

Конференция, посвященная 90-летию Математического института им. Стеклова

16-17 May 2024

PDMI

Europe/Moscow timezone

Доклады охватят историю развития лабораторий и предложат детальный и вместе с тем доступный для широкой аудитории обзор значимых достижений последних 20-30 лет.

Группа/лаборатория
математической логики
(и дискретной математики)

1961–2024

Группу организовал Н. А. Шанин в начале 1960-х годов.

Первые члены группы:

- ▶ Г. В. Давыдов
- ▶ С. Ю. Маслов
- ▶ Г. Е. Минц
- ▶ В. П. Оревков
- ▶ А. О. Слисенко

Основные направления исследований:

1. Конструктивное направление в математике
2. Поиск логического вывода
3. Теория алгоритмов и общая теория дедуктивных систем

1. Конструктивное направление в математике

Проблемы конструктивного направления в математике. 1 : Сб. работ/ Шанин Н.А. (ред.). - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958. - 349 с. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.52).	Тр.МИАН 52
Проблемы конструктивного направления в математике. 2 : (Конструктивный математический анализ) : Сб. работ/ Шанин Н.А. (ред.). - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. - 503 с. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.67).	Тр.МИАН 67
Проблемы конструктивного направления в математике. 3 : Сб. работ семинаров ЛОМИ по мат. логике и конструктивной математике : Посв. А.А. Маркову к его 60-летию/ Шанин Н.А. (ред.).- Л.: Наука, 1967.- 264 с. портр. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.72).	Тр.МИАН 72
Проблемы конструктивного направления в математике. 5 : Сб. работ/ Оревков В.П., Шанин Н.А. (ред.). - Л.: Наука, 1970. - 263 с. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.113).	Тр.МИАН 113
Проблемы конструктивного направления в математике. 6 : Сб. работ/ Оревков В.П., Шанин Н.А. (ред.). - Л.: Наука, 1973. - 269 с. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.129).	Тр.МИАН 129
Исследования по конструктивной математике и математической логике. 9: Сб. работ, посв. 75-летию Н.А.Шанина/ Данцин Е.Я., Оревков В.П. (ред.). - СПб.: ПОМИ, 1995. - 148 с. - (Записки научных семинаров/ ПОМИ; Вып.220).	ПОМИ 220
Проблемы конструктивного направления в математике. 4 : Сб. работ/ Оревков В.П., Шанин Н.А. (ред.). - Л.: Наука, 1967. - 264 с. - (Труды Математического института им. В.А.Стеклова; Вып.93).	Тр.МИАН 93

1. Конструктивное направление в математике

Тр. МИАН СССР, 1962, том 67, 8–14

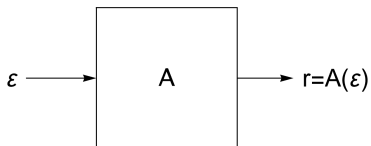
А. А. МАРКОВ

О КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

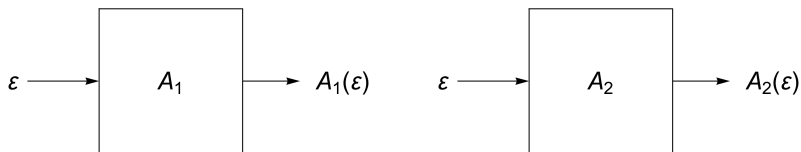
1. В последнее время в математике получило значительное развитие конструктивное направление. Его суть состоит в том, что исследование ограничивается конструктивными объектами и проводится в рамках абстракции потенциальной осуществимости без привлечения абстракции актуальной бесконечности; при этом отвергаются так называемые чистые теоремы существования, поскольку существование объекта с данными свойствами лишь тогда считается доказанным, когда указывается способ потенциально осуществимого построения объекта с этими свойствами.

Понятие конструктивного объекта мы не определяем, а лишь поясняем. Конструктивные объекты — это некоторые фигуры, определенным

Конструктивные вещественные числа

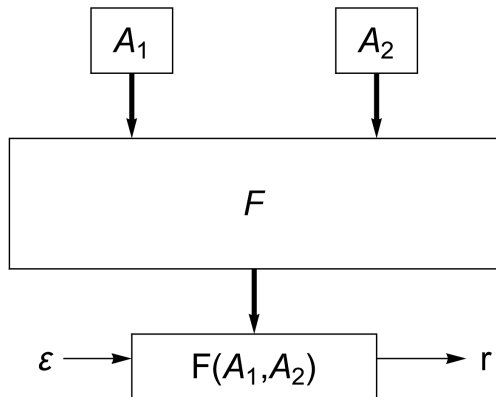


$$\forall \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad |A(\varepsilon_1) - A(\varepsilon_2)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$



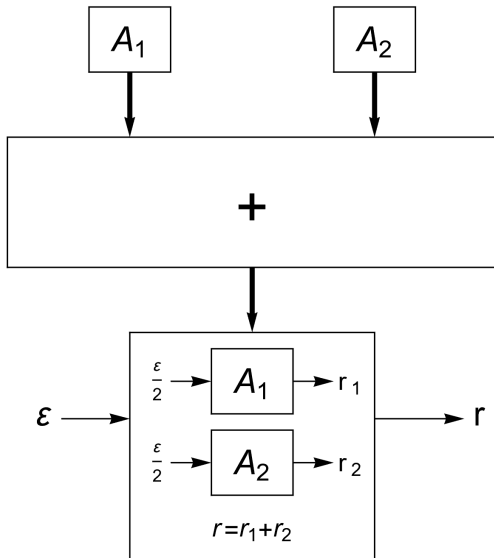
$$\forall \varepsilon \quad |A_1(\varepsilon) - A_2(\varepsilon)| < 2\varepsilon$$

Конструктивные функции



$$(A'_1 = A_1 \ \& \ A'_2 = A_2) \rightarrow F(A'_1, A'_2) = F(A_1, A_2)$$

Конструктивные функции



Н. А. Шанин, Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, *Тр. МИАН СССР*, 1962, том 67, 15–294

Н. А. ШАНИН

КОНСТРУКТИВНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И КОНСТРУКТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

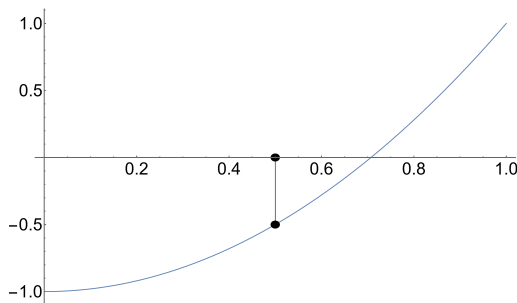
Содержание. Введение. — Глава I. **Конструктивные вещественные числа.** — § 1. Описание используемой символики и некоторые определения. — § 2. Некоторые сведения из теории алгорифмов и конструктивной логики. — § 3. Конструктивные вещественные числа. — § 4. Порядковые отношения между конструктивными вещественными числами. — § 5. Некоторые специальные преобразования дуплексов. — § 6. Основные операции над конструктивными вещественными числами. — § 7. О некоторых подмножествах конструктивного континуума. — § 8. Последовательности конструктивных вещественных чисел. — Глава II. **Конструктивные метрические и нормированные пространства** (аксиоматическое изложение). — § 9. Понятие конструктивного метрического пространства. — § 10. Пополнение конструктивных метрических пространств. — § 11. Вполне ограниченные и компактные конструктивные метрические пространства. — § 12. Конструктивные нормированные и конструктивные гильбертовы пространства. — Глава III. **Некоторые конкретные конструктивные пространства.** § 13. Конструктивные аналоги евклидова числового пространства заданной размерности и пространства вещественных последовательностей, суммируемых с заданной степенью. — § 14. Конструктивный аналог понятия измеримого по Lebesgue'у множества. — § 15. Конструктивный аналог понятия суммируемой с заданной степенью функции. Конструктивный интеграл Lebesgue'a. — § 16. Конструктивные аналоги понятия абсолютно непрерывной функции и некоторых других понятий классической математики. — Приложение. **О критике классической математики.** — Литература.

