

Ветвящиеся процессы и случайные блуждания в неоднородных или нетипичных средах

Научный коллектив под руководством Ватутина В.А.:

МИАН: Афанасьев В.И. (д.ф-м.н.), Дьяконова Е.Е. (д.ф-м.н.)

МГУ: 2 кандидата ф-м.н, **возраст 38 лет**, мы надеемся, что к концу проекта полученные результаты (в совокупности с предшествующими) послужат основой для написания докторских диссертаций.

МГУ-МИАН: Бакай Г.А. стажер-исследователь (защита кандидатской диссертации намечена на 31 мая 2024 года)

МГУ - 2 аспиранта 2-го года обучения; 2 студента 6-го года обучения.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

- Ветвящиеся процессы в случайной среде
- Ветвящиеся случайные блуждания

Первые математические модели, в которых рассматривались вопросы вырождения и роста популяций, появились в середине XIX века в работах французского ученого И. Бьенэме и британских исследователей Ф. Гальтона и Х. Ватсона. Но лишь почти столетие спустя такие модели стали объектом пристального внимания математиков. Среди первых достижений в этой области особое место занимает статья А. Н. Колмогорова

"К решению одной биологической проблемы "

в которой было изучено асимптотическое поведение вероятности невырождения популяции в зависимости от репродуктивности индивидуумов, ее образующих.

Эта работа Колмогорова послужила толчком к исследованию асимптотических свойств различных популяционных моделей на семинаре, организованном А. Н. Колмогоровым в 1947 г. в Московском государственном университете. Он же предложил использовать для таких моделей термин “ветвящиеся процессы”.

В течение нескольких последующих лет А. Н. Колмогоровым и его учениками Н. А. Дмитриевым, Б. А. Севастьяновым и А. М. Ягломом было опубликовано несколько работ, которые, наряду с чуть более поздними работами Р. Беллмана и Т. Е. Харриса, легли в основу современной теории ветвящихся процессов.

Севастьянов Б.А. “Ветвящиеся процессы” , Наука (1971).

Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона

- Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона:

$$Z(0) = 1, \quad Z(1) = \xi, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi_j^{(n)}, \quad n \geq 2.$$

- Производящая функция числа потомков

$$f(s) := \mathbf{E}s^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k)s^k.$$

- $\xi_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots; n \geq 2$ независимые случайные величины, распределенные так же как и ξ .

$A := \mathbf{E}\xi = f'(1)$ - математическое ожидание числа потомков у одной частицы

Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона называется

- **над**критическим, если $A > 1$,
- критическим, если $A = 1$,
- **до**критическим, если $A < 1$.
- $T = \min\{k : Z(k) = 0\}$ - момент вырождения $\Rightarrow$

$$\mathbf{P}(T < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{если } A \leq 1; \\ q < 1 & \text{если } A > 1. \end{cases}$$

Пример

$$f(s) := \mathbf{E}s^\xi = \frac{q}{1-ps} = \sum_{k=0}^{\infty} qp^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k) s^k,$$

где $q + p = 1$.

Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в **меняющейся** среде

Производящие функции чисел потомков $f_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}}$,
 $n = 1, 2, \dots$ могут меняться от поколения к поколению.

- $\Rightarrow f'_n(1) := \mathbf{E}\xi^{(n)}$ могут быть различны;
-

$$Z(0) = 1, \quad Z(n) = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} \xi_j^{(n)}, \quad n \geq 1,$$

где $\xi_j^{(n)} \stackrel{d}{=} \xi^{(n)}$ независимы.

-

$$\mathbf{E}\left[Z(n) \mid f_1, f_2, \dots\right] = \prod_{j=1}^n f'_j(1).$$

Пример

$$f_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}} = \frac{q_n}{1 - p_n s} = \sum_{k=0}^{\infty} q_n p_n^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi^{(n)} = k) s^k,$$

где $q_n + p_n = 1$.

