \in L^p_{\text{loc}}(I)$, $\|v_0\|_{L^1(I)} > 0 =: v_0, v_1 \in \mathcal{V}_p(0, \infty)$. Тогда

$$W_p^1(I) := \{u \in W_{1,\text{loc}}^1(I) : \|u\|_{W_p^1(I)} < \infty\},$$

где

$$\|u\|_{W_p^1(I)} := \|v_0 u\|_{L^p(I)} + \|v_1 Du\|_{L^p(I)}.$$

Нам также понадобятся подпространства $\overset{\circ\circ}{W}_p^1(I) \subset \overset{\circ}{W}_p^1(I) \subset W_p^1(I)$, где второе является замыканием в $W_p^1(I)$ первого

$$\begin{aligned} \overset{\circ\circ}{W}_p^1(I) := & \{f \in AC(I) : \limsup_{t \rightarrow 0} |f(t)| = 0, \text{ supp } f \text{ компактен в } [0, \infty), \\ & \|v_0 f\|_{L^p(I)} + \|v_1 f'\|_{L^p(I)} < \infty\}. \end{aligned}$$

В работе [1] все ассоциированные пространства X'_s и X'_w для

$X = \{\overset{\circ\circ}{W}_p^1(I), \overset{\circ}{W}_p^1(I), W_p^1(I)\}$ были охарактеризованы с указанием точных формул для ассоциированных норм.

Для простоты мы предположим, что существует $c \in I$ такое, что

$$\|v_1^{-1}\|_{L^{p'}(0,c)}\|v_0\|_{L^p(0,c)} = \|v_1^{-1}\|_{L^{p'}(c,\infty)}\|v_0\|_{L^p(c,\infty)} = \infty. \quad (4)$$

Тогда $\overset{\circ}{W}_p^1(I) = W_p^1(I)$ и согласно конструкции Ойнарова-Отелбаева найдутся строго возрастающие абсолютно непрерывные функции $a(t)$ и $b(t)$ такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \lim_{t \rightarrow 0} b(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = \infty, \\ a(t) < t < b(t), \quad t > 0, \\ \int_{a(t)}^t v_1^{-p'} = \int_t^{b(t)} v_1^{-p'}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\left(\int_{a(t)}^{b(t)} v_1^{-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} v_0^p \right)^{1/p} = 1, \quad t > 0. \quad (6)$$

Пусть

$$V_1(t) := \int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}, \quad \Delta(t) := (a(t), b(t)).$$

и $a^{-1}(t)$ обратная функция к $a(t)$. Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(g) &:= \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t) \left| \int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)} \left(\int_{a(x)}^t v_1^{-p'} \right) dx \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}, \\ \mathcal{G}(g) &:= \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t) V_1^{p'}(t) \left| \int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)} dx \right|^{p'} dt \right)^{1/p'}, \\ \mathbb{G}(g) &:= \left(\int_0^\infty \left(\int_t^{a^{-1}(t)} |g(x)| dx \right)^{p'} v_1^{-p'}(t) dt \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Теорема 4 Пусть $1 < p < \infty$, $v_0, v_1 \in \mathcal{V}_p(0, \infty)$ и условие (4) выполняется.

(1) Тогда для $g \in L^1_{\text{loc}}(0, \infty)$, если $X = W_p^1(I)$ или $X = \overset{\circ}{W}_p^1(I)$,

$$\mathbf{J}_X(g) = \|g\|_{X'_s} \approx \mathbf{G}(g).$$

(2) Если же $X = \overset{\circ}{W}_p^1(I)$, то

$$J_X(g) = \|g\|_{X'_w} \approx \mathbb{G}(g) + \mathcal{G}(g), \quad (7)$$

(3) Также, $J_{W_p^1}(g) < \infty$, если и только если $\mathbf{G}(g) < \infty$ и $J_{W_p^1}(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathcal{G}(g)$.

Рассмотрим следующие классы Соболева со степенными весами.

(1) Пусть $1 < p < \infty$, $\beta = \alpha + 1 > \frac{1}{p'}$ и $W_{p,\beta}^1(I)$ - пространство Соболева с весами

$$v_0(x) = \eta_p x^\alpha, \quad v_1(x) = x^\beta \quad (8)$$

(2) Если $1 < p < \infty$, $\gamma = \sigma + 1 < \frac{1}{p'}$, то $W_{p,\gamma}^1(I)$ пространство Соболева с весами

$$v_0(x) = \theta_p x^\sigma, \quad v_1(x) = x^\gamma, \quad (9)$$

Заметим, что условие (4) для этих пространств выполнено, поэтому

$$\overset{\circ}{W}_{p,\beta}^1(I) = W_{p,\beta}^1(I), \quad \overset{\circ}{W}_{p,\gamma}^1(I) = W_{p,\gamma}^1(I).$$

Для описания ассоциированных к ним нам понадобятся пространства типа Чезаро и Копсона.