1. Конструктивное направление в математике

Теорема. Существует непрерывная конструктивная функция $F(x)$, определённая на $[0, 1]$ и такая, что

- ▶ $F(0) < 0$,
- ▶ $F(1) > 0$,
- ▶ для любого конструктивного вещественного числа x из $[0, 1]$

$$F(x) \neq 0.$$



В. П. ОРЕВКОВ

О КОНСТРУКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КРУГА В СЕБЯ

В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности перенесения в конструктивную математику следующих теорем классической топологии:

1) теоремы о существенности тождественного отображения n -мерного шара в себя („невозможна непрерывная ретракция n -мерного шара на свою границу“);

2) теоремы Брауэра о неподвижной точке („каждое непрерывное отображение n -мерного шара в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку“);

3) теоремы Пуанкаре—Брауэра („на сфере четной размерности не существует непрерывного поля касательных единичных векторов“);

4) теоремы о том, что при всяком отображении сферы четной размерности в себя существует по крайней мере одна неподвижная точка или по крайней мере одна точка, отображающаяся в диаметрально противоположную.

В. П. Оревков, "О конструктивных отображениях круга в себя". Тр. МИАН СССР, 1964, том 72, 437–461

В § 3 настоящей статьи приводится пример непрерывного конструктивного отображения круга в пространстве $\mathcal{E}_{2,2}$ на свою границу, оставляющего точки границы неподвижными (теорема 3.4). В этом же параграфе строится равномерно непрерывное конструктивное отображение упомянутого круга в себя без неподвижной точки (теорема 3.5). В § 4 приводится пример равномерно непрерывного конструктивного касательного векторного поля, заданного на единичной двумерной сфере в пространстве $\mathcal{E}_{3,2}$ и везде отличного от нуля. Отсюда получается пример конструктивного непрерывного поля касательных единичных векторов, заданного на упомянутой сфере. В этом же параграфе строится равномерно непрерывное конструктивное отображение упомянутой выше сферы в себя без неподвижных точек и такое, что ни одна точка не отображается в диаметрально противоположную. В §§ 1 и 2 вводятся вспомогательные понятия и доказываются основные леммы.

Таким образом, все указанные выше теоремы классической топологии в их дословной формулировке не переносятся в конструктивную математику.

2. Поиск логического вывода

Группа ТРЭПЛО (Теоретической Разработки Эвристического Поиска Логического Обоснования)

АЛПЕВ (Алгоритм Логического Поиска Естественного Вывода)

[https:](https://www.calltouch.ru/blog/glossary/iskusstvennyj-intellekt/pause)

[//www.calltouch.ru/blog/glossary/iskusstvennyj-intellekt/pause](https://www.calltouch.ru/blog/glossary/iskusstvennyj-intellekt/pause)

В СССР искусственный интеллект также развивался стремительно. Академики А.И. Берг и Г.С.Поспелов в 1954-64 годах создают программу «АЛПЕВ ЛОМИ», которая автоматически доказывает теоремы. В эти же годы советскими учеными был разработан алгоритм «Кора», который моделирует деятельность человеческого мозга при распознавании образов. В 1968 году Турчиным В.Ф создается символьный язык обработки данных РЕФАЛ.

2. Поиск логического вывода

<https://libraryno.ru/1-2-razvitie-iskusstvennogo-intellekta-v-rossii-iis/>

1.2. Развитие искусственного интеллекта в России

В 1945–1964 гг. создаются отдельные программы и исследуется поиск решения логических задач. В Ленинградском отделении математического института им. В.А. Стеклова (ЛОМИ) создается программа, автоматически доказывающая теоремы (АЛПЕВ ЛОМИ). Она основана на оригинальном обратном выводе С.Ю.Маслова, аналогичном методу резолюций Робинсона.

2. Поиск логического вывода



Н.А. Шанин, Г.В. Давыдов, С.Ю. Маслов, Г.Е. Минц,
В.П. Оревков, А.О. Слисенко

Алгоритм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний

Москва–Ленинград: Наука. Ленингр. отделение, 1965,
39 с.

Булева функция: аргументы и значения ИСТИНА и ЛОЖЬ

Булева формула: строится из переменных с помощью логических связок – И, ИЛИ, НЕ, ЕСЛИ...ТО

$$((A \& B) \vee (A \implies \neg B) \& (B \implies A))$$

Тавтология: тождественно истинная формула

$$A \vee \neg A$$

Н.А. Шанин, Г.В. Давыдов, С.Ю. Маслов, Г.Е. Минц, В.П. Оревков,
А.О. Слисенко. Алгоритм машинного поиска естественного логического
вывода в исчислении высказываний

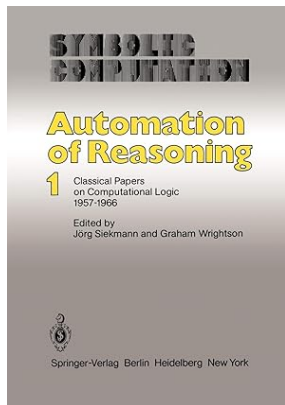
Задача. Дана булева формула $\varphi(A_1, \dots, A_n)$. Узнать, является ли она тавтологией.

Двойственная задача (SAT, выполнимость). Дана булева формула $\psi(A_1, \dots, A_n)$. Узнать, существуют ли такие значения $A_1, \dots, A_n$, при которых эта формула принимает значение ИСТИНА.

$$\psi(A_1, \dots, A_n) = \neg \varphi(A_1, \dots, A_n)$$

Millennium Problem: $P \stackrel{?}{=} NP$

G. Davydov, S. Maslov, G. Mints, V. Orevkov,
N. Shanin, A. Slissenko.



An Algorithm for a Machine Search of a Natural
Logical Deduction in Propositional Calculus.

Automation of Reasoning. 1. Classical papers
on computational logic 1957–1966.

Ed. J. Siekmann, G. Wrightson
Springer Verlag, 1983.

Reprinted in 2012

Г. В. Давыдов, С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков, А. О. Слисенко, Машинный алгоритм установления выводимости на основе обратного метода, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1969, том 16, 8–19

Целью настоящей заметки является краткое описание разработанного группой математической логики ЛОМИ алгоритма установления выводимости (АУВ) в классическом исчислении предикатов с функциональными знаками. Теоретической основой алгоритма является обратный метод установления выводимости для логических исчислений, описанный, например, в работе [1], терминология из которой используется без дополнительных пояснений.

С. Ю. Маслов, Обратный метод установления выводимости для логических исчислений, *Тр. МИАН СССР*, 1968, том 98, 26–87

Определение. Группа – это множество G , его выделенный элемент e и две операции $^{-1}$ и $*$ такие, что

$$(A) \quad \forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(Bl) \quad \forall a \in G \quad e * a = a$$

$$(Br) \quad \forall a \in G \quad a * e = a$$

$$(Cl) \quad \forall a \in G \quad a^{-1} * a = e$$

$$(Cr) \quad \forall a \in G \quad a * a^{-1} = e$$

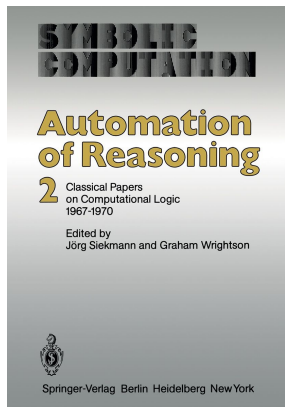
Определение. Левая предгруппа – это множество G , его выделенный элемент e и две операции $^{-1}$ и $*$ такие, что выполнены аксиомы (A) , (Bl) и (Cl) .