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений в современной теории ветвящихся процессов является исследование ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде (ВПСС).

В последнее время в изучении этих процессов достигнут существенных прогресс: для широких классов ВПСС найдена асимптотика вероятности невырождения и описана эволюция траекторий размеров популяций, в предположении о независимости компонент среды.

Результаты этих исследований были подытожены в книге

G.Kersting, V.Vatutin “Discrete Time Branching Processes in Random Environment” , Wiley (2017).

Мы планируем продолжить анализ ВПСС, сосредоточившись на описании более тонких свойств этих процессов:

- структуре деревьев ветвящихся процессов, эволюционирующих в неблагоприятной среде,
- вероятностях больших отклонений размеров популяций,
- переходных явлениях в ВПСС,
- а также изучить свойства нового класса ВПСС - ветвящихся процессов в «замороженной» случайной среде, когда состояние среды изменяется в моменты некоторой детерминированной растущей последовательности,
- исследовать свойства траекторий ВПСС, начинающихся с большого числа частиц.

Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде (ВПСС)

- Производящие функции чисел потомков $f_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}}$ в поколениях $n = 1, 2, \dots$ СЛУЧАЙНЫ, независимы и одинаково распределены.

$\Rightarrow f'_n(1) := \mathbf{E}\xi^{(n)}$ независимые и одинаково распределенные случайные величины;

-

$$Z(n+1) = \sum_{j=1}^{Z(n)} \xi_j^{(n)}$$

Пример

$$f_n(s) := \mathbf{E}s^{\xi^{(n)}} = \frac{q_n}{1 - p_n s} = \sum_{k=0}^{\infty} q_n p_n^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi^{(n)} = k) s^k,$$

где $q_n + p_n = 1$, и, скажем, случайные величины $p_n, n = 1, 2, \dots$

равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Классификация ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайной среде
Сопровождающее случайное блуждание

- $X_i := \log f'_i(1)$
- $S_0 = 0, \quad S_n = \log f'_1(1) + \log f'_2(1) + \cdots + \log f'_n(1), \quad n \geq 1.$

$$\mathbf{E} \left[Z(n) \middle| f_1, f_2, \dots \right] =: \mathbf{E}_f \left[Z(n) \right] = \prod_{j=1}^n f'_j(1) = e^{S_n}$$

Классификация: ВПСС называется

- **над**критическим, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ с вероятностью 1;
- **до**критическим, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1;
- критическим, если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ **и** $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ (оба с вероятностью 1);

Если $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, то любого $t \in (0, 1]$ и $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\log Z(tn)}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \mid Z(n) > 0 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_{tn}}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \mid Z(n) > 0 \right) \\ &= \mathbf{P} (Y^+(t) \leq x), \end{aligned}$$

где $Y^+ = \{Y^+(t), 0 \leq t \leq 1\}$ - броуновская извилина - броуновское движение, остающееся положительным на интервале $(0, 1]$.

$$S_n \asymp \sqrt{n}$$

- БЛАГОПРИЯТНАЯ СРЕДА.



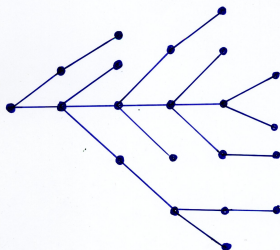
ВЗГЛЯД ИЗ НАСТОЯЩЕГО В ПРОШЛОЕ

РЕДУЦИРОВАННЫЙ ПРОЦЕСС

Для процесса $Z(m), m = 0, 1, 2, \dots$, при каждом n строится так называемый **редуцированный процесс**

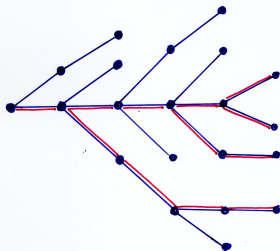
$$Z(m, n), 0 \leq m \leq n,$$

где $Z(m, n)$ - число частиц в процессе в момент m , которые будут иметь непустое число потомков в момент n .



