А.Г.СЕРГЕЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

РНФ – 10

Проект посвящен исследованию математических проблем, возникающих в теории топологических диэлектриков. Так называются твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, устойчивой относительно малых деформаций, что является основанием для применения топологических методов при их изучении.

Роль топологии в теории твердого тела проявилась впервые после открытия квантового эффекта Холла фон Клитцингом в 1980 году. Вскоре после этого в работах Лафлина и Таулесса с соавторами было предложено топологическое объяснение этого эффекта, что привело к бурному росту числа исследований, посвященных топологическим свойствам твердых тел. Исследование топологических инвариантов диэлектриков является одной из основных задач нашего проекта.

Ключевую роль при этом играет изучение их групп симметрий, восходящее к Китаеву, который предложил классификацию топологических объектов в физике твердого тела, основанную на теории представлений клиффордовых алгебр.

В нашем проекте особое внимание уделяется топологическим диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени. С математической точки зрения их исследование сводится к изучению топологических пространств, наделенных инволюцией, и кватернионных векторных расслоений над ними.

Поведение электрона в твердом теле, наделенном кристаллической решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, определяется уравнением Шредингера с потенциалом, инвариантным относительно Λ. Собственные функции такого оператора, называемые блоховскими, имеют вид

$$\psi(x) = e^{i(k,x)}\varphi(x),$$

где вектор k принадлежит двойственному (импульсному) пространству $(R^d)'$ и называется квазиимпульсом, а φ – гладкая функция на R^d, периодическая относительно Λ. Решетке Λ в двойственном пространстве $(R^d)'$ отвечает двойственная решетка Λ', фундаментальная область которой, совпадающая с тором $\mathbb{T}^d$, называется зоной Бриллюэна.

Исходному гамильтониану H отвечает в терминах двойственного пространства блоховский гамильтониан H_k, зависящий от квазиимпульса k. Основным объектом нашего исследования является блоховское расслоение $\mathcal{H}$ над зоной Бриллюэна, слоем которого над точкой k является гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$, на котором действует блоховский гамильтониан H_k.

В приближении сильной связи можно считать, что имеется только конечное число n активных энергетических уровней, концентрирующихся вблизи энергии Ферми E_F. Основное состояние в этой модели характеризуется наличием конечного сила p заполненных уровней энергии, расположенных ниже энергии Ферми E_F, и конечного числа $n - p$ свободных уровней с энергиями выше E_F.

Для того, чтобы построить топологические инварианты, отвечающие блоховскому гамильтониану H_k, рассмотрим его адиабатическую деформацию в рассматриваемом классе гамильтонианов, не затрагивающую энергетической щели, и переводящей гамильтониан H_k в гамильтониан H'_k с двумя собственными значениями $+1$ и -1. Существование такой деформации можно доказать, пользуясь спектральным разложением гамильтониана H_k. Иными словами, можно построить непрерывное отображение U тора $\mathbb{T}^d$ в унитарную группу $\mathrm{U}(n)$, такое что

$$U^*(k)H(k)U(k) = \mathrm{diag}(1_{p\times p}, -1_{(n-p)\times(n-p)}),$$

где справа стоит блочно-диагональная матрица, а p -– число занятых энергетических уровней.

Матрица $U(k)$ в этом уравнении определена с точностью до умножения справа на блочно-унитарную матрицу $\operatorname{diag}\left(\mathrm{U}_{p\times p}, \mathrm{U}_{(n-p)\times(n-p)}\right)$. Иными словами, матричная функция $U(k)$ задает непрерывное отображение из зоны Бриллюэна $\mathbb{T}^d$ в комплексный грассманиан

$$\mathrm{Gr}_{p,n} = \mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(n-p)).$$

Теперь можно построить топологические инварианты диэлектрика, отвечающие гамильтониану H, исходя из топологии пространства гомотопических классов непрерывных отображений тора $\mathbb{T}^d$ в грассманиан $\mathrm{Gr}_{p,n}$. Исследование получаемых при этом инвариантов является одной из основных задач проекта.

Другая задача заключается в изучении топологических инвариантов диэлектриков, инвариантных относительно обращения времени. В этом случае блоховское расслоение над зоной Бриллюэна $\mathbb{T}^d$ является кватернионным векторным расслоением над зоной Бриллюэна, рассматриваемой как пространство с инволюцией. Исходному гамильтониану H будет отвечать оператор $\tilde{H}$, действующий на сечениях блоховского расслоения. В окрестности неподвижной точки инволюции этот оператор представляется в виде суммы кососимметрического оператора и квадратичной поправки. Индекс кососимметрического эллиптического оператора был определен Атьей и Зингером, а квадратичная поправка на индекс не влияет. Тем самым, можно определить аналитический индекс топологического диэлектрика как сумму локальных индексов по всем неподвижным точкам инволюции.

Можно также дать топологическое определение индекса диэлектрика в терминах характера Черна блоховского расслоения. Этот топологический индекс совпадает с ранее определенным аналитическим индексом благодаря варианту теоремы Атьи-Зингера об индексе. Исследование введенных инвариантов диэлектриков является еще одной задачей проекта.

Построенные инварианты топологических диэлектриков можно также определить в терминах K-теории C^*-алгебр наблюдаемых нашей задачи. В свою очередь, граница диэлектрика обладает топологическими инвариантами, которые можно определить в терминах фредгольмовой K-теории. Соответствие между этими граничными инвариантами и построенными ранее топологическими инвариантами диэлектрика называется BB-ссответствием (от английского "Bulk-Boundary") и его исследование является еще одной задачей проекта.

Теория топологических диэлектриков — новая, но интенсивно развивающаяся область физики твердого тела. Начало ее возникновению было положено работой Кейна и Мила, в которой был построен топологический $\mathbb{Z}_2$-инвариант диэлектрика и показано, что для квантового спинового диэлектрика Холла этот инвариант является нетривиальным. Более того, оказалось, что поведение топологически нетривиальных диэлектриков отличается от поведения обычных диэлектриков. Поэтому исследование топологических диэлектриков может иметь и практические применения, использующие физические свойства таких материалов.