Теорема. Каждая левая предгруппа является группой:

$$(A) \ \& \ (Bl) \ \& \ (Cl) \Rightarrow (Br)$$

$$(A) \ \& \ (Bl) \ \& \ (Cl) \Rightarrow (Cr)$$

S. Yu. Maslov: "An inverse method for establishing deducibility of nonprenex formulas of the predicate calculus" (pp. 48-54) [Dokl. Akad. Nauk SSSR 172, 22-25 (1967)]



G. V. Davydov, S. Yu. Maslov, G. E. Mints, V. P. Orevkov and A. O. Slisenko: "A computer algorithm for the determination of deducibility on the basis of the inverse method" (pp. 531-541) [Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova 16, 8-19];

S. Yu. Maslov: "Relationship between tactics of the inverse method and the resolution method" (pp. 264-272) [Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova 16, 137-146]

3. Теория алгоритмов и общая теория дедуктивных систем

Функция $F(n)$ *вычислима*, если существует алгоритм, который по значению аргумента находит значение этой функции.

Множество $\mathfrak{M}$ *перечислимо*, если существует алгоритм, который (работая неограниченно долго) "напечатает" (в каком-то порядке) элементы этого множества (и только их).

Если функция $F(n)$ вычислима, то её график

$$\{\langle 0, F(0) \rangle, \langle 1, F(1) \rangle, \dots, \langle n, F(n) \rangle, \dots\}$$

перечислим, и наоборот.

3. Теория алгорифмов и общая теория дедуктивных систем

С. Ю. Маслов, Некоторые свойства аппарата канонических исчислений Э. Л. Поста, *Тр. МИАН СССР*, 1964, том 72, 5–56

С. Ю. Маслов, Представление перечислимых множеств локальными исчислениями, *Тр. МИАН СССР*, 1967, том 93, 43–49

С. Ю. Маслов, Мутационные исчисления, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 49, 7–30

Применяемый в настоящее время для описания биологической эволюции аппарат теории вероятностей обычно основан на анализе сравнительной частоты объектов той или иной структуры из заранее фиксированного конечного множества близких структур (вариантов генотипа при заданном числе локусов и аллелей). При этом математические результаты нужно интерпретировать как результаты о "микроразвитии" – о дрейфе разновидностей в пределах одного вида (зато в благоприятных случаях мы можем дать даже довольно точное количественное описание такого дрейфа). Получение хотя бы качественного описания макроэволюции и ее законов (т.е. законов, управляющих образованием новых видов и более высоких таксономических единиц) требует, по-видимому, дополнительных математических средств. Настоящая статья написана в предположении, что такие средства можно получить в рамках общей теории дедуктивных систем (исчислений).

Статья содержит два параграфа. Все, что касается связи между моделью и интерпретацией, описано в первом параграфе, второй состоит из точных формулировок теорем и эскизов их доказательства. При написании первого параграфа я стремился быть понятным и математиком и биологом.

А. О. СЛИСЕНКО

**РАСПОЗНАВАНИЕ ПРЕДИКАТА СИММЕТРИИ
МНОГОГОЛОВЧАТЫМИ МАШИНАМИ ТЬЮРИНГА
СО ВХОДОМ**

Содержание. Введение.— Глава I. Покрытия слов симметричными подсловами.— 1. Точки и цепи слова.— § 2. Взаимное расположение нескольких цепей.— § 3. Суммарные длины некоторых сегментных покрытий, порождаемых точками и цепями.— Глава II. Кодирование цепей.— § 1. Разметка цепей.— § 2. Восстановление цепей по их разметке.— Глава III. Описание распознающей машины.— § 1. Общая структура машины.— § 2. Алгоритмы обработки цепей.— § 3. Алгоритмы обработки точек.— Глава IV. Корректность машинного определения валентности.— § 1. Выделение основных этапов работы машины над входным словом и некоторые их свойства.— § 2. Основная лемма.— § 3. Окончание доказательства основной леммы.— § 4. Теорема о корректности алгоритма распознавания.— Глава V. Оценка скорости.— § 1. Полнота распознающего алгоритма.— § 2. Оценки, связанные с краевыми тактами сдвига.— § 3. Оценка числа тактов сдвига через длины областей симметрии решеток из ЦГ и ТВ.— Иллюстрации.— Указатель терминов.— Указатель обозначений.— Литература.

А. О. Слисенко. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. Тр. МИАН СССР, 1973, том 129, 30–202

Введение

1⁰. В настоящей работе доказывается следующая теорема: предикат симметрии * распознается некоторой многоголовчатой машиной Тьюринга со входом в реальное время, т. е. за время поступления входного слова (при условии, разумеется, что перед каждым тактом работы машины поступает ровно одна буква входного слова). Из этой теоремы и из ре-

ПОТОП

А. О. Слисенко. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. Тр. МИАН СССР, 1973, том 129, 30–202

Введение

1⁰. В настоящей работе доказывается следующая теорема: предикат симметрии * распознается некоторой многоголовчатой машиной Тьюринга со входом в реальное время, т. е. за время поступления входного слова (при условии, разумеется, что перед каждым тактом работы машины поступает ровно одна буква входного слова). Из этой теоремы и из ре-

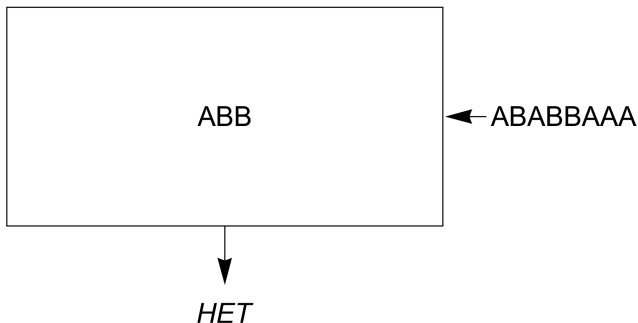


← ABBABABBAAA

А. О. Слисенко. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. Тр. МИАН СССР, 1973, том 129, 30–202

Введение

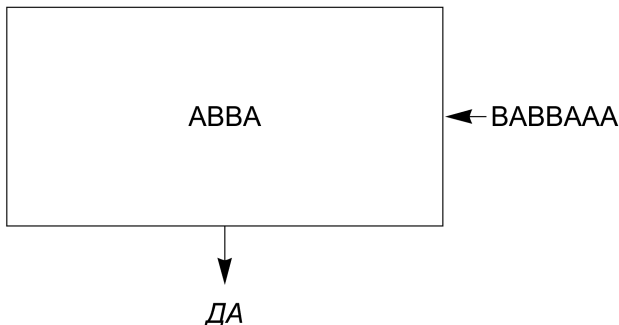
1⁰. В настоящей работе доказывается следующая теорема: предикат симметрии * распознается некоторой многоголовчатой машиной Тьюринга со входом в реальное время, т. е. за время поступления входного слова (при условии, разумеется, что перед каждым тактом работы машины поступает ровно одна буква входного слова). Из этой теоремы и из ре-



