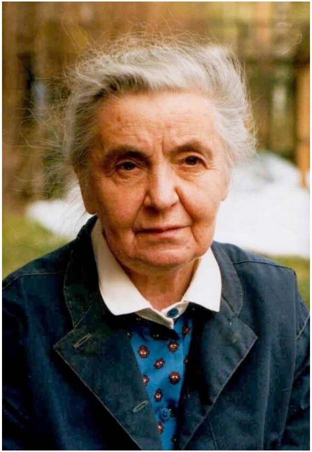
Лаборатория математической физики ПОМИ. XXI век

А.И. Назаров

Конференция, посвященная 90-летию
Математического института им. В.А. Стеклова
17 мая 2024 г.

Материалы доклада подготовлены совместно с С.И. Репиным, Г.А. Серегиным, Н.Д. Филоновым, Т.Н. Шилкиным

Лаборатория математической физики



О.А. Ладыженская (1922-2004)

В.А. Солонников (1933-2024)

О работах В.А. Солонникова

Всеволод Алексеевич Солонников – один из создателей современной теории уравнений в частных производных и математической гидродинамики, основатель научной школы. В указанный период он продолжал работать над различными проблемами гидродинамики и магнитной гидродинамики (в том числе над задачами со свободными границами). В частности, в ряде работ им была развита L_p-теория для этих задач.

В начале 2000-х годов В.А. Солонников обратился к классической проблеме устойчивости фигур равновесия вращающейся несжимаемой жидкости. Эта проблема описывает широчайший круг физических явлений, начиная от явлений микромира и заканчивая вращением галактик. Ею занимались десятки ученых, в том числе Ньютон, Маклорен, Якоби, Пуанкаре, Ляпунов.

О работах В.А. Солонникова

В.А. Солонников развил идею А.М. Ляпунова, основанную на анализе второй вариации функционала энергии относительно малых возмущений границы фигуры, а также распространил эту идею на случай капиллярных жидкостей. В большой серии работ он исследовал устойчивость осесимметричных и несимметричных фигур равновесия и показал, что при достаточной малости начальных данных (угловой скорости вращения, распределения скоростей и отклонения начальной формы капли от равновесной фигуры), а также положительности второй вариации функционала энергии возмущение этой фигуры стремится к нулю при $t \to \infty$. При этом движение капли переходит во вращение жидкой массы как твердого тела. Неустойчивость же симметричных фигур равновесия вращающейся несжимаемой жидкости гарантирована в случае, когда вторая вариация функционала энергии может принимать отрицательные значения.

О работах В.А. Солонникова

Таким образом, благодаря работам Солонникова существовавшая ранее теория приобрела законченный математический вид. Были разработаны методы, позволившие впервые в истории дать полное математически строгое обоснование приниципа минимума потенциальной энергии в данной задаче.

За этот цикл работ В.А. Солонников был награжден премией им. М.А. Лаврентьева РАН (совм. с В.В. Пухначевым) и премией им. П.Л. Чебышева Правительства СПб. Сам Всеволод Алексеевич считал результаты в этой области самым важным своим достижением в математической гидродинамике.

В последние годы В.А. Солонников продолжал развивать технику изучения задач со свободными границами. Частично эти результаты вошли в монографию “Motion of a drop in an incompressible fluid” (совм. с И.В. Денисовой, Birkhauser, 2021).

Основные научные направления

- Математическая гидродинамика
- Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач
- Вариационное исчисление
- Приближенные методы решения краевых задач
- Спектральная теория

Совместная работа с лабораторией математических проблем геофизики

Математическая гидродинамика

Проблема глобального существования гладких решений системы Навье–Стокса выдвинута институтом Клэя в качестве одной из “Millenium problems”. Несмотря на многочисленные попытки решения этой проблемы, для трехмерной нестационарной системы Навье–Стокса на сегодняшний день получены только два типа глобальных результатов:

- существование слабых решений из энергетического класса;
- существование гладких решений при малых (по соответствующей норме) начальных данных.