Пусть $p \in (1, \infty)$, $\beta > \frac{1}{p}$. Пространство типа Чезаро

$$Ces_{p,\beta}(I) := \{f : \|f\|_{Ces_{p,\beta}(I)} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^\beta} \int_0^x |f| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

При $\beta = 1$ это классическое пространство Чезаро.

Для $L^1_{\text{loc}}([0, \infty)) := \{f \in \mathfrak{M}(I) : \int_0^t |f| < \infty, \text{ for all } t \in I\}$ определим слабые пространства Чезаро для функций из $L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$

$$\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I) := \{g : \|g\|_{\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)} := \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x g \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Пусть $\gamma < \frac{1}{p}$. Аналогично задаются пространства Копсона

$$\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I) := \{g : \|g\|_{\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^\gamma} \int_x^\infty |g| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

и для $L^1_{\text{loc}}((0, \infty]) := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \int_t^\infty |g| < \infty, \text{ for all } t \in I\}$

$$\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I) := \{g : \|g\|_{\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)} := \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{x^\gamma} \int_x^\infty g \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Пространства $\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)$ и $\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)$ являются неполными нормированными пространствами.

Пример 1 Для $\varepsilon \in (0, \frac{1}{p})$ положим $f_\varepsilon(x) = \frac{\sin x}{x^{1+\varepsilon}}$. Тогда $\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)} < \infty$, но $\|f_\varepsilon\|_{\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)} = \infty$, т.е. $f_\varepsilon \in \mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I) \setminus \mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)$.

Теорема 5 [2] Для норм пространств, ассоциированных к $\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)$ и $\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)$ имеются двусторонние оценки

$$\|g\|_{[\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I)]'_s} \approx \left(\int_0^\infty (x^{\beta-1} \|g\|_{L^\infty([x,\infty)))}^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} =: \|g\|_{D_{p',\beta}(I)},$$

$$\|g\|_{[\mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)]'_s} \approx \left(\int_I (x^{\gamma-1} \|g\|_{L^\infty((0,x])})^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} =: \|g\|_{\mathcal{D}_{p',\gamma}(I)},$$

а сами пространства $X \in \{\mathcal{Ces}_{p,\beta}(I), \mathcal{Cop}_{p,\gamma}(I)\}$ являются сильно ассоциированно рефлексивными, т.е. $X = [X'_s]'$.

Результаты можно свести к следующей таблице.

$$\begin{aligned}
X \in \{Ces_{p,\beta}(I), Cop_{p,\gamma}(I)\} &\Rightarrow X'_s = X'_w \in \{D_{p',\beta}(I), \mathcal{D}_{p',\gamma}(I)\}, (X'_s)'_s = X. \\
X \in \{W_{p,\beta}^1(I), \overset{\circ\circ}{W}_{p,\beta}^1(I); W_{p,\gamma}^1(I), \overset{\circ\circ}{W}_{p,\gamma}^1(I)\} &\Rightarrow X'_s \in \{Ces_{p',\beta}(I), Cop_{p',\gamma}(I)\} \\
(X'_s)'_s \in \{D_{p',\beta}(I), \mathcal{D}_{p',\gamma}(I)\} &= \{[L_{p,\beta}^\downarrow(I)]'', [L_{p,\gamma}^\uparrow(I)]''\} \\
X \in \{\overset{\circ\circ}{W}_{p,\beta}^1(I), \overset{\circ\circ}{W}_{p,\gamma}^1(I)\} &\Rightarrow X'_w \in \{\mathcal{C}es_{p',\beta}(I), \mathcal{C}op_{p',\gamma}(I)\}, (X'_w)'_w = X. \\
X \in \{\mathcal{C}es_{p,\beta}(I), \mathcal{C}op_{p,\gamma}(I)\} &\Rightarrow X'_s = \{0\}, X'_w \in \{\overset{\circ\circ}{W}_{p',\beta}^1(I), \overset{\circ\circ}{W}_{p',\gamma}^1(I)\}, \\
(X'_w)'_w = X, (X'_w)'_s &= \{Ces_{p,\beta}(I), Cop_{p,\gamma}(I)\}.
\end{aligned}$$

Наиболее продвинутым результатом является ([4])

Теорема 6 Пусть $1 < p < \infty$, $v_0, v_1 \in \mathcal{V}_p(0, \infty)$ и условие (4) выполняется. Тогда

$$(\overset{\circ\circ}{W}_p^1(I)'_w)'_w = \overset{\circ\circ}{W}_p^1(I), \quad (\overset{\circ\circ}{W}_p^1(I)'_w)'_s = \{0\}. \quad (10)$$