А. О. Слисенко. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. Тр. МИАН СССР, 1973, том 129, 30–202

Введение

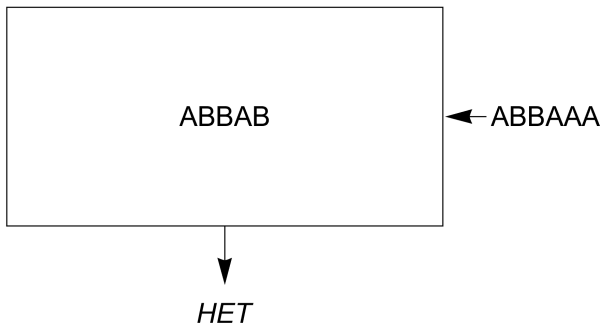
1⁰. В настоящей работе доказывается следующая теорема: предикат симметрии * распознается некоторой многоголовчатой машиной Тьюринга со входом в реальное время, т. е. за время поступления входного слова (при условии, разумеется, что перед каждым тактом работы машины поступает ровно одна буква входного слова). Из этой теоремы и из ре-



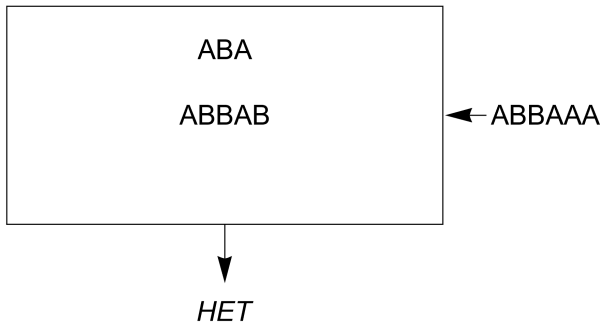
А. О. Слисенко. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. Тр. МИАН СССР, 1973, том 129, 30–202

Введение

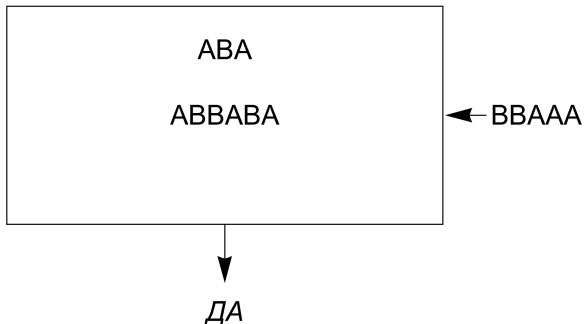
1⁰. В настоящей работе доказывается следующая теорема: предикат симметрии * распознается некоторой многоголовчатой машиной Тьюринга со входом в реальное время, т. е. за время поступления входного слова (при условии, разумеется, что перед каждым тактом работы машины поступает ровно одна буква входного слова). Из этой теоремы и из ре-



Распознавание вхождения одного слова в другое



Распознавание вхождения одного слова в другое



Knuth–Morris–Pratt algorithm

🌐 20 languages ▾

Article [Talk](#)

[Read](#) [Edit](#) [View history](#) Tools ▾

From Wikipedia, the free encyclopedia

In [computer science](#), the **Knuth–Morris–Pratt algorithm** (or **KMP algorithm**) is a [string-searching algorithm](#) that searches for occurrences of a "word" W within a main "text string" S by employing the observation that when a mismatch occurs, the word itself embodies sufficient information to determine where the next match could begin, thus bypassing re-examination of previously matched characters.

The [algorithm](#) was conceived by [James H. Morris](#) and independently discovered by [Donald Knuth](#) "a few weeks later" from [automata theory](#).^{[1][2]} Morris and [Vaughan Pratt](#) published a technical report in 1970.^[3] The three also published the algorithm jointly in 1977.^[1] Independently, in 1969, [Matiyasevich](#)^{[4][5]} discovered a similar algorithm, coded by a two-dimensional Turing machine, while studying a string-pattern-matching recognition problem over a binary alphabet. This was the first linear-time algorithm for string matching.^[6]

Knuth–Morris–Pratt algorithm

Class	String search
Data structure	String
Worst-case performance	$\Theta(m)$ preprocessing + $\Theta(n)$ matching ^[note 1]
Worst-case space complexity	$\Theta(m)$

4. [^] Матиясевич, Юрий (1971). "О распознавании в реальное время отношения вхождения"PDF (PDF). *Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института им. В.А.Стеклова* (in Russian). **20**: 104–114., translated into English as Matiyasevich, Yuri (1973). "Real-time recognition of the inclusion relation"↗. *Journal of Soviet Mathematics*. **1**: 64–70. doi:10.1007/BF01117471↗. S2CID 121919479↗.

Давид Гильберт, “Математические проблемы”, [1900]

10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения. Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; *требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет.*

«Наглая» Гипотеза Martin'a Davis'a

Гипотеза (M. Davis, начало 50-х). Каждое перечислимое множество натуральных чисел представимо как множество всех положительных значений некоторого многочлена с целыми коэффициентами при произвольных целочисленных значениях переменных.

Следствие. Имеется многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ с целыми коэффициентами такой, что a является простым числом тогда и только тогда существуют целые числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что

$$P(x_1, \dots, x_n) = a.$$

DPRM-теорема [1970]. Понятия перечислимое множество и диофантово множество совпадают.

Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson, Юрий Матиясевич

Uncomputability and complexity of quantum control

Denys I. Bondar¹ & Alexander N. Pechen^{2,3}

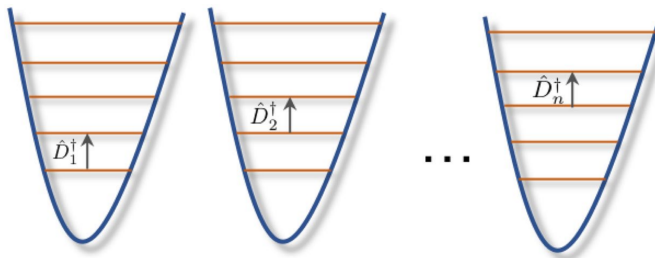


Figure 1. A physical system for simulating Diophantine equations with n variables. The system is either n trapped ions or an n -mode coherent field. The controls $\hat{D}_1^\dagger, \dots, \hat{D}_n^\dagger$ independently address each subsystem. For ions, the controls excite transitions between nearest levels, and transfer population of the highest excited state

Uncomputability and complexity of quantum control

Denys I. Bondar ¹ & Alexander N. Pechen ^{2,3}

Discussion

Computability of quantum control problems has been analyzed. A realistic situation, when a number of controls is finite, has been considered. We have shown that within this setting solving quantum control problems is equivalent to solving Diophantine equations. As a consequence, quantum control is Turing complete. The established equivalence is a new technique for quantum technology that, e.g., allows to construct quantum problems belonging to a specific complexity class. Examples of a multimode coherent field control are explicitly constructed. The negative answer to the Hilbert's tenth problem implies that there is no algorithm deciding whether there is a control policy connecting two quantum states represented by arbitrary pure or mixed density matrices, i.e., the most general fixed-time quantum state-to-state control problem is not algorithmically solvable. This result applies to the problems of finding exact as well approximate solutions for sufficiently small errors. Our method opens up an opportunity to recast many open mathematical problems, including the Riemann hypothesis, as quantum control tasks. The uncovered non-algorithmic nature makes quantum control a fruitful research area.