Вопрос о единственности слабых решений до сих пор является открытым. Заметим также, что гладкие решения, если они существуют, автоматически оказываются единственными в энергетическом классе (слабая–сильная единственность).

Математическая гидродинамика

Вопрос о существовании гладких решений $\iff$ дает ли на самом деле система Навье–Стокса детерминистское описание течений вязкой жидкости для произвольных по величине гладких начальных данных. Один из возможных путей к решению этого вопроса – исследование регулярности слабых решений системы Навье–Стокса.

Подход, который на протяжении многих лет развивается в лаборатории математической физики, является классическим в теории уравнений в частных производных. При этом (“локальном”) подходе рассматривается решение уравнений Навье–Стокса с конечной “энергией” в канонической области

$$Q(z_0, R) = B(x_0, R) \times (t_0 - R^2, t_0); \qquad z_0 = (x_0, t_0)$$

и делается попытка доказать его дополнительную гладкость во внутренних подобластях.

Математическая гидродинамика

Трудности в исследовании трехмерных уравнений Навье–Стокса в значительной степени связаны с их суперкритичностью. Именно, помимо стандартной для механики галилеевской инвариантности, эти уравнения инвариантны относительно масштабных преобразований

$$u(x,t) \mapsto u^{\lambda}(x,t) := \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t),$$
$$p(x,t) \mapsto p^{\lambda}(x,t) := \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t),$$

отражающих свойство гидродинамического подобия. С другой стороны, для уравнений Навье–Стокса справедливо энергетическое тождество, выражающее закон сохранения энергии и дающее априорную оценку определенных норм поля скоростей жидкости. Вопрос в том, как ведут себя эти нормы при естественных масштабных преобразованиях решений с $\lambda \to \infty$, то есть при переходе к "малым масштабам".

Математическая гидродинамика

Поведение норм решений, естественно определяемых имеющимися в задаче законами сохранения, относительно масштабно-инвариантных преобразований позволяет провести следующую классификацию моделей математической физики:

- субкритические модели, в которых априорно ограниченные нормы решений стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$;
- критические модели, в которых контролируемые нормы решений инвариантны относительно масштабных преобразований. К этому классу относится двумерная система Навье–Стокса;
- суперкритические модели, в которых энергетическая норма решения “взрывается” (то есть стремится к бесконечности) при $\lambda \to \infty$. К таким моделям относится трехмерная система Навье–Стокса.

Математическая гидродинамика

Знаменитая теорема Каффарелли–Кона–Ниренберга (1982) утверждает, что подходящие слабые решение уравнений Навье–Стокса (т.е. слабые решения, удовлетворяющие локальному энергетическому неравенству) обладают частичной регулярностью, то есть могут иметь особенности лишь на множестве, одномерная хаусдорфова мера которого равна нулю. Уже в нашем веке сотрудники лаборатории установили аналогичные результаты в окрестности граничных точек.

- Г.А. Серегин (2002) – частичная регулярность вблизи плоской границы;
- Г.А. Серегин, В.А Солонников, Т.Н. Шилкин (2004) – случай искривленной границы;
- Г.А. Серегин, Т.Н. Шилкин (2014) – обзорная работа.

Эти результаты существенно опираются на исследования В.А. Солонникова задачи Стокса в анизотропных пространствах Соболева.

Математическая гидродинамика

Результаты по локальной гладкости подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса в окрестности заданной точки естественным образом формулируются в терминах малости тех или иных масштабно-инвариантных норм решений (Морриевского типа), которые называются условиями ε–регулярности. Примером (квадрата) такой нормы является следующий функционал:

$$E(u, z_0, r) \ := \ \frac{1}{r} \int\limits_{Q(z_0,r)} |\nabla u|^2 \, dxdt,$$

поскольку при любом $\lambda > 0$ выполняется соотношение

$$E(u, z_0, R) \ = \ E(u^\lambda, z_0, R/\lambda).$$

Математическая гидродинамика

Благодаря в первую очередь работам Г.А. Серегина середины 2000-ых годов теория ε-регулярности подходящих слабых решений уравнений Навье–Стокса приобрела свой современный вид (см. статью в УМН, 2007). Основной результат таков: существует абсолютная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, такая что для любого подходящего слабого решения u и p уравнений Навье–Стокса в $Q(z_0, R)$ неравенство