0 n

Full! Tree



0 n

Full! Tree
Reduced! Tree

Редуцированные процессы для обычных ветвящихся процессов впервые исследовал А.М.Зубков. Позднее эту модель анализировали К.Фляйшман, Зигмунд-Шульце и ряд других ученых.

Редуцированные процессы для ВПСС исследовали К.А.Боровков, В.А.Ватутин, К.Фляшманн. Основной результат для критических ВПСС выглядит следующим образом.

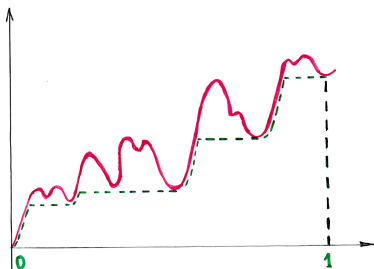
Если $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, то любого $t \in (0, 1]$ и $x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\log Z(tn, n)}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \mid Z(n) > 0 \right) = \mathbf{P} \left(\min_{t \leq s \leq 1} Y^+(s) \leq x \right),$$

БУТЫЛОЧНЫЕ ГОРЛЫШКИ!

$$\log Z(nt) \sim \sigma\sqrt{n}Y^+(t)$$

$$\log Z(nt, n) \sim \sigma\sqrt{n} \min_{t \leq s \leq 1} Y^+(s)$$



Броуновская извилина —

Редуцированный процесс — — —

А если неблагоприятная среда - то есть, напрмер, в критическом случае

$$S_n \leq \varphi(n) = o(\sqrt{n})$$

- как будет развиваться популяция?

Такая постановка приводит к принципиально новому кругу задач, решение которых приводит к необходимости доказательства целого ряда условных предельных теорем, описывающих большие и малые отклонения для сопровождающих случайных блужданий, остающихся неотрицательными или отрицательными на бесконечных или конечных отрезках времени.

Некоторые результаты в этом направлении были недавно получены Ватутиным и Дьяконовой.

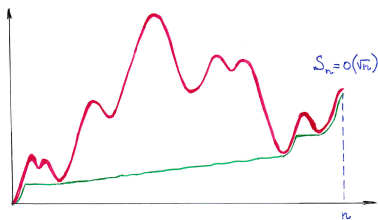
Например, найдена асимптотика вероятности невырождения

$$\mathbf{P}(Z(n) > 0, S_n \leq \varphi(n)).$$

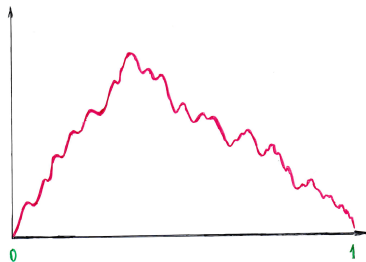
Показано, что если $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$, то для любых $t \in (0, 1)$ и $x \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \log Z(nt) \leq z | S_n \leq \varphi(n), Z(n) > 0 \right) = \mathbf{P} (Y^{++}(t) \leq z),$$

где $\{Y^{++}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ – экскурсия единичной длины броуновского движения.



Случайное блуждание



Броуновская экскурсия

Однако свойства

редуцированных процессов

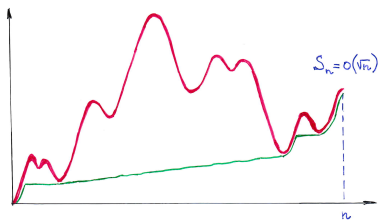
в случае

неблагоприятной среды

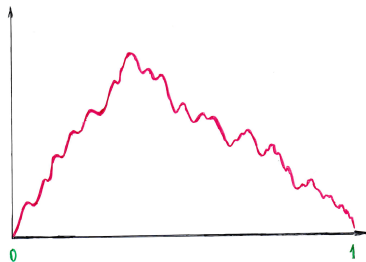
пока исследовать не удалось, хотя прикидки показывают, что в этом случае распределение числа частиц в редуцированном процессе

$$Z(m, n)$$

при условии невырождения к моменту n будет иметь (в пределе) 5 различных распределений, вид которых зависит от соотношения между параметрами m, n и функцией $\varphi(n)$.