© Н.Н. ВОРОБЬЕВ (мл.), Д.Ю. ГРИГОРЬЕВ

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 2 XII 1989)

Полуалгебраическое множество определяется как множество всех точек в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих некоторой бескванторной формуле теории первого порядка вещественно замкнутых полей [1] (например, системе полиномиальных неравенств). В настоящей заметке предлагается алгоритм субэкспоненциальной сложности, который находит число компонент связности полуалгебраического множества. Кроме того, алгоритм позволяет для любых двух точек из полуалгебраического множества выяснить, принадлежат ли они одной и той же компоненте связности.

Пусть дана входная бескванторная формула Ξ теории вещественно замкнутых полей, содержащая k атомарных подформул вида $f_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, где $f_i \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Через $\{\Xi\} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим полуалгебраическое множество всех точек, удовлетворяющих Ξ . Будем предполагать, что многочлены f_i удовлетворяют следующим оценкам: $\deg_{X_1, \dots, X_n}(f_i) < d$ и абсолютная величина всякого (целого) коэффициента, входящего в f_i , не превосходит 2^M . Тогда битовый размер формулы Ξ можно оценить величиной $\mathcal{L} = kMd^n$ (ср. [4, 12]). Основным результатом настоящей заметки является следующая

Т е о р е м а. 1) *Можно построить алгоритм, который для всякой формулы вида Ξ находит некоторое конечное множество точек $\mathcal{T} \subset \{\Xi\}$ такое, что на каждой компоненте связности множества Ξ лежит единственная точка из $\mathcal{T}$. Время работы алгоритма можно оценить величиной $(M(kd)^{n^2})^{O(1)} \leq \mathcal{L}^{O(\log^2 \mathcal{L})}$ (т.е. субэкспоненциально от $\mathcal{L}$).*

2) *Кроме того, для всякой точки $u \in \{\Xi\}$ алгоритм позволяет определить единственную точку $v \in \mathcal{T}$ такую, что u, v принадлежат одной и той же компоненте связности множества $\{\Xi\}$. Оценка времени работы алгоритма аналогична оцен-*



ELSEVIER

Theoretical Computer Science 289 (2002) 69–83

Theoretical
Computer Science

www.elsevier.com/locate/tcs

A deterministic $(2 - 2/(k + 1))^n$ algorithm for k -SAT based on local search

Evgeny Dantsin^{a,1}, Andreas Goerdt^b, Edward A. Hirsch^{c,*,2},
Ravi Kannan^{d,3}, Jon Kleinberg^e, Christos Papadimitriou^f,
Prabhakar Raghavan^g, Uwe Schöningh^h

^a*Department of Computer Science, University of Manchester, Oxford Road, M13 9PL, UK*

^b*TU Chemnitz, Fakultät für Informatik, 09107 Chemnitz, Germany*

^c*Steklov Institute of Mathematics, 27 Fontanka, 191011 St. Petersburg, Russia*

^d*Department of Computer Science, Yale University, New Haven CT 06520, USA*

^e*Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca NY 14853, USA*

^f*Computer Science Division, Soda Hall, UC Berkeley, CA 94720, USA*

^g*Verity Inc., 892 Ross Drive, Sunnyvale CA 94089, USA*

^h*Universität Ulm, Abteilung Theoretische Informatik, 89069 Ulm, Germany*

Received October 2000; received in revised form February 2001; accepted February 2001

Communicated by O. Watanabe

Куликов Александр Сергеевич

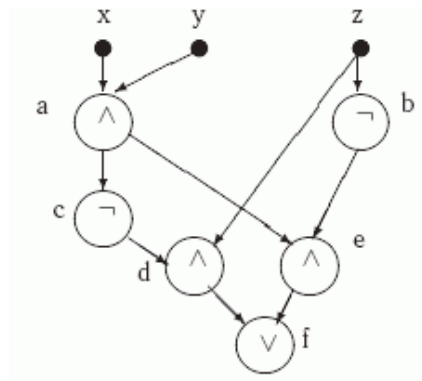
Схемная сложность явно заданных булевых функций

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Куликов Александр Сергеевич

Схемная сложность явно заданных булевых функций



Официальные оппоненты: АБЛАЕВ Фарид Мансурович,
доктор физико-математических наук, профессор,
чл.-корр. АН РТ,
Казанский федеральный университет,
заведующий кафедрой

ВЕРЕЩАГИН Николай Константинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, профессор

РАЗБОРОВ Александр Александрович,
доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, главный научный сотрудник

Из отзыва А. А. Разборова

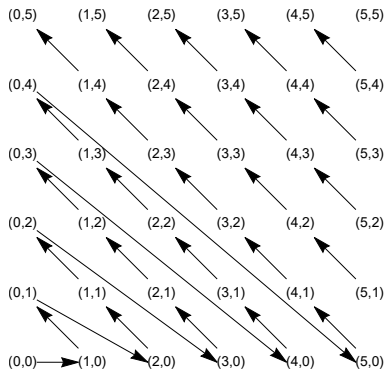
Отзыв на диссертацию А. С. Куликова “Схемная сложность явно заданных булевых функций”, представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

.....

Ядром, и в то же время наиболее технически трудным местом, диссертации является глава 1.3. В ней оценка из предыдущей главы 1.2 усиливается до $\left(3 + \frac{1}{86}\right)n - o(n)$, что, как я уже отмечал, является первым усилением оценки Блюма за последние 30 лет. Центральным новым по-

Канторова нумерация пар

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\} \quad C_2 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$$



$$C_2(m, n) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + 3m + n) \quad C'_2(m, n) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + m + 3n)$$

Общий случай

$$C_3 : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$C_3(m_1, m_2, m_3) = C_2(C_2(m_1, m_2), m_3)$$

$$C_d : \mathbb{N}_0^d \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} C_d(m_1, \dots, m_d) = \\ = m_1 + \binom{m_1 + m_2 + 1}{2} + \dots + \binom{m_1 + \dots + m_d + d - 1}{d} \end{aligned}$$

Теорема (R. Fueter, G. Pólya [1923]). Канторовы многочлены

$$C_2(m, n) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + 3m + n) \text{ и } C'_2(m, n) = \frac{1}{2}((m+n)^2 + m + 3n)$$

являются единственными многочленами второй степени,
взаимно-однозначно отображающими $\mathbb{N}_0^2$ на $\mathbb{N}_0$.

widerspricht dem Satz von LINDEMANN und so muss $F \neq 1$ und kann $f(x, y)$ im elliptischen oder im definiten hyperbolischen Fall keine abzählende Funktion sein. Die Lösung liegt also tatsächlich in der Richtung, die Sie mit der Erwähnung von π und e andeuteten.

Теорема (F. Lindemann [1882]). Если z – алгебраическое число и $z \neq 0$, то e^z трансцендентно.

Следствие. Число π трансцендентно (ибо $e^{2\pi i} = 1$).

ДВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ФУЕТЕРА-ПОЛИА О СПАРИВАЮЩИХ МНОГОЧЛЕНАХ

© М. А. Всемиров

Представлены два новых доказательства теоремы Фуетера-Полиа, утверждающей, что имеется только два квадратичных многочлена, которые биективно отображают $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ на $\mathbb{N}_0$. В противоположность исходному доказательству предложенный подход является элементарным.

RESEARCH

Packing polynomials on irrational sectors



B. Sury^{1*} and M. Vsemirnov²

*Correspondence:

surybang@gmail.com

¹Statistics & Mathematics Unit,

Indian Statistical Institute, 8th

Mile Mysore Road, Bangalore

560059, India

Full list of author information is
available at the end of the article

Abstract

Fueter and Polya proved that the only quadratic polynomials giving a bijection between N and N^2 are the two Cantor polynomials. It is conjectured that there is no bijection from N^2 onto N given by a polynomial of degree at least 3. A similar problem arises when the domain of the map is replaced by the set of integral points in some sector in R^2 . Rational sectors were considered by Nathanson and Stanton. Here, we study and solve the case of general irrational sectors. In fact, our method enables us also to recover the results on rational sectors and also answer a question posed by Nathanson.