$$\sup_{r<1} E(u, z_0, r) \ < \ \varepsilon_0$$

(или аналогичное неравенство для другой масштабно-инвариантной нормы решения) влечет регулярность точки z_0, то есть решение как минимум ограничено в некоторой окрестности z_0. Более того, если для решения какая-то из масштабно-инвариантных норм Морриевского типа конечна, то и все остальные также конечны.

Математическая гидродинамика

Это позволяет выделить два различных типа поведения решений уравнений Навье–Стокса вблизи особой точки.

- Критические особенности, или особенности типа I: z_0 – сингулярная точка решения, но

  $$\sup_{r<R} E(u, z_0, r) \; < \; +\infty.$$

  К этому классу относятся сингулярности автомодельного решения.
- Суперкритические особенности, или особенности типа II – все остальные.

Математическая гидродинамика

Отсутствие особенностей типа I при различных условиях:

- Эскуриаза, Серегин, Шверак (2003)
- Серегин, Шверак (2007)
- Кох, Надирашвили, Серегин, Шверак (2007)
- Серегин (2020)

Отсутствие “слегка суперкритических” особенностей (отличающихся от критических на двойной логарифм):

- Г.А. Серегин (2021-2022)

Теоремы лиувиллевского типа для уравнений Навье–Стокса:

- Г.А. Серегин, Т.Н. Шилкин (обзор, 2018).

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

Задача Вентцеля

- А.Д. Вентцель (1959) – наиболее общая краевая задача для эллиптического оператора, порождающая генератор марковского случайного процесса.

Описание процессов в средах, содержащих тонкие пленки на границе: задачи гидродинамики, электродинамики и теории упругости, инженерные задачи нефтедобычи, некоторые вопросы финансовой математики.

Граничные условия Вентцеля задаются операторами, содержащими производные второго порядка по касательным переменным.

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

Для квазилинейных эллиптических недивергентных уравнений условия Вентцеля могут быть записаны в виде

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x, u, D^* u) D_i^* D_j^* u + \beta(x, u, Du) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

(p^* — проекция вектора p на касательную плоскость к $\partial\Omega$),

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \qquad \nu|\xi^*|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i^*\xi_j^* \le \nu^{-1}|\xi^*|^2, \qquad \nu > 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{p_i}\mathbf{n}_i \ge 0.$$

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

- Крео, Ланчия, Назаров, Верноле (2019-2020) – задача Вентцеля с нелокальными членами в областях с кусочно гладкой границей.
- Апушкинская, Назаров, Палагачев, Софтова (2020-2023) – разрешимость линейных и квазилинейных задач Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами из класса *VMO*.

Двухфазная задача Вентцеля описывает ситуацию, когда пленка разделяет область Ω на две части.
Обобщение – задачи типа Вентцеля на стратифицированных множествах.

- А.И. Назаров, А.А. Палецких (2015); Ф.Д. Мироненко, А.И. Назаров (2022); К.М. Медведев, А.И. Назаров (2023).

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

Работа над задачей Вентцеля инициировала серию новых результатов в линейной теории параболических уравнений — области, сравнительно хорошо изученной.

- В.А. Козлов, А.И. Назаров (2009–2016) – коэрцитивные оценки (в полупространстве и в клине) в весовых нормах для уравнений со старшими коэффициентами, непрерывными по пространственным переменным и лишь измеримыми по времени.

Отметим, что в этих статьях был существенно развит метод В.А. Солонникова для оценки функции Грина.

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

В последние годы был получен ряд результатов по качественной теории эллиптических и параболических уравнений, касающихся точных (а при некоторых предположениях даже необходимых и достаточных) условий справедливости классических теорем.