Случайное блуждание



Броуновская экскурсия

- ВПСС в "замороженной среде": в этой модели имеется детерминированная быстро растущая последовательность $T_1, T_2, \dots$ и среда с номером i , выбираемая случайно, остается неизменной в течение промежутка времени T_i .

- ВПСС в **возмущенной среде** - исследование так называемых переходных явлений в ВПСС - как себя будет вести асимптотика вероятности невырождения и размер популяции, если вместо чисто критических ВПСС рассматривать процессы, которые в определенном смысле близки к критическим.

Для обычных ветвящихся процессов вопросы такого рода рассматривали Б.А.Севастьянов, С.В.Нагаев, В.П.Чистяков и ряд других исследователей.

- Асимптотическое поведение вероятности вырождения и свойства траекторий ВПСС, начинающихся с **большого числа частиц**. Этой тематике в детерминированной среде посвящены классические работы Феллера, Ламперти, Нея, Линдвалла.
- Для каждого $n = 1, 2, \dots$ зададим ВПСС $Z(k_n, i), i = 0, 1, 2, \dots$, начинающийся с k_n частиц нулевого поколения. Пусть T - момент вырождения указанного процесса. В критическом и докритическом случаях мы намерены
- проанализировать асимптотическое поведение случайной величины T для специальным образом выбранной последовательности k_n ;
- исследовать асимптотическое поведение процессов $Z(k_n, [nt]), t > 0$.

Большие отклонения надкритических ВПСС.

- Постановка задачи : типичный рост надкритических ВПСС $\log Z(n) \sim Cn$. А какова вероятность события $\log Z(n) > \gamma_1 n, \gamma_1 > C$ или - $\log Z(n) < \gamma_2 n, \gamma_2 < C$ – классическая задача для ветвящихся процессов в детерминированной среде.
- Для ВПСС естественно ответить на вопрос, а **какая среда обеспечивает такой рост.**
- Планируется рассмотреть аналогичную задачу для ВПСС с **частицами двух полов.**

Каталитические ветвящиеся случайные блуждания (КВСБ) по многомерным решеткам.

Частицы могут производить потомков и гибнуть только в фиксированных точках решетки – центрах катализа или источниках размножения и гибели частиц. По остальным точкам решетки частицы совершают лишь случайное блуждание, не подвергаясь изменениям.

- Биологические модели - размножение рыб.
- Экология - диапазон загрязнения.

Ранние исследования КВСБ по целочисленным решеткам были направлены на выявление асимптотического поведения средних локальных и общих численностей частиц при неограниченном росте времени.

В работах С.А.Молчанова и Е.Б.Яровой, начиная с 2012 года, были рассмотрены задачи пространственного распространения облака частиц в КВСБ с ростом времени, в том числе был найден так называемый фронт распространения популяции и изучена структура популяции внутри фронта.

Поскольку их исследования опирались на технику теории операторов, авторы налагали ряд ограничений на инфинитезимальную матрицу, описывающую случайное блуждание частиц (например, предполагалась симметричность этой матрицы).

В рамках проекта планируется выявить при разнообразных условиях, налагаемых на характеристики блуждания и ветвления, каким образом происходит концентрация частиц внутри фронта распространения популяции в КВСБ.

- Доказательство предельных теорем в критическом и докритическом случаях для времени первого достижения популяцией частиц растущей границы при условии, что эта граница будет когда-либо достигнута.
- Изучение плотности концентрации частиц внутри фронта распространения популяции для надкритического каталитического ветвящегося случайного блуждания.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!