Keywords: Cantor polynomials, Irrational sectors, Packing polynomials

Mathematics Subject Classification: 05A15, 11B34, 52C15

AN UPPER BOUND ON THE CHROMATIC NUMBER OF 2-PLANAR GRAPHS

DMITRI V. KARPOV

*St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics
Russian Academy of Sciences and St. Petersburg University
St. Petersburg, Russia*

e-mail: dvk0@yandex.ru

Abstract

It is proved that any 2-planar graph (i.e., a graph which can be drawn on a plane such that any edge intersects at most two others) has a proper vertex coloring with 9 colors.

Keywords: 2-planar graphs, chromatic number.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C10, 05C15.

Journal of the ACM, Vol. 66, No. 6, Article 44. Publication date: November 2019.

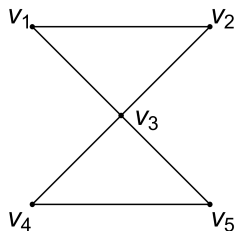
The Weisfeiler–Leman Dimension of Planar Graphs Is at Most 3

SANDRA KIEFER, RWTH Aachen University, Germany

ILIA PONOMARENKO, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia

PASCAL SCHWEITZER, University of Kaiserslautern, Germany

Считающие кванторы



$$\begin{aligned} & E(v_1, v_2) \& E(v_1, v_3) \& \neg E(v_1, v_4) \& \neg E(v_1, v_5) \& \\ & \& E(v_2, v_3) \& \neg E(v_2, v_4) \& \neg E(v_2, v_5) \& \\ & \& E(v_3, v_4) \& E(v_3, v_5) \& \\ & \& E(v_4, v_5) \end{aligned}$$

$\exists^{\geq n} x \phi(x)$ – существует по крайней мере n объектов x таких, что $\phi(x)$

$\exists^{=n} x \phi(x)$ – существует ровно n объектов x таких, что $\phi(x)$

$$\exists^{=5} x_1 (x_1 = x_1) \& \exists^{=1} x_1 \exists^{=4} x_2 (E(x_1, x_2) \& \exists^{=2} x_1 E(x_1, x_2))$$

The Weisfeiler–Leman Dimension of Planar Graphs Is at Most 3

SANDRA KIEFER, RWTH Aachen University, Germany

ILIA PONOMARENKO, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia

PASCAL SCHWEITZER, University of Kaiserslautern, Germany

We prove that the Weisfeiler–Leman (WL) dimension of the class of all finite planar graphs is at most 3. In particular, every finite planar graph is definable in first-order logic with counting using at most 4 variables. The previously best-known upper bounds for the dimension and number of variables were 14 and 15, respectively.

Intrinsic Dimension Estimation for Robust Detection of AI-Generated Texts

**Eduard Tulchinskii¹, Kristian Kuznetsov¹, Laida Kushnareva², Daniil Cherniavskii³,
Sergey Nikolenko⁵, Evgeny Burnaev^{1,3}, Serguei Barannikov^{1,4}, Irina Piontkovskaya²**

¹Skolkovo Institute of Science and Technology, Russia;

²AI Foundation and Algorithm Lab, Russia;

³Artificial Intelligence Research Institute (AIRI), Russia; ⁴CNRS, Université Paris Cité, France;

⁵St. Petersburg Department of the Steklov Institute of Mathematics, Russia

Lettie Hamlet Rogers

Lettie Hamlett Rogers (1917 – May 14, 1957) is an American novelist and educator.

She was born in Soochow, central China, the daughter of missionary parents. She spent her childhood in China and Japan. After graduating from high school at the Shanghai American School she came to the United States to attend Woman's College of the University of North (now the University of North Carolina at Greensboro). Rogers received a Bachelor of Arts degree in sociology in 1940...

Peter Turnerelli

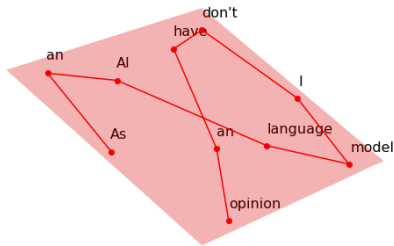
Peter Turnerelli (c.1772–1839) was an Irish-born sculptor of Italian descent working in Britain in the early 19th century.

Early Life and Career

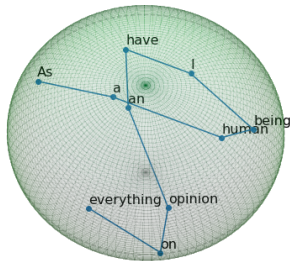
Born in Dublin, Ireland, Turnerelli moved to London to study sculpture under renowned neoclassical artist John Flaxman. Turnerelli continued to hone his craft and gain recognition for his work, eventually becoming a member of the Royal Academy in 1812...

Intrinsic Dimension Estimation for Robust Detection of AI-Generated Texts

As an AI language model I don't have an opinion



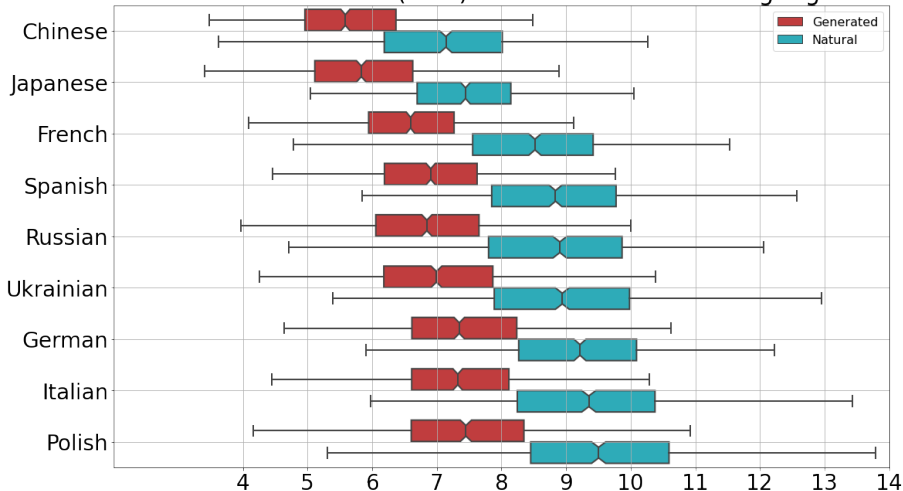
As a human being I have an opinion on everything



3 Intrinsic dimension and persistent homology dimension

Informally speaking, the intrinsic dimension of some subset $S \subset \mathbb{R}^n$ is the number of degrees of freedom that a point moving inside S has. This means that in a small neighbourhood of every point, the set S can be described as a function of d parameters, $d \leq n$, and this number cannot be reduced. This idea is formalized in the notion of a d -dimensional *manifold* in $\mathbb{R}^n$: it is a subset $M \subset \mathbb{R}^n$ such that for every point $x \in M$ there exists an open neighborhood which is equivalent to an open ball in $\mathbb{R}^d$ for some value d . Importantly, if M is a connected set then d should be the same for all its points, so we can talk about the dimension of the entire manifold.