- А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева (2011) – эллиптические и параболические уравнения дивергентного вида с дополнительным структурным условием на снос

$$\operatorname{div}(\mathbf{b}) \equiv \sum_{i=1}^{n} D_i b_i \leq 0 \quad \text{в смысле обобщ. функций.} \qquad (*)$$

Уравнения с младшими коэффициентами, удовлетворяющими $(*)$, возникают в некоторых приложениях (в частности, в задачах математической гидродинамики).

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

Проблема: насколько “плохими” могут быть младшие коэффициенты b_i для выполнения сильного принципа максимума, неравенства Гарнака и теоремы Лиувилля. Показано, что при условии $(*)$ предположения о b_i можно значительно ослабить в шкале пространств Морри по сравнению с общим случаем.

Эти результаты были существенно использованы Г.А. Серегиным в его работах об отсутствии особенностей у осесимметричных решений системы Навье–Стокса.

- Н.Д. Филонов (2013); Н.Д. Филонов, Т.Н. Шилкин (2018); Н.Д. Филонов, П.А. Ходунов (2021) – дальнейшие результаты в этом направлении.

Разрешимость и качественные свойства решений краевых задач

- А.И. Назаров (2012); Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров (2016) – точные условия выполнения леммы о нормальной производной (леммы Хопфа–Олейник) для эллиптических и параболических уравнений недивергентного вида.
- Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров (2019) – лемма о нормальной производной для дивергентных уравнений.
- В.А. Козлов, А.И. Назаров (2021) – сильный принцип максимума для дивергентных эллиптических уравнений со старшими коэффициентами из класса *VMO* и младшими коэффициентами из класса Като.
- Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров (УМН, 2022) – обзор тематики, связанной с леммой о нормальной производной и принципом максимума для эллиптических уравнений.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

Множественность положительных решений квазилинейных краевых задач

Хорошо известно, что если линейная краевая задача обладает какой-нибудь симметрией, то ее решение обычно наследует эту симметрию. Для квазилинейных уравнений дело обстоит гораздо сложнее. Рассмотрим, например, простейшую задачу

$$-\Delta u = u^{q-1} \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u > 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (**)$$

- Гидас, Ни, Ниренберг (1979): если $\Omega = B_R$ — шар радиуса R, то любое решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ задачи $(**)$ радиально симметрично ($u = u(r)$).
- Коффман (1984, $n = 2$), Ли (1990, $n \geq 4$), Бьон (1997, $n = 3$): если $\Omega = B_{R+1} \setminus \overline{B}_R$ – сферический слой, $2 < q < \frac{2n}{n-2}$, то, увеличивая R, можно обеспечить существование любого наперед заданного количества различных (не получающихся друг из друга поворотом) решений.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

Аналогичный эффект наблюдается для более общей нелинейности f в правой части $(**)$ при выполнении некоторых структурных условий.

- А.И. Назаров и его ученики (2004-2018) – аналогичные результаты для уравнения с оператором p-лапласиана

  $$\Delta_p u := \sum_{i=1}^{n} D_i\big(|Du|^{p-2} D_i u\big)$$

  в левой части уравнения $(**)$, а также для ряда других краевых задач.
- Лерман, Нарышкин, Назаров (2020); Назаров, Щеглова (2021, 2023); Колоницкий, Лерман, Назаров (2024) – вариационный метод построения решений с различными симметриями для квазилинейных уравнений (в т.ч. с дробными операторами) во всем пространстве.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

Симметрия и асимметрия решений симметричных вариационных задач

Ответы в таких задачах подчас неожиданны даже в одномерном случае. Задача о точной константе в одномерном обобщенном неравенстве Пуанкаре

$$\|u\|_{L^q(-1,1)} \le \lambda(p,q,r)\|u'\|_{L^p(-1,1)}, \qquad \int\limits_{-1}^{1} |u(x)|^{r-2}u(x)\,dx = 0$$

исследовалась многими авторами (Дакоронья, Егоров, Беллони, Каволь и др.).

- И.В. Герасимов, А.И. Назаров (2011) – окончательный результат: если $q \le (2r-1)p$, то $\lambda(p,q,r)$ не зависит от r и достигается на нечетной функции. Если же $q > (2r-1)p$, то экстремальная функция симметрией не обладает.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

- Назаров и его ученики (2004-2014) – потеря симметрии экстремалей при изменении параметров в одномерных и в многомерных задачах.
- А.И. Назаров, А.П. Щеглова (2021) – обзор результатов о симметрии и асимметрии экстремалей одномерных задач.
- Назаров с соавторами (2004-2023) – точные константы в интегральных неравенствах.
- А.И. Назаров, С.И. Репин (2015) – точные константы в неравенствах типа Пуанкаре для функций с нулевым средним для следа. Такие неравенства играют важную роль в получении апостериорных оценок для численных методов решения краевых задач.
- Н.Г. Кузнецов, А.И. Назаров (2015) – обзор результатов о точных константах в неравенствах первого порядка.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

- С.В. Банкевич, А.И. Назаров (2011-2019) – необходимые и достаточные условия монотонности различных функционалов при перестановках функций (теоремы типа Пойа–Сеге).
- Назаров с соавторами (2005-2024) – разрешимость краевых задач вариационной структуры с “критическим” ростом правой части. В этом случае стандартные теоремы существования не работают, и результат коренным образом зависит от геометрии области.
- А.И. Назаров (2008) – обзор результатов о разрешимости критических краевых задач.

Задачи, связанные с вариационным исчислением

Задачи с нелокальными операторами

В последние десятилетия существенно вырос интерес к уравнениям с нелокальными операторами типа дробных лапласианов, количество работ в мире по этому направлению исчисляется уже сотнями.

R. Musina, А.И. Назаров (2014-2024):

- качественные свойства различных дробных лапласианов, в том числе для операторов порядка большего единицы;
- неулучшаемые результаты о разрешимости и теоремы о качественных свойствах решений для некоторых классов квазилинейных уравнений с дробными операторами;
- точные константы для дробных аналогов классических неравенств Харди-Соболева, их достижимость.

Результаты о сравнении дробных лапласианов вошли в приглашенный доклад Назарова на Международном Математическом конгрессе 2022 года.

Приближенные методы решения краевых задач

Полностью вычисляемые оценки расстояния до решения краевой задачи

Этот концептуально новый тип апостериорных оценок был предложен С.И. Репиным.

Пусть $u \in V$ – решение задачи

$$\mathcal{A}u = f, \qquad \mathcal{A} : V \to V^*,$$

в банаховом пространстве V, а $v \in V$ –заданная функция.
Задача: получить полностью вычисляемые оценки расстояния (в идеале двусторонние) между u и v:

$$M_\ominus(v, \mathcal{D}) \leq \|u - v\|_V \leq M_\oplus(v, \mathcal{D}), \qquad \forall v \in V,$$

где $\mathcal{D}$ обозначает множество известных данных (геометрия, коэффициенты, краевые условия, свободные параметры и т.п.)

Приближенные методы решения краевых задач

Оценки должны обладать следующими свойствами:

- полная вычисляемость: в оценки $M_{\oplus,\ominus}$ не входит информация о свойствах решения u;
- состоятельность:

$$M_{\oplus,\ominus}(v,\mathcal{D}) > 0, \text{ если } v \neq u; \quad M_{\oplus,\ominus}(v,\mathcal{D}) \to 0 \text{ при } v \to u;$$

- робастность: оценка не должна использовать никаких специальных свойств приближенного решения v или метода, при помощи которого оно было получено.

Приближенные методы решения краевых задач

Мотивация

1. Апостериорный контроль приближенных решений.
В классической теории аппроксимации контроль точности изучается в асимптотическом смысле: уравнение проецируется на подпространство размерности $N \sim 1/h$, в нем строится приближенное решение u_h и доказывается, что $u_h \to u$ при $h \to 0$. В лучшем случае можно получить оценку типа

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^k, \quad C > 0, k > 0.$$

Подобные оценки не дают всей необходимой информации, поскольку константа C зависит от u, и обычно имеется только ее грубая оценка сверху. Кроме того, они основаны на ряде предположений, которые трудно гарантировать на практике, в частности:

- подпространства и соответствующие сетки должны быть в некотором смысле равномерно регулярны;
- u должно иметь дополнительную регулярность (гладкость);
- u_h должно быть точным (галеркинским) решением соответствующей конечномерной задачи.