Intrinsic dimension (PHD) of texts in different languages



Дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + k^{-s} + \dots$$

Теорема (Л. Эйлер [1737])

$$\zeta(s) = \prod_{p - \text{простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

$\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x

C. Gauss: $\pi(x) \approx \text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt$

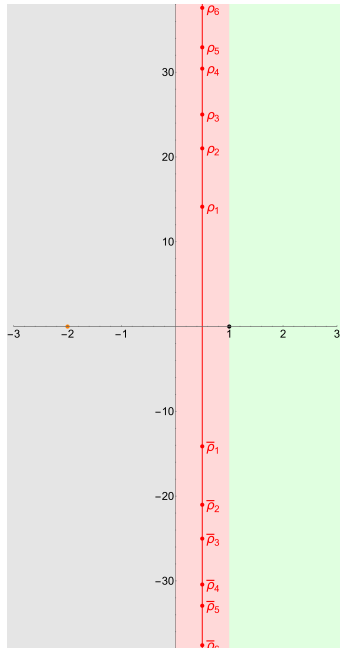
Теорема (Riemann [1859]).

$$\pi(x) = \text{Li}(x) - \frac{1}{2}\text{Li}(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{\substack{\zeta(\rho) = 0 \\ \text{Re}(\rho) \neq 0}} \text{Li}(x^{\rho}) + (\text{малые слагаемые})$$

Гипотеза Римана (1859)
Проблема Гильберта (1900)
Проблема тысячелетия (XXI век)

Все не вещественные (называемые
нетривиальными) нули функции $\zeta(s)$
лежат на *критической прямой*

$$\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$$



$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad \eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s} = (1 - 2 \times 2^{-s}) \zeta(s)$$

$$\cdots = \zeta(\overline{\rho_3}) = \zeta(\overline{\rho_2}) = \zeta(\overline{\rho_1}) = 0 = \zeta(\rho_1) = \zeta(\rho_2) = \zeta(\rho_3) = \cdots$$

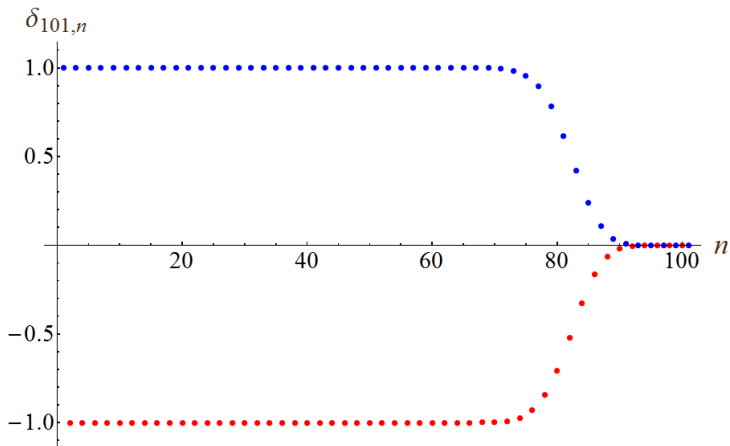
$$\cdots = \eta(\overline{\rho_3}) = \eta(\overline{\rho_2}) = \eta(\overline{\rho_1}) = 0 = \eta(\rho_1) = \eta(\rho_2) = \eta(\rho_3) = \cdots$$

$$\eta_{2M+1}(s) = 1 + \sum_{n=2}^{2M+1} \delta_{2M+1,n} n^{-s}$$

$$\eta_{2M+1}(\overline{\rho_M}) = \cdots = \eta_{2M+1}(\overline{\rho_1}) = 0 = \eta_N(\rho_1) = \cdots = \eta_{2M+1}(\rho_M)$$

Коэффициенты $\delta_{101,n}$

(красные для чётных n , синие для нечётных n)



Коэффициенты $\delta_{3101,n}$

(красные для чётных n , синие для нечётных n)

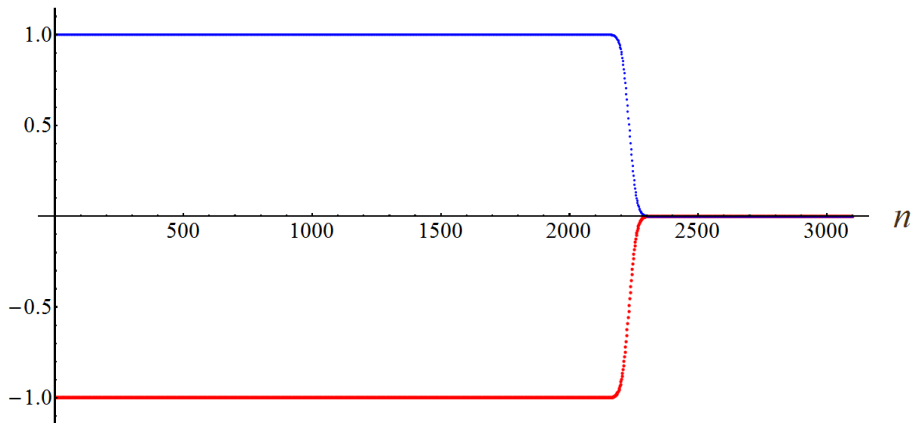


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

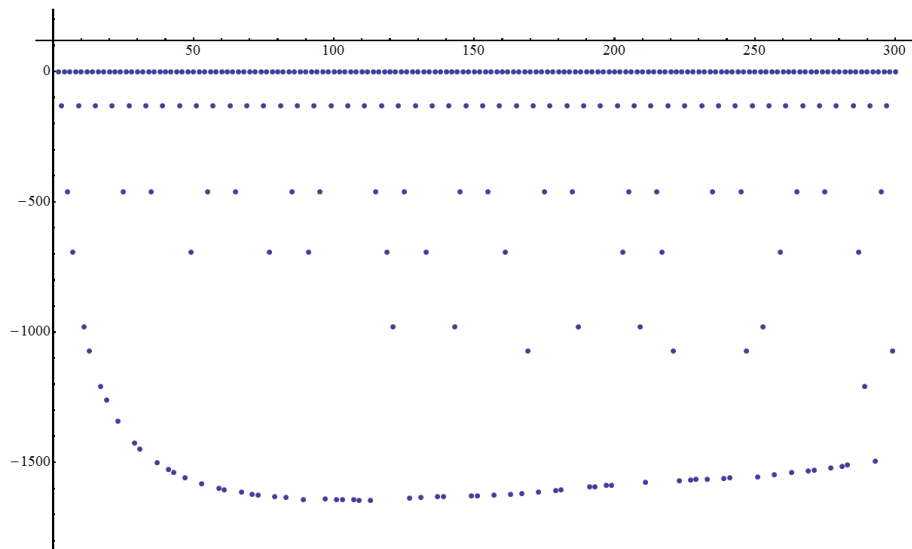


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

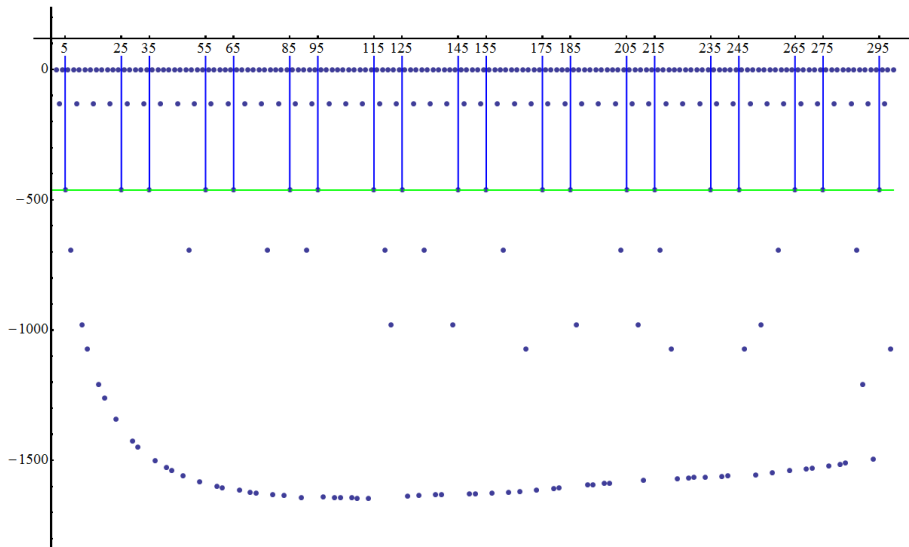


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

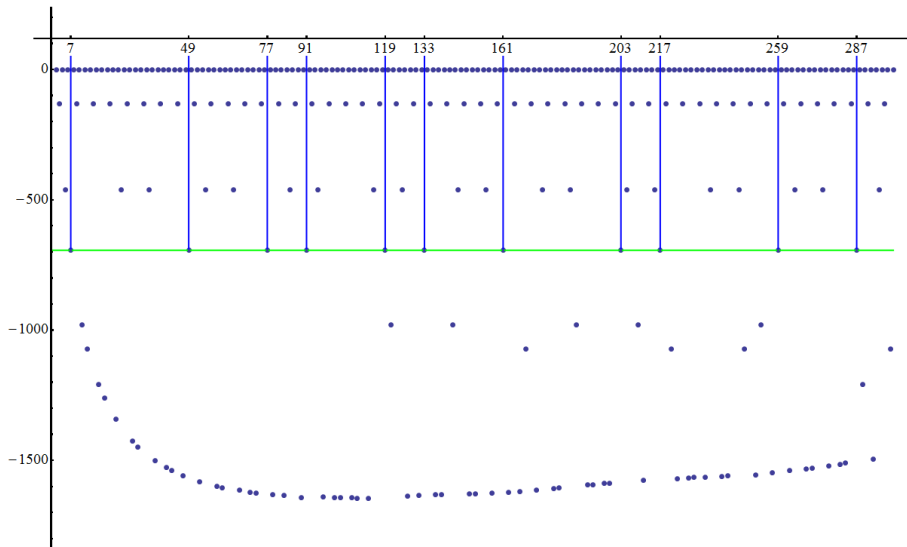


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

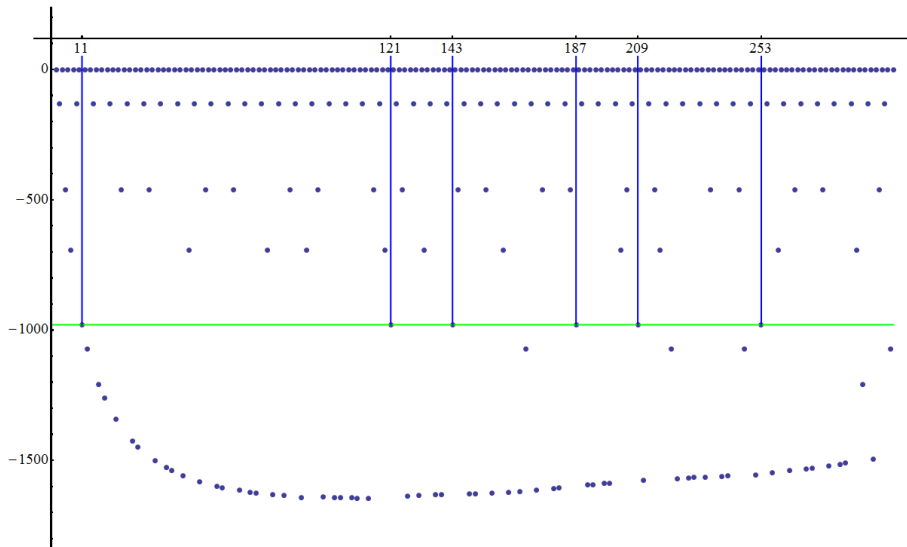


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

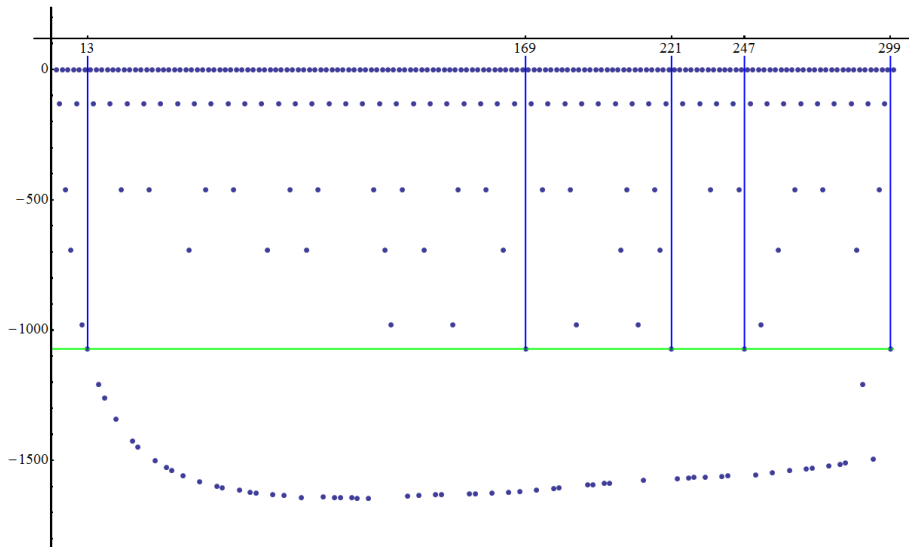


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$

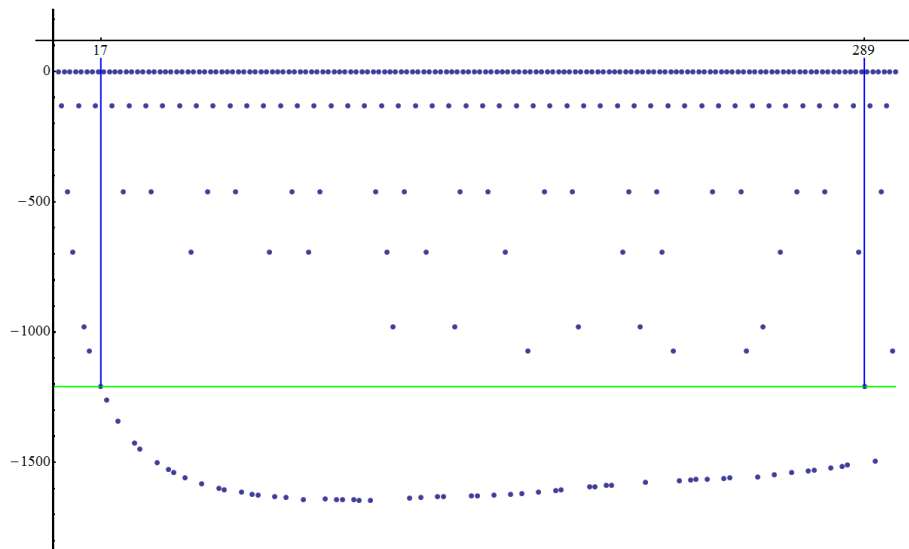


График $\log_{10} |\delta_{3101,n} - 1|$ = решето Эратосфена