Приближенные методы решения краевых задач

Мотивация

2. Сравнение математических моделей и оценка их точности.

Если u – решение исходной (полной, сложной) модели, а v – решение упрощенной (редуцированной, гомогенизированной) модели, то нижние оценки позволяют оценить неустранимую ошибку модели, например, связанную с упрощением коэффициентов дифференциального уравнения или с переходом от 3D модели к 2D модели. Также они позволяют оценить влияние неопределенности (неполного знания) данных модели.

3. Приложения к задачам оптимального управления и обратным задачам.

Приближенные методы решения краевых задач

Пример: Задача Дирихле для уравнения конвекции–диффузии

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega;$$

$$A \in L^\infty(\Omega), \quad \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega), \quad \mathrm{div}(\mathbf{b}) \in L^\infty(\Omega), \quad \mathrm{div}(\mathbf{b}) \leq 0.$$

Для любых $v \in H^1_0(\Omega)$ и $\mathbf{y} \in L_2(\Omega)$, $\mathrm{div}(\mathbf{y}) \in L_2(\Omega)$, выполняется оценка

$$|[u - v]|^2 := \int\limits_\Omega A\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{b})|u-v|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega (\mathbf{y} - A\nabla v)\cdot(A^{-1}\mathbf{y} - \nabla v)dx + C_F(\Omega)\int\limits_\Omega |(f - \mathbf{b}\cdot\nabla v + \mathrm{div}(\mathbf{y}))|^2 dx,$$

где $C_F(\Omega)$ – точная константа в неравенстве Стеклова–Фридрихса.

Приближенные методы решения краевых задач

Оценки построены для основных классов линейных PDE's:

- Эллиптические и параболические уравнения диффузии, конвекции-диффузии, и т.д.;
- системы теории упругости, термоупругости, и т.д.;
- линейные модели вязкой жидкости;
- задачи в неограниченных областях;

и для ряда нелинейных моделей.

Публикации: более 120 публикаций, в т.ч. монографии:

S. Repin. *A posteriori estimates for partial differential equations.* Radon Series on Comp. and Appl. Math., **4**. Walter de Gruyter, Berlin, 2008.

P. Neittaanmäki, S. Repin. *Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates.* Studies in Math. and its Appl., **33**. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.

S. Repin, S. Sauter. *Accuracy of Mathematical Models.* Tracts in Mathematics, **33**. European Mathematical Society, 2020.

Спектральная теория

Периодические операторы

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор Шредингера

$$H = -\Delta + V(x).$$

Предположим, что потенциал V периодичен относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$,

$$V(x+\gamma) = V(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Эта модель играет важную роль в физике твердого тела. Оператор H — это оператор энергии электрона, находящегося в поле потенциала V. Большинство твердых тел имеет кристаллическую структуру. Описать явно, чему равен потенциал, создаваемый кристаллической (периодической) решеткой атомов, практически невозможно. Поэтому важно понимать, как устроен спектр оператора H в общем, если про потенциал V ничего не известно, кроме периодичности.

Спектральная теория

В этом примере, как и для более общего оператора

$$H = (\nabla - i\mathbf{A}(x))^*\mathcal{G}(x)(\nabla - i\mathbf{A}(x)) + V(x) \qquad (***)$$

с периодическими коэффициентами и липшицевой эллиптической матрицей $\mathcal{G}$, спектр оказывается абсолютно непрерывным. Н.Д. Филонов впервые построил пример периодического оператора, у которого есть точечный спектр (собственное значение бесконечной кратности). В этом примере $d \geq 3$, $A \equiv 0$, $V \equiv 0$, $g \in C^\alpha$ с любым $\alpha < 1$.

Другой вопрос связан с поведением т.н. зонных функций $E(\xi)$ на краях зон, т.е. в точках максимума и минимума. В физике твердого тела тензоры эффективных масс M_{eff} определяются формулой

$$M_{eff}^{-1} = \pm\frac{1}{\hbar^2}D^2E(\xi_0),$$

где ξ_0 – точка минимума или максимума. Знак плюс берется в случае минимума зонной функции (эффективная масса электрона), знак минус — в случае максимума (эффективная масса дырки).

Спектральная теория

Определение тензора M_{eff} подразумевает, что правая часть обратима, то есть критическая точка ξ_0 невырождена. Это всегда верно в размерности $d = 1$. Общепринято считать, что это верно и при $d \geq 2$. Однако строгих результатов в этом направлении очень мало. В первую очередь возникает вопрос, конечно ли множество экстремумов в ячейке периодов.

- Н.Д. Филонов, И. Качковский (Acta Mathematica, 2018): при $d = 2$ для оператора общего вида $(***)$ при условиях

$$\mathcal{G} \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right), \qquad \mathbf{A} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \qquad V \in L_\infty(\mathbb{R}^2),$$

  глобальные (на периоде) максимумы и минимумы любой зонной функции изолированы, то есть достигаются только в конечном числе точек.

Спектральная теория

Оператор Лапласа в ограниченной области

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с липшицевой границей. Рассмотрим две классические задачи

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{в} \quad \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta\psi = \mu\psi & \text{в} \quad \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Обозначим соответствующие собственные числа

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots, \qquad \lambda_k \to +\infty,$$

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \le \mu_3 \le \dots, \qquad \mu_k \to +\infty,$$

с учетом кратностей.

- Д. Пойа (*“Математика и правдоподобные рассуждения”*, 1954): гипотеза

$$\mu_k \le (2\pi)^2 \left(\frac{k}{|B_1||\Omega|}\right)^{2/d} \le \lambda_k.$$

Здесь $|\Omega|$ — объем Ω, B_1 — единичный шар в $\mathbb{R}^d$.

Спектральная теория

Отметим, что константа в этих неравенствах неулучшаема, так как она совпадает с константой в вейлевской асимптотике

$$\lambda_k \sim \mu_k \sim Ck^{2/d}, \qquad k \to \infty.$$

Для гипотезы Пойа не известно ни одного контрпримера.

- Пойа (1954) – гипотеза верна для “заполняющих” областей.
- Li, Yau (1983); Kröger (1992) – оценки с худшими константами;
- Филонов, Левитин, Полтерович, Шер (Inventiones Mathematicae, 2023) – гипотеза верна
  1) для задачи Дирихле в шаре в любой размерности;
  2) для задачи Неймана в круге на плоскости;
  3) для обеих задач в круговом секторе произвольного раствора на плоскости.

Спектральная теория

L_2-малые уклонения гауссовских случайных процессов и спектры ковариационных операторов

X – гауссовский случайный процесс (скажем, на $[0,1]$) с нулевым средним и ковариацией $\mathcal{G}_X(t,s) := \mathbb{E}X(t)X(s)$.

Точная асимптотика: $\mathbb{P}\{\|X\| \le \varepsilon\} \sim f(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0$;

Логарифмическая асимптотика: $\log\big(\mathbb{P}\{\|X\| \le \varepsilon\}\big) \sim f(\varepsilon)$.

Из разложения Кархунена–Лоэва следует, что

$$\|X\|^2 \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2,$$

где ξ_k – стандартные независимые нормальные с.в., а μ_k – собственные числа интегрального оператора (с учетом кратностей)

$$\int\limits_0^1 \mathcal{G}_X(t,s)\varphi_k(s)\,ds = \mu_k\varphi_k(t); \qquad \mu_1 \ge \mu_2 \ge \mu_3 \ge \dots, \quad \mu_k \to 0.$$

- А.И. Назаров, Ю.П. Петрова (2023) – обзор тематики, связанной со спектральным подходом к задаче об L_2-малых уклонениях.

Спектральная теория

Точная асимптотика

- В. Ли (1992), М.А. Лифшиц (1997), Дункер, Лифшиц, Линде (1998): двучленная асимптотика μ_k с оценкой остатка дает асимптотику МУ с точностью до константы;
- Гао, Ли (2007), Назаров (2009): одночленная асимптотика μ_k дает логарифмическую асимптотику МУ.

В работах А.И. Назарова и Я.Ю. Никитина (2004-2009) выделен класс гриновских гауссовских процессов, для которых ковариация $\mathcal{G}_X(t,s)$ есть функция Грина для обыкновенного дифференциального оператора на $[0,1]$ (к этому классу относятся многие классические гауссовские процессы). Это дает возможность применить спектральную теорию ОДО (Биркгоф (1908), Тамаркин (1912) и др.) для получения двучленной асимптотики $\lambda_k = \mu_k^{-1}$.

Заметим, что явная общая формула для второго члена асимптотики λ_k была получена лишь в наших работах. На основании этих результатов были получены новые формулы регуляризованных следов для ОДО (Назаров и его ученики, 2010-2021).

Спектральная теория

- А.И. Назаров, Я.Ю. Никитин и их ученики (2004-2024) – точные асимптотики для различных классов гриновских процессов;
- А.И. Назаров, Ю.П. Петрова (2010-2020) – точные асимптотики для конечномерных возмущений гриновских процессов;
- М. Клепцына, П. Чиганский (2018): впервые вычислена двучленная асимптотика μ_k для негриновского процесса – дробного броуновского движения. Дальнейшие примеры – Клепцына, Марушкевич, Чиганский (2020-2021).
- А.И. Назаров (2021); М. Клепцына, А.И. Назаров, Н.В. Растегаев, П. Чиганский (2024, in progress): обобщение – двучленная асимптотика μ_k для дробно-гриновских гауссовских процессов.

Логарифмическая асимптотика

- E. Csáki (1982), J. Bronski (2003) – первые примеры логарифмических асимптотик для негриновских процессов.
- А.И. Назаров, Я.Ю. Никитин (2004), М.А. Лифшиц, А.И. Назаров (2016-2018) – общие результаты для широкого класса дробных процессов.

  Эти работы базируются на глубоких результатах М.С. Бирмана и М.З. Соломяка (1970-1979) об асимптотике спектра интегральных и, более общо, псевдодифференциальных операторов.
- А.И. Кароль, А.И. Назаров, Я.Ю. Никитин (2008-2014) – спектральные асимптотики для тензорных произведений интегральных операторов.
- А.И. Кароль, А.И. Назаров (2021) – спектральные асимптотики для псевдодифференциальных операторов переменного порядка.

Спектральная теория

Более сложная задача – спектральная асимптотика для оператора с сингулярной самоподобной мерой $\mathfrak{m}$:

$$\int_0^1 \mathcal{G}_X(t,s)\varphi(s)\,d\mathfrak{m}(s) = \mu\varphi(t), \qquad 0 \le t \le 1. \qquad (\star)$$

- М.З. Соломяк, Е. Вербицкий (1995): одночленная асимптотика для случая, когда $\mathcal{G}_X$ – ф.Г. для оператора Штурма–Лиувилля;
- А.И. Назаров (2004): $\mathcal{G}_X$ – ф.Г. для ОДО любого порядка;
- А.А. Владимиров, И.А. Шейпак (2010-2012), А.И. Назаров, И.А. Шейпак (2012): случай вырожденного самоподобия меры $\mathfrak{m}$;
- А.А. Владимиров, И.А. Шейпак (2006-2015), Н.В. Растегаев (2014-2024): тонкая структура спектра при некоторых дополнительных условиях;
- Н.В. Растегаев (2017): тензорные произведения операторов вида $(\star)$.

Thank you for your attention!

Спасибо за внимание!

~~Thank you for your attention